The Journal of the Acoustical Society of America, Vol.23. No.2. March. 1951. 209~214頁.

2) 西村, 島川: 超音波機械加工, 機械学会誌, 第59巻第455号, 昭31年12月.

3) 大平, 宮本, 浅沼: 超音波加工用コニカルホー

ンの設計について, 精密機械, 第23巻第5号.

4) Applied Acoustics; H. F. Olsen & F. Massa, § 8. 219頁.

5) 前出: (4) § 8. 217頁.

(4) (5) は P. Blakiston's Son & Co. INC 出版 (Philadelphia) 1939年.

球の衝撃作用の解析*

正 会 員 大 越 諄** 飯 田 喜 介**

The Analysis for Force and Deformation of Impact by Sphere

Makoto OKOSHI and Kiskeya IIDA

Impact actions of sphere collided with semi-infinite elastic and plastic body were analysed. Force and deformation due to impact were presented as the function of diameter (D) and velocity (v) of sphere and material factors.

The differences between the analytical results and the experimental formulas reported previously were compared by the exponents on diameter and velocity of sphere. The results are shown in table 1.

For the impact force of sphere, diameter effect in the elastic impact is equal to that in the plastic impact, but velocity effect in the former is larger than that in the latter. The experimental result on diameter effect is all but the same to them, and that on velocity effect is the middle of them.

For deformation, which involves chordal diameter, depth and volume of indentation, diameter effect in the plastic impact is equal to that in the elastic impact, but velocity effect in the former is a little larger than that in the latter. Theoretical results of the plastic impact are identical with the experimental results.

1. 緒 言

噴射加工が粒子の衝撃作用に依る加工である事から, 若者は先づに平面に種々の径の鋼球が種々の速度で衝突する場合の実験を行い, 衝撃力及び衝撃変形に対する投射条件の関係法則を求めた。

本報はその場合の理論的解析を行つたものである。即ち接触部分の変形が弾性変形の場合と塑性変形の場合について, 夫々衝撃力と変形量に対する投射条件の関係式

* 昭和31年4月21日精機学会春季講演会にて発表

** 東京大学工学部

1) 大越, 飯田: 鋼球の衝撃による Indentation について, 精機学会誌, 第23巻, 第7号 (1957) 312~315頁.

を求め, 実験値と比較したものである。

2. 弾性衝撃

Fig.1 の如く半無限弾性体の表面に垂直に速度 v で球が衝突した場合, 両者は弾性的に変形して接触面積を増すと共に球の速度は減少し遂に0となる。其の後球は弾性変形の energy によつて投射方向と反対方向に作用する力をうけ次第に速度を増して半無限体から離れてゆく。

Fig.1

この最大近接位置に於ける変形量と同一の変形を起す

に要する圧力，換言すれば衝撃力の相当静圧力に対して H. Hertz²⁾ の球面の接触に関する圧力と変形量との関係が成立つものとし，その力を P とする。

球径及び近接量を夫々 D 及び λ とすれば

$$\lambda = \left\{ \frac{9}{16} \frac{P^2}{D} \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)^2 \right\}^{1/3}$$

これより

$$P = \frac{4}{3} \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)^{-1} D^{1/2} \lambda^{3/2} \dots\dots (1)$$

E_i , ν_i ($i=1, 2$) は夫々弾性率及びポアソン比である。

球の質量を m とすれば

$$m \frac{d^2 \lambda}{dt^2} = -P$$

従つて

$$\int_v^0 m v dv = - \int_0^\lambda \frac{4}{3} \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)^{-1} D^{1/2} \lambda^{3/2} d\lambda$$

球の密度を ρ とすれば

$$\lambda = \frac{1}{4} \left\{ 5\pi\rho \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right) \right\}^{-2/5} D v^{4/5} \dots (2)$$

(1) 式より

$$P = \frac{1}{6} (5\pi\rho)^{3/5} \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)^{-2/5} D^2 v^{6/5} \dots (1)'$$

接触円の直径を δ とし

$$\left(\frac{\delta}{2} \right)^2 = \lambda (D - \lambda) \quad \lambda \approx 0 \quad \text{とすれば}$$

$$\approx \lambda D$$

(2) 式より

$$\delta = \left\{ 5\pi\rho \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right) \right\}^{1/5} D v^{2/5} \dots\dots (3)$$

H. Hertz の解には種々の仮定があるが，之を拡張し衝撃に依つて生ずる変形が半無限体側に起るものとすれば欠球状の変形となり接触円の直径は真径に，近接量は痕の深さに夫々対応する。従つて其の体積 V は

$$V = \frac{\pi}{6} \lambda \left(\frac{3}{4} \delta^2 + \lambda^2 \right) \quad \lambda^3 \approx 0$$

$$\approx \frac{\pi}{8} \delta^2 \lambda$$

(2) 及び (3) 式より

$$= \frac{\pi}{32} \left\{ 5\pi\rho \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right) \right\}^{4/5} D^3 v^{8/5}$$

或は

$$= \frac{3}{16} \left\{ 5\pi \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right) \right\}^{4/5} \rho^{-1/5} m v^{8/5}$$

3. 塑性衝撃

Fig. 2 の如く，球が半無限塑性体に衝突して h だけ

2) H. Hertz: Über die Berührung fester elastischer Körper, Journ. die reine u. ang. Math., 92, (1881) p. 156~171.

Fig. 2

入つて止つた場合，球と塑性体との接触角を ϕ とし，塑性体は球に対して接触面の法線方向に σ なる抵抗力を及ぼし之が衝撃力 P と釣り合うものとすれば

$$dP = \frac{\pi}{2} \sigma D^2 \sin\theta \cos\theta d\theta$$

$$P = \int_0^\phi \frac{\pi}{2} \sigma D^2 \sin\theta \cos\theta d\theta$$

σ を塑性変形に対する平均抵抗応力とし， θ 及び v に独立で $\sigma = \text{const}$ な塑性体として上式をとけば

$$P = \frac{\pi}{4} \sigma D^2 \sin^2\phi$$

$h^2 \approx 0$ として前項と同様の関係から

$$P = \pi \sigma D h \dots\dots\dots (4)$$

此の関係から衝撃の運動方程式を解けば

$$\int_v^0 m v dv = - \int_0^h \pi \sigma D h dh$$

従つて

$$h = \left(\frac{\rho}{6\sigma} \right)^{1/2} D v$$

(4) 式より

$$P = \pi \left(\frac{\rho\sigma}{6} \right)^{1/2} D^2 v^2$$

同様に

$$d = 2 \left(\frac{\rho}{6\sigma} \right)^{1/4} D v^{1/2}$$

変形体積 V は

$$V = \frac{\pi}{8} d^2 h \quad \text{但し } h^3 \approx 0$$

$$= \frac{\pi\rho}{12\sigma} D^3 v^2$$

或いは

$$= \frac{1}{2} \sigma^{-1} m v^2$$

4. 実験値との比較

Shot の衝撃力並びに work の変形量に対する投射条件の関係は、噴射加工に於ける加工条件を決定する際の基礎的重要事項である。shot は一般に球状であり、本報では球としてその直径及び速度の影響を考察する。

前報³⁾ の実験から得られた関係は

$$P = k_p D^{1.97} v^{1.10}$$

$$d = k_d D v^{1/2}$$

$$h = k_h D v$$

$$V = k_v D^3 v^2$$

$$\text{又は } = k'_v m v^2$$

此の結果と解析の結果を比較する為、球径及び速度に対する指数をとって表示したものが Table 1 である。

Table 1

impact		exponent							
		force (P)		indentation					
				diameter (d)		depth (h)		volume (V)	
		D*	v**	D	v	D	v	D	v
theoretical result	elastic	2	1.2	1	0.4	1	0.8	3	1.6
	plastic	2	1.0	1	0.5	1	1	3	2
experimental result		1.97	1.10	1	0.5	1	1	3	2

* Ball diameter ** Impact velocity

実験に用いた試験片は焼準された 0.2%炭素鋼及び 18-8 不銹鋼であるから、衝撃の際の変形は完全な弾性体でもなく、又完全な塑性体でもなく、弾性変形を含んだ塑性変形である。従つて両者を含めた理論的な取扱いが実際の結果と一致する筈であるが、ここで取扱つた二つの場合の解析の結果は、実際の場合の衝撃作用に於ける球径と速度の効果が塑性体として取扱つた場合の理論値と略々一致し、弾性衝撃と塑性衝撃に於けるそれらの差は

それ程大きいものではない事を示している。即ち衝撃力に対しては弾性衝撃、及び塑性衝撃共に球径効果は等しく実験値も殆んど之に等しい値を示している。速度効果に対しては実験値は弾性衝撃と塑性衝撃の中間の値となつてゐるが、三者の差は比較的少ない。

痕径、痕の深さ及び痕体積に対する球径効果は弾性、塑性及び実験値共に皆等しく、速度効果に対しては実験値は塑性衝撃の場合と一致し、弾性衝撃の場合の方が少ない結果となつてゐる。

弾性衝撃の場合、痕体積に対する速度効果が塑性衝撃及び実験値と異なるのは、弾性及び塑性衝撃に於ける痕体積が痕径と痕の深さから誘導されたものである為、痕径及び痕の深さと投射条件との関係が実験値又は塑性衝撃の関係と異つていれば当然その差が異積される事に起因する。

塑性衝撃に於ける σ は平均変形抵抗力の意味をもち、衝撃力に対して定義される Brinell 硬度数となる。之等に関する諸定数に対しては、実験の結果と併せて別報に述べる予定である。

5. 結 論

球の平面に対する衝撃作用を衝撃力、痕径、痕の深さ及び痕体積ににわけて取扱ひ、弾性衝撃及び塑性衝撃の場合について夫々投射条件との関係式を求めた。

衝撃力に対する関係式に於ては、弾性衝撃と塑性衝撃の球径の指数は等しく、速度の指数は弾性衝撃の方が大きい。理論式に於ける球径と速度の指数を実験式の夫々の数値と比較すると、球径の指数は殆んど等しく、速度の指数は弾性衝撃と塑性衝撃の場合の理論値の平均値が実験値に等しい。

痕径、痕の深さ及び痕体積に対しては、弾性衝撃は塑性衝撃より速度の指数が若干少く、球径の指数は等しい。之等に対する実験式の指数は塑性衝撃の場合の指数と一致する。

(1957, 9月5日受付)

3) 註 1) に同じ