研 究

テンプレ時計の脱進機誤差について (第2報)

正会員 大 島 康 次 郎*

On the Escapement Error of Watches (Part II)

Yasujiro OSHIMA

In the preceding report the author introduced the theory of the escapement error of watches by making use of the rotating vector, where some approximation and simplification were made in the premise to get the qualitative results.

Hence, in order to make the result as quantitative as possible, he has developed the theory again, taking the other factors into consideration.

Those are as follows:

- 1) The moment of inertia of the lever which is added to the oscillating system in the period of engagement between the balance and the lever.
- 2) The energy loss of the oscillating system at the moment of collision between the impulse pin and the lever fork and disconnection of them.

I. 緒 言

第1報¹⁾において脱進機誤差の理論を回転ベクトルを応用して展開したが、そこでは簡単のためアンクルの慣性モーメントおよびテンプレ振り石とアンクルのフォークとの衝突は考慮に入れていなかった。すなわちテンプレの振動を論ずるにあたってテンプレとアンクルとの噛合いによつて力の授受だけが行われるとして計算を行った。しかしながら実際にはテンプレ振動の途中でテンプレ振り石がアンクルフォークに衝突してアンクルをガングの停止から外し、インパルスを受けてのちアンクルから離れるのであるが、アンクルと噛合っている間はテンプレとアンクルが一体となつて運動するとみなされるから、テンプレ振動系にアンクルの慣性が付加されることになる。またテンプレとアンクルとの衝突現象も考慮に入れなければならない。そこで以上の考慮を加えて、再び脱進機誤差の理論式を誘導することにする。

II. 脱進機誤差の理論

(1) アンクル慣性の考慮

まずテンプレがアンクルと噛合っている場合にアンクルの慣性がテンプレ振動に如何に影響するかをしらべてみる。図1はテンプレ右振動におけるインパルスの期間でア

ンクルフォークがテンプレ真とアンクル真を結んだ中心線上を通過するときの状況を示す。こゝで記号を次の如く定める。

I : テンプレ慣性モーメント

I_a : アンクル慣性モーメント

r : テンプレ真より振り石までの距離

r_a : アンクル真より振り石までの距離

θ : テンプレ回転角

θ_a : アンクル回転角

M_a : ガングから加えられるアンクル真の周りのモーメント

F : アンクルフォークからテンプレ振り石に伝えられる力

s : ひげぜんまいのバネ定数

R : テンプレ真の摩擦力のモーメント

図 1

図1の状態では次式が成立する。

$$I_a \frac{d^2 \theta_a}{dt^2} = M_a - Fr_a$$

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -s\theta + Fr - R$$

$$r_a d\theta_a = r d\theta$$

これらの式から F , θ_a を消去して

* 東京大学生産技術研究所

1) 大島: 精密機械 15 (1949) 215.

$$(I + I_a z^2) \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -s\theta + M - R \quad (1)$$

たし

$$z = \frac{r}{r_a}, \quad M = \frac{r}{r_a} M_a$$

で、 M はガンギから伝わる駆動トルクをテンブ真の周りに換算してあらわしたものである。以上の関係は図 1 に示した状況において成立するのであるが、実際にはインパルスの期間はテンブおよびアングルともに中心線近傍の角度においてであるから、近似的にインパルス期間にわたって成立するものとみなす。

また外しの期間においても同様の理由から

$$(I + I_a z^2) \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -s\theta - \epsilon_1 M - R \quad (2)$$

が成立するものとする。 ϵ_1 はテンブ右振動における外しの抵抗とインパルスの駆動トルクとの比で、脱進機の構造から定まる定数である。

以上のようにテンブがアングルと噛合っている場合はテンブ振動系が $(I + I_a z^2)$ なる慣性モーメントを有するものとして理論を進めることにする。

テンブが自由の期間においては

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -s\theta - R \quad (3)$$

以上 (1), (2), (3) 式は前報の約束によるテンブ右振動の場合について示したものである。(1), (2), (3) 式より

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\omega^2 (\theta - m + r) \quad (1)'$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\omega^2 (\theta + \epsilon_1 m + r) \quad (2)'$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\omega^2 (\theta + r) \quad (3)'$$

ここで

$$\omega^2 = \frac{s}{I + I_a z^2}, \quad \omega^2 = \frac{s}{I}, \quad m = \frac{M}{s}, \quad r = \frac{R}{s}$$

である。

(2) 衝突の考慮

テンブ振動は (3)' 式に示される自由の期間、(2)' 式に示される外しの期間、(1)' 式に示されるインパルスの期間とからなっている。テンブはまず自由の期間のうち、テンブ振り石がアングルフォークに衝突して、外しの期間に入り、インパルスの期間をへて、アングルはテンブとの噛合いを離れ、テンブは再び自由の期間に戻る。このテンブとアングルの衝突および離脱における状況が上記運動方程式の初期条件およびエネルギー損失に関係する。

前報と同様に外し開始テンブ角度を α_i 、外し終了テン

ブ角度を β_i 、インパルス開始テンブ角度を τ_i 、インパルス終了テンブ角度を δ_i とし、 $i=1, 2$ のサフィックスを以て右振動および左振動をあらわすことにする。なお前報においては外し終了テンブ角度とインパルス開始テンブ角度を別々に取扱ってきたが、本報ではアングル慣性を考慮する必要上、簡単のため両者が一致する（すなわち $\beta_i = \tau_i$ ）として議論を進めることにする。

さて外しの開始点におけるテンブ振り石とフォークとの衝突を考えると、衝突後テンブとアングルとが一体となつて運動すると仮定すれば、衝突によつて角運動量が不変であるから、衝突前のテンブ角速度を Ω_{α_i} 、衝突後のそれを Ω'_{α_i} として、次の関係が成立する。

$$I \Omega_{\alpha_i} = (I + I_a z^2) \Omega'_{\alpha_i}$$

すなわち

$$\Omega'_{\alpha_i} = \frac{I}{I + I_a z^2} \Omega_{\alpha_i} \quad (4)$$

これが外し期間の運動方程式の初期条件になる。

また衝突前後における運動エネルギーを計算して、衝突によるエネルギー損失を求めると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} I \Omega_{\alpha_i}^2 - \frac{1}{2} (I + I_a z^2) \Omega'^2_{\alpha_i} \\ &= \frac{1}{2} I \Omega_{\alpha_i}^2 - \frac{1}{2} (I + I_a z^2) \frac{I^2}{(I + I_a z^2)^2} \Omega_{\alpha_i}^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{I I_a z^2}{I + I_a z^2} \Omega_{\alpha_i}^2 \quad (5) \end{aligned}$$

次にインパルスの終りにおいては、テンブはそのときの角速度をもつて自由な振動に入るが、アングルはテンブより離れ、ドテ・ピンによつて停止される。インパルスの終了点におけるテンブとアングルの離脱前後のテンブの角速度をそれぞれ Ω'_{δ_i} 、 Ω_{δ_i} とすれば

$$\Omega_{\delta_i} = \Omega'_{\delta_i} \quad (6)$$

である。これが自由の期間の運動方程式の初期条件である。

この離脱の瞬間においてはテンブとアングルのそれぞれの運動エネルギーには変化がないが、テンブ振動系としてみる場合、アングルのもつている運動エネルギーはまるまる損失になるわけである。このアングルの運動エネルギーをテンブ真に換算した諸量であらわすと

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (I + I_a z^2) \Omega'^2_{\delta_i} - \frac{1}{2} I \Omega_{\delta_i}^2 \\ &= \frac{1}{2} I_a z^2 \Omega_{\delta_i}^2 \quad (7) \end{aligned}$$

となる。

(3) 再び回転ベクトルの応用

自由、外し、インパルスの各期間を支配する運動方程式が上述のように求められたから、これを前報と同様に

回転ベクトルによつて表わすことができる。たゞしこんどは外し、インパルスの期間においてアングルの慣性が付加されるから、回転ベクトルの回転速度がかわることになり、さらに衝突、離脱において、テンブ角速度の関係(4)、(6)式が満足されなければならない。

テンブ右振動の場合の回転ベクトルの状況を図2に従つて説明することにする。テンブ振動の振幅を θ とすれば右振動はテンブ角度で $-\theta$ より始まる。最初の自由の期間においては運動方程式(3)'より分るように、回転ベクトルは中心 O より $-r$ だけ下方の点 r_1 を中心として、 $(\theta-r)$ の大きさと ω なる回転速度をもつて回転する。ベクトルの先端が外し開始テンブ角度 α_1 に対応する A_1 点に達すると、こゝで衝突が行われ、これより外し期間に入る。外し期間の

図 2

運動方程式(2)'より分るように、回転ベクトルはその中心が r_1 よりさらに $\epsilon_1 m$ だけ下方の点 q_1 に移り、その上回転速度が ω' に変わる。なおその大きさは衝突によるテンブ角速度変化(4)式の関係によつて定まる。衝突前のテンブ角速度 ω_{α_1} は前報で述べた回転ベクトルの性質より

$$\begin{aligned}\omega_{\alpha_1} &= \omega \cdot \overline{A_1 \alpha_1} \\ &= \omega \sqrt{\overline{A_1 r_1^2} - \overline{\alpha_1 r_1^2}} \\ &= \omega \sqrt{(\theta-r)^2 - (\alpha_1+r)^2} \quad (8)\end{aligned}$$

同様に衝突後のテンブ角速度 ω'_{α_1} も

$$\omega'_{\alpha_1} = \omega' \cdot \overline{A'_1 \alpha_1}$$

(4)式の関係より

$$\begin{aligned}\omega' \cdot \overline{A'_1 \alpha_1} &= \frac{I}{I + I_a z^2} \cdot \omega \cdot \overline{A_1 \alpha_1} \\ \overline{A'_1 \alpha_1} &= \frac{I}{I + I_a z^2} \cdot \frac{\omega}{\omega'} \cdot \overline{A_1 \alpha_1} \\ &= \frac{I}{I + I_a z^2} \sqrt{\frac{I + I_a z^2}{I}} \cdot \overline{A_1 \alpha_1} \\ &= \sqrt{\frac{I}{I + I_a z^2}} \cdot \overline{A_1 \alpha_1}\end{aligned}$$

$$= \sqrt{\{(\theta-r)^2 - (\alpha_1+r)^2\} \frac{1}{1 + I_a/I \cdot z^2}} \quad (9)$$

これより A'_1 点が求まるから外し期間における回転ベクトルの大きさ $\overline{q_1 A'_1}$ が定まる。

次に回転ベクトルの先端がインパルス開始テンブ角度 β_1 に対応する B'_1 点に達するとインパルス期間に入る。運動方程式(1)'より分るように、回転ベクトルの中心は r_1 より m だけ上方の点 p_1 を中心とし、外し期間と同じ回転速度 ω' をもつて回転する。外しよりインパルスへの移行に際しては、ベクトルの回転速度もテンブ角速度も変化しないからベクトルの大きさは $\overline{p_1 B'_1}$ である。

このようにして回転ベクトルがインパルス終了テンブ角度 δ_1 に対応する D'_1 点に達すると、インパルスは終了し、テンブ振動は自由の期間に入る。従つて回転ベクトルの中心は再び r_1 に戻り、回転速度は ω になる。このようにインパルス終了点ではベクトルの回転速度が ω' から ω に変化するが、テンブ角速度は(6)式に示したように変化がないから、 D'_1 点と D_1 点の間には次の関係が成立しなければならない。

$$\omega' \cdot \overline{D'_1 \delta_1} = \omega \cdot \overline{D_1 \delta_1}$$

$$\overline{D'_1 \delta_1} = \frac{\omega}{\omega'} \cdot \overline{D_1 \delta_1} = \sqrt{\frac{I + I_a z^2}{I}} \cdot \overline{D_1 \delta_1}$$

テンブ振動の左右振幅が等しいとすれば²⁾

$$\overline{D_1 r_1} = \theta + r$$

であるから

$$\overline{D'_1 \delta_1} = \sqrt{(\theta+r)^2 - (\delta_1+r)^2}$$

従つて

$$\overline{D'_1 \delta_1} = \sqrt{\{(\theta+r)^2 - (\delta_1+r)^2\} (1 + I_a/I \cdot z^2)} \quad (10)$$

なお

$$\omega_{\delta_1} = \omega \sqrt{(\theta+r)^2 - (\delta_1+r)^2} \quad (11)$$

である。

以上のようにテンブ右振動の回転ベクトルが描かれるが、左振動についても全く同様にして求めることができる。たゞし左振動においては外し開始、インパルス開始インパルス終了テンブ角度がそれぞれ α_2 , β_2 , δ_2 であり自由期間におけるベクトルの中心が O より r だけ上方の点 r_2 、外し期間のそれが r_2 よりさらに $\epsilon_2 km$ だけ上方の点 q_2 、インパルス期間のそれが r_2 より km だけ下方の点 p_2 となる。こゝで ϵ_2 は左振動における外しの抵抗とインパルス駆動トルクの比、 κ は左振動の駆動トルクの

²⁾ 前報同様 α_i , β_i , δ_i は符号をもつ。図2の状態では α_1 , β_1 は $(-)$, δ_1 は $(+)$ である。

³⁾ 一般に左右振幅は等しくないが、前報でのべた理由により近似的に等しいと置くことができる。

右振動のそれに対する比で、いずれも脱進機の構造により定まる定数である。左振動の回転ベクトルが右振動の最初の状態に戻つて一周期が完了するのである。

外し、インパルス期間のベクトルの中心 q_i , p_i の位置はエネルギー式から求められる。すなわち ε_1 , ε_2 , κ が定数であるから、エネルギー式より振幅に応じた m の値が求まり、これより q_i , p_i が決定されるのである。

エネルギー式は、テンブ振動の一周期の間で、インパルスの期間にガンギ車から受けたエネルギーが外しの期間の抵抗による損失、摩擦損失、衝突の損失〔(5)式〕、および離脱の際のアングルによつて持ち去られる損失〔(7)式〕に等しいとおいてえられる。すなわち

$$M(\delta_1 - \beta_1) + \kappa M(\beta_2 - \delta_2) = \varepsilon_1 M(\beta_1 - \alpha_1) + \varepsilon_2 \kappa M(\alpha_2 - \beta_2) + 4\theta R + \frac{1}{2} \cdot \frac{I I_a z^2}{I + I_a z^2} \sum_{i=1,2} \Omega^2 \alpha_i + \frac{1}{2} \cdot I_a z^2 \sum_{i=1,2} \Omega^2 \delta_i$$

ここで $\Omega \alpha_i$, $\Omega \delta_i$ は右振動 ($i=1$) に対しては (8),

(11) 式で求められているが、左振動 ($i=2$) に対しても同様に求められる。すなわち

$$\Omega \alpha_i = \omega \sqrt{(\theta - r)^2 - (\alpha_i \pm r)^2}$$

$$\Omega \delta_i = \omega \sqrt{(\theta + r)^2 - (\delta_i \pm r)^2}$$

($i=1$ のとき (+) 符号, $i=2$ のとき (-) 符号)

このエネルギー式において

$$\omega^2 = \frac{s}{I}$$

を考慮に入れて、両辺を s で割り、整理すると

$$m(\delta_1 - \beta_1) + \kappa m(\beta_2 - \delta_2) - \varepsilon_1 m(\beta_1 - \alpha_1) - \varepsilon_2 \kappa m(\alpha_2 - \beta_2) = 4\theta r + \frac{1}{2} \frac{I_a/I \cdot z^2}{1 + I_a/I \cdot z^2} \sum_{i=1,2} \{(\theta - r)^2 - (\alpha_i \pm r)^2\} + \frac{1}{2} I_a/I \cdot z^2 \sum_{i=1,2} \{(\theta + r)^2 - (\delta_i \pm r)^2\} \quad \dots (12)$$

以上のエネルギー式から振幅 θ に対する m が計算でき、回転ベクトルは完全に決定される。

この回転ベクトルから脱進機誤差を求めるのであるが前報の場合と異なり、こんど場合はテンブがアングルと噛合っている期間ベクトルの回転速度が変化しているので、前報のように単に位相角の変化だけから求めることができない。図 2 において、もし脱進機がなければ、回転ベクトルは r_1 を中心に回転速度 ω をもつて半回転するのであるが、脱進機があるために φ_1 および ψ_1 の角度は回転速度が ω' となつてゐる。したがつて右振動の半周期における脱進機のない場合とある場合との周期の変化は、前者における角度 φ_1 を ω の回転速度で廻る時間と後者における角度 φ_1 および ψ_1 を ω' で廻る時間との相違に等しい。左振動半周期についても同様であるから

T_0 を脱進機なしの周期, T を脱進機つきの周期とすれば、次の関係が成立する。

$$\Delta T = T_0 - T = \left\{ \sum_{i=1,2} \frac{\varphi_i}{\omega} - \sum_{i=1,2} \frac{1}{\omega'} (\varphi_i + \psi_i) \right\}$$

ここで

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$$

であるから

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \sum_{i=1,2} \varphi_i - \frac{\omega}{\omega'} \sum_{i=1,2} (\varphi_i + \psi_i) \right\}$$

ここで ω/ω' に慣性の項を代入し、かつ変化を 1 日当りに換算して表わすと、結局脱進機誤差は次式で求められる。

$$\Delta = \frac{86,400}{2\pi} \left\{ \sum_{i=1,2} \varphi_i - \sqrt{1 + I_a/I \cdot z^2} \sum_{i=1,2} (\varphi_i + \psi_i) \right\} \quad \dots (13)$$

φ_i , φ_i , ψ_i は回転ベクトルの図より次のように求められる。

$$\varphi_i = \sin^{-1} \left(\frac{\pm \delta_i + r}{\theta + r} \right) + \sin^{-1} \left(\frac{\mp \alpha_i - r}{\theta - r} \right) \quad \dots (14)$$

($i=1$ のとき符号は上, $i=2$ のとき下をとる。以下同様)

次に (9) 式を考慮して

$$\begin{aligned} \overline{A'_i q_i} &= \sqrt{A'_i \alpha_i^2 + \alpha_i q_i^2} \\ &= \sqrt{\{(\theta - r)^2 - (\alpha_i \pm r)^2\} \frac{1}{1 + I_a/I \cdot z^2} + \{\mp \alpha_i - (\varepsilon_i m_i + r)\}^2} \\ & \quad (i=1 \text{ のとき } m_i = m, i=2 \text{ のとき } m_i = \kappa m, \text{ 以下同様}) \\ \varphi_i &= \sin^{-1} \frac{\overline{q_i \alpha_i}}{A'_i q_i} - \sin^{-1} \frac{\overline{q_i \beta_i}}{A'_i q_i} \\ &= \sin^{-1} \frac{\mp \alpha_i - \varepsilon_i m_i - r}{\sqrt{\{(\theta - r)^2 - (\alpha_i \pm r)^2\} \frac{1}{1 + I_a/I \cdot z^2} + \{\mp \alpha_i - (\varepsilon_i m_i + r)\}^2}} \\ & \quad - \sin^{-1} \frac{\mp \beta_i - \varepsilon_i m_i - r}{\sqrt{\{(\theta - r)^2 - (\alpha_i \pm r)^2\} \frac{1}{1 + I_a/I \cdot z^2} + \{\pm \alpha_i - (\varepsilon_i m_i + r)\}^2}} \quad \dots (15) \end{aligned}$$

同様に (10) 式を考慮して

$$\begin{aligned} \overline{D'_i p_i} &= \sqrt{D'_i \delta_i^2 + \delta_i p_i^2} \\ &= \sqrt{\{(\theta + r)^2 - (\delta_i \pm r)^2\} (1 + I_a/I \cdot z^2) + \{\delta_i \mp (m_i - r)\}^2} \\ \psi_i &= \sin^{-1} \frac{\overline{p_i \delta_i}}{D'_i p_i} + \sin^{-1} \frac{\overline{p_i \beta_i}}{D'_i p_i} \\ &= \sin^{-1} \frac{\pm \delta_i - m_i + r}{\sqrt{\{(\theta + r)^2 - (\delta_i \pm r)^2\} (1 + I_a/I \cdot z^2) + \{\delta_i \mp (m_i - r)\}^2}} \\ & \quad + \sin^{-1} \frac{\mp \beta_i + m_i - r}{\sqrt{\{(\theta + r)^2 - (\delta_i \pm r)^2\} (1 + I_a/I \cdot z^2) + \{\delta_i \mp (m_i - r)\}^2}} \quad \dots (16) \end{aligned}$$

このようにして結局 (12), (13), (14), (15), (16) の

諸式より脱進機誤差 Δ が振幅 θ の函数として求まることになる。

III. 結 言

以上時計指示差の重要な原因である脱進機誤差について、テンプとアンクルとが噛合している期間におけるアンクル慣性ならびにテンプ振り石とアンクルフォークとの衝突を考慮に加えて、回転ベクトルを応用してその理論式を誘導した。第1報において結果として得られた近似式が比較的簡単で定性的な結論を引出すのに便利な形であつたのに対して、こゝに得られた結果はかなり複雑な形で、実際に数値を入れて計算してみないと、云い換えれば定量的でない結論が引出せないという不便さをもっている。この研究については既に学振95小委員会の当時その席上において前報とともに報告を行つており

当然前報に引続いて誌上に発表すべきものを、今日までそれを差控えていたのは精密な実験結果とこの方法による理論値を比較した上で、その妥当性をよく確かめてからにしたいと思つたからである。この実験については引き続き次報において報告し、そこで本法による数値計算の結果を実験値と比較して示すことにするが、精密な実験がなかなか困難であつたことと、実験の途中でひげの非直線性の問題にぶつかり研究の重点をその方に向けたことのために、今日までその発表が延引してしまつた。努力のいたらなかつた点をこゝに深くお詫び申上げる。

なお前記委員会においては当時の委員長大越博士を始め委員の方々に種々有益なる御指導を賜つたことを記し厚く感謝の意を表する次第である。

(1954, 12月7日受付)

試作した二成分切削工具動力計について*

正会員 中 山 一 雄**

Two-component Tool Dynamometer

Kazuo NAKAYAMA

A new tool dynamometer which indicates two-components of cutting force is described here. An elastic cylinder, which connects a cutting tool with a tool holder, bends in proportion with and in the direction of the cutting force. The deflection of the cylinder is magnified by a bar and separated in vertical and horizontal directions. These two deflections, which indicate vertical and horizontal components of the cutting force, are more magnified by levers and Eden's twin strips and recorded on soot-coated paper, which is rolled on a drum and rotated by a synchronous motor.

The characteristics of this dynamometer are as follows: —

1. By coinciding the cutting edge of cutting tool with the center line of cylinder, there will be no interference between the two components of cutting force indicated.
2. As the cylinder is fairly rigid and has no sliding part, this dynamometer can be used even in the case of high speed cutting with sintered carbide tool. The deflection of tool is $0.47 \mu/\text{kg}$ for vertical force and $0.30 \mu/\text{kg}$ for horizontal force.
3. The accuracy is less than 2 kg for the tube with capacity of about 200 kg (this is varied easily by varying the dimensions of cylinder).
4. Alternating force of frequency up to about 8 cycle/sec. is accurately recorded.
5. As the mechanism is so simple, it is very easy to use in workshops and to maintain its accuracy.

2. 緒 言

切削抵抗を測定する為のいわゆる 切削工具動力計は切

削の研究には不可欠なもので、古くは F.W. Taylor の用いたブレーキ法に始まつて、切削力を油圧や圧電氣に変えて測るもの、切削力によるバイト自体の撓みを光学的に拡大して測るもの、工具を弾性体を介して取付けて切削力による弾性体の撓みを機械的挺子や液柱によつて拡大したり、電氣容量やインダクタンスの変化に変えて

* 昭和28年4月及び10月精機学会講演会にて発表、特許出願中。

** 横浜国立大学工学部