固有振動を伴わぬアンクル・ガンギ 緩速機構の理論的研究 (第3報)

—定 常 運 動—

石 原 信 一*

Theoretical Investigations of Retard Regulating Mechanisms without
Natural Frequency Comprising a Pallet and a Star Wheel (Part 3)
—Steady-State Motion—

Nobukazu ISHIHARA

From practical standpoint of view it is important to recognize the fact that the retard regulating mechanism consisting of a pallet and a star wheel, started at any arbitrary velocity or from rest, attains to the state of motion, in which the identical pattern of motion is repeated for each tooth of the star wheel moving forward in rotation. This is designated as the steady-state motion of the mechanism.

By the application of dimensional analysis, the relation between the parameters or elements that affect the steady-state motion of the mechanism will be established. Further, five possible patterns of steady-state motion encountered in practice are discussed and defined. The conception of the dynamical stability of steady-state motion is developed on the basis of small infinitesimal disturbances from steady-state motion, which will be utilized to demonstrate theoretically the existence of the steady-state motion above defined.

Finally, the differences between a simple pallet-and-star-wheel combination and the same mechanism incorporating a train of gears are noted and pointed out.

1. ま え が き

アンクルとガンギとからなる緩速機構の運動に関して実用上はなほ大切なことは緩速機構が定常運動をするという事実である。本論文において定常運動とは、アンクルおよびガンギの衝突、反発、およびすべり、またそれぞれの自由運動からなる同一の運動形式がガンギの回転中その各歯が進行するごとに繰返される運動と定義する。

まず、本論文においては定常運動に関与する各因子の間に一般的关系を確立し、次いで実際に遭遇する各種定常運動の形式を論ずる。また、定常運動の動的安定論を述べ、これによつて上に定義したとき定常運動の実在性を論証する。

最後に、歯車列のあるアンクル・ガンギ組合わせとその単独組合わせとの相違点について略説する。

2. 定常運動の次元解析

前節で定義した定常運動がはたして厳密に理論的な意

味で存在しうるか、また、もし存在するとすれば、いかなる形式の定常運動がありうるかという問題を離れて本節では初めに定常状態にある緩速機構を仮定し、この定常運動に関連する変数間の関係を次元解析によつて求めよう。

いま、ここに定常運動中にあるアンクルとガンギとからなる1系を考え、この系の性能に影響すると考えられる各種の変数間の関係を確立することが要求されたとする。この定常運動に関係ありと認められるすべての要素または変数を列挙すれば

ガンギの外径	D_s
アンクルを代表する寸法	D_p
ガンギとアンクルとの中心距離	D
ガンギの質量	M_s
アンクルの質量	M_p
ガンギに作用するトルク	T_s
ガンギ周期	τ
衝突係数	e^*
摩擦係数	μ

の9個の量があり、これらが代数的に結合されてこの系の定常運動を定義するはずである。上記9個の量のうち

* シチズン時計株式会社 正会員

明らかに独立なる量 D_s , M_s , および τ をとれば, 求める代表的関係を表わすに必要かつじゅうぶんなすべての π 関数, または無次元の変数は次のごとく書き表わしうる。

$$\begin{aligned}\pi_1 &= D_p D_s^{a_1} M_s^{b_1} \tau^{c_1}, \quad \pi_2 = D D_s^{a_2} M_s^{b_2} \tau^{c_2} \\ \pi_3 &= M_p D_s^{a_3} M_s^{b_3} \tau^{c_3}, \quad \pi_4 = T_s D_s^{a_4} M_s^{b_4} \tau^{c_4} \\ \pi_5 &= e^* D_s^{a_5} M_s^{b_5} \tau^{c_5}, \quad \pi_6 = \mu D_s^{a_6} M_s^{b_6} \tau^{c_6}\end{aligned}$$

ただし, 上式の a , b , および c は常数で後に定めることとする。しかるときは, π 定理¹⁾ によつて求める関係の一般式は, その形および性質のいかんにかかわらず, 次の形式で表わされる。

$$f(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6) = 0 \quad (1)$$

質量, 長さ, および時間の次元を M , L , および T とし, 上述の量のすべてについて, それらの次元を求めれば表 1 が得られる。この表と, 各 π 関数がすべて無次

表 1 π 関数の次元

	M	L	T
D_s	0	1	0
D_p	0	1	0
D	0	1	0
M_s	1	0	0
M_p	1	0	0
T_s	1	2	-2
τ	0	0	1
e^*	0	0	0
μ	0	0	0

元でなければならぬことから π 関数の指数を定めると

$$\begin{aligned}a_1 &= -1, \quad b_1 = 0, \quad c_1 = 0; \quad a_2 = -1, \quad b_2 = 0, \quad c_2 = 0; \\ a_3 &= 0, \quad b_3 = -1, \quad c_3 = 0; \quad a_4 = -2, \quad b_4 = -1, \quad c_4 = 2; \\ a_5 &= 0, \quad b_5 = 0, \quad c_5 = 0; \quad a_6 = 0, \quad b_6 = 0, \quad c_6 = 0\end{aligned}$$

したがつて, これらの値を π 関数に代入して

$$\begin{aligned}\pi_1 &= D_p/D_s, \quad \pi_2 = D/D_s, \quad \pi_3 = M_p/M_s, \\ \pi_4 &= T_s \tau^2/D_s^2 M_s, \quad \pi_5 = e^*, \quad \pi_6 = \mu\end{aligned}$$

さらに, これらの π 関数を式 (1) に代入すれば, 本節の初めにあげた 9 個の変数の関係を表わす一般式として

$$f\left(\frac{D_p}{D_s}, \frac{D}{D_s}, \frac{M_p}{M_s}, \frac{T_s \tau^2}{D_s^2 M_s}, e^*, \mu\right) = 0 \quad (2)$$

が求まり, あるいはこれを書き換えて

$$\frac{T_s \tau^2}{D_s^2 M_s} = f_1\left(\frac{D_p}{D_s}, \frac{D}{D_s}, \frac{M_p}{M_s}, e^*, \mu\right) \quad (3)$$

となる。上式中に含まれる π 関数は無次元であるから, 相互に相乗しても, またはおのおのの乗べきをとつてもさしつかえない。したがつて, 式 (3) はまた次のごとく書き表わすことができる。

$$\frac{T_s \tau^2}{D_s^2 M_s} = f_2\left(\frac{D_p}{D_s}, \frac{D}{D_s}, \frac{D_p^2 M_p}{D_s^2 M_s}, e^*, \mu\right) \quad (4)$$

上式右辺の $D_p^2 M_p$ および $D_s^2 M_s$ はそれぞれアングルおよびガンギの慣性モーメント I_p および I_s に比例すると考えられるから式 (4) は結局次のごとく変形される。

$$T_s = f_3\left(\frac{D_p}{D_s}, \frac{D}{D_s}, \frac{I_p}{I_s}, e^*, \mu\right) \frac{I_s}{\tau^2} \quad (5)$$

かくして, アングル・ガンギの特性を表わす最も一般的な関係式が求まり, これはいかなる形式の定常運動にも適用され, 起動力 T_s , ガンギ慣性モーメント I_s , およびガンギ周期 τ 間の関係を示す。ここで特に注意すべきことは, 式 (5) において f_3 で表わされる無次元の係数が, アングルおよびガンギの幾何学的特性, 衝突係数および摩擦係数のほかに, アングル・ガンギ慣性モーメント比を独立変数とする関数であることである。

式 (5) はまたアングル・ガンギ力学の相似法則を確立する。同式の与える無次元の係数は, そのうちに含まれる個々の幾何学特性や慣性モーメントに影響されることなく, それらの比によつて定まる。かくして, これらの比が同一である限り, 幾何学的に相似な, 同一衝突および摩擦係数からなる多数のアングル・ガンギ組合せについて, それらの比を構成する 3 個々の変数がいかに変化しても, 上述無次元の係数はその値を変じない。

ガンギ車 1 回転についてとつた平均角速度は

$$\omega_{sm} = \frac{2\pi}{\tau} \quad (6)$$

で与えられるが, これを式 (5) に代入して

$$T_s = \frac{1}{4\pi^2} f_3 I_s \omega_{sm}^2 \quad (7)$$

あるいは

$$T_s = \frac{C_p}{2} I_s \omega_{sm}^2 \quad (8)$$

ただし

$$C_p = \frac{1}{2\pi^2} f_3\left(\frac{D_p}{D_s}, \frac{D}{D_s}, \frac{I_p}{I_s}, e^*, \mu\right) \quad (9)$$

この式の C_p を, ガンギまたはガンギおよびその歯車列の慣性抵抗と区別するためにアングル抵抗係数と称する。

式 (8) との類似性についてここで想起されるのは, 流体中を高速で運動する物体の抵抗を表わす関係式である。たとえば, 空気中で運動する物体の空気抵抗は

$$D = \frac{C_D}{2} \rho S v^2 \quad (10)$$

で表わされ, 式中 ρ は空気密度, S は物体正面積, v は物体の速度を表わし, C_D は抵抗係数と呼ばれる無次元

の比例常数である。抵抗係数が物体の形状によつて異なることは、式(9)のアンクル抵抗係数と全く同ようであり、前者が Reynolds 数や Mach 数の関数であることに対応して後者は慣性モーメント比、衝突係数、および摩擦係数の関数となる。

式(6)および(8)から τ を求めると

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{C_p I_s}{2 T_s}} \quad (11)$$

のごとく、ガンギ周期は振動の周期に類似した形式で表わされる。

3. 定常運動の形式

前節で述べた流体の定常運動には層流と乱流との2種類の運動形式があり、Reynolds 数のある値を境として定常運動の形式を変ずることはよく知られた事実である。アンクル・ガンギの定常運動にも種々の形式がありそれらの形式の数は流体の定常運動の場合よりも多い。これらの定常運動の形式は幾何学的特性、衝突係数、および慣性モーメント比によつて影響され、それらの変数の変化によつて1形式から他の形式に移移する。

アンクル・ガンギ定常運動の形式は上述のごとく多種多様であるが、実用上それらは次の5種に大別分類することができる。

1. 多点衝突運動
2. 2点衝突定常運動
3. 繰返し衝突定常運動
4. 衝突すべり定常運動
5. 停止すべり定常運動

多点衝突定常運動は慣性モーメント比がはなはだ小さい場合に起こり、この形式の一種である4点衝突においては、ガンギ1歯の進行中衝突が順次第1、第4、第3および第2運動制限曲線³⁾上にただ1回だけ起こり、ガンギ歯の進行に伴つて同一形式の運動を繰返す。第4または第2運動制限曲線上のいずれかに衝突が起こらなければ3点衝突定常運動が得られる。

慣性モーメント比がやや大きくなると第4および第2運動制限曲線上の衝突は全然起こらなくなる。これが2点衝突定常運動で、過去の大部分の理論的研究においてアンクル・ガンギ唯一の定常運動と考えられたものである。

さらに慣性モーメント比が大きくなると、第1および第3運動制限曲線間で直接衝突反発を繰返す2点衝突の形式がとれなくなり、上の各制限曲線上で2度ないし数度の衝突を経た後に次の制限曲線に移り、その上で同ような運動を繰返す。これが繰返し衝突定常運動と定義さ

れるものである。

慣性モーメント比がいつそう大きくなれば、上の定常運動において繰返し衝突数が増加し、それぞれの制限曲線上の衝突反発は次第に衰えて、ついには曲線上のすべり運動とみなされるに至る。これを衝突すべり定常運動と名づける。この運動は上の繰返し衝突定常運動の極限の場合と考えればよい。

アンクルが極端に重い場合、すなわち慣性モーメント比が非常に大きい場合には最後の停止すべり定常運動が起きる。この運動においてアンクルとガンギとが衝突すると、アンクルがはなはだ重いから、ガンギは反発逆転し、アンクルはガンギ歯の間に深く食い込みついに後者によつて制動される。この制動位置は第1運動制限曲線とこれに先だつ第2運動制限曲線との交点に相当する。しかるのち、アンクルとガンギとは接触を保ちつつ後者に作用する駆動トルクによつてすべり運動をなし、次の制限曲線上の衝突まで加速される。この定常運動はもちろん、多点衝突を除くすべての定常運動においても、原則として衝突接触は第1および第3運動制限曲線上に限って起こることに注意しなければならない。

これまでは便宜上定常運動の形式はただ慣性モーメント比のみによつて支配されると述べたが、慣性モーメント比以外の要素、すなわち、幾何学的特性、摩擦係数、および衝突係数も同じく運動形式の決定に参与する。一般的に言つて、衝突係数が小さくなること、および摩擦係数の大となることは慣性モーメント比が大となることに相応する。

以上に述べた各定常運動の形式は理想の場合にとどまり、実際には幾何学的形状や材質の選定によりかなり不規則な運動形式が存在する。設計上の見地からはなるべく規則的な定常運動をするアンクル・ガンギ組合わせを選ばなければならない。

4. 定常運動の実在性

一定の駆動トルクのもとで起動されたアンクル・ガンギ機構がきわめて短時間でその定常運動に収れんすることは実験的に確認されている²⁾³⁾。このように、定常運動がアンクル・ガンギ運動の終速度の状態を表わすものとしての理論的研究もまた行なわれた。すなわち、神保泰雄助教³⁾はアンクル抵抗が間欠的でなく連続的にガンギに作用するとして微分方程式を用い、また藤井甚五郎氏⁴⁾はガンギ車が1歯ずつ断続進行すると考えて線型1階差分方程式を使用して、ともにガンギが漸近的にその終速度に到達することを論じている。

しかしながら、これらの理論および実験によれば定常

運動がアンクル・ガンギ運動の終速度の状態が存在するということはわかるがその定常運動が、本論文の冒頭で定義したとき形式のものであるか否かということ厳密に証明することはできない。

本論文で定義された定常運動の実在性は別途の方法で、すなわち、かく定義された定常運動の動的安定から論ずることができる。このためには、一つの定常運動に微小じょう乱が起きたと仮定して、このじょう乱がガンギの1歯ずつの進行につれて減衰増大するかによつてその定常運動の動的安定不安定を定める。動的安定な定常運動に対して本論文で定義した定常運動が実在することは容易に推論することができる。

4.1 運動の軌跡

図1に示す $\theta_s - \theta_p$ 面⁵⁾上の曲線 B は運動制限曲線の一部分を表わし、その曲線上の一点 P でアンクルおよび

図1 運動の軌跡

びガンギがそれぞれ Ω_p および Ω_s の角速度で衝突する。いま、衝突点 P の位置 θ_s , 角速度 Ω_p および Ω_s が与えられたとし、かつ

$$T_s = \frac{K}{2} \cdot I_s \Omega_s^2 \quad (12)$$

$$\Omega_p = A \Omega_s \quad (13)$$

によつて無次元の変数 K および A を定義すれば、点 P において3個の独立な変数 θ_s , K , および A が与えられたこととなる。ただし式(12)の T_s はガンギに作用する駆動トルク、 I_s はガンギの慣性モーメントとする。点 P において衝突反発した直後のアンクルおよびガンギの角速度をそれぞれ ω_p および ω_s とすれば、衝突方程式⁶⁾を利用して

$$\omega_s = \sigma_s \Omega_s + \sigma_p \Omega_p, \quad \omega_p = \pi_s \Omega_s + \pi_p \Omega_p$$

あるいは式(13)を代入して

$$\omega_s = (\sigma_s + A \sigma_p) \Omega_s, \quad \omega_p = (\pi_s + A \pi_p) \Omega_s \quad (14)$$

また上の2式から衝突直後の速度比 λ が次のごとく定義される。

$$\omega_p = \lambda \omega_s, \quad \lambda = \frac{\pi_s + A \pi_p}{\sigma_s + A \sigma_p} \quad (15)$$

アンクルおよびガンギの衝突後の運動方程式は

$$I_p \ddot{\varphi}_p = 0, \quad I_s \ddot{\varphi}_s = T_s \quad (16)$$

ただし上式の φ_p および φ_s はそれぞれアンクルおよびガンギが離脱した後のそれらの運動角、また I_p はアンクルの慣性モーメントを表わす。点 P を原点として、 $\theta_s - \theta_p$ 軸に平行な新座標 $\theta'_s - \theta'_p$ 軸を設け、反発の瞬間を基準として時刻 t を定めると式(16)の初期条件は $t=0$; $\varphi_p=0$, $\dot{\varphi}_p=\omega_p$; $\varphi_s=0$, $\dot{\varphi}_s=\omega_s$ となりこれらの初期条件のもとに式(16)を解けば

$$\varphi_p = \omega_p t, \quad \varphi_s = \frac{T_s}{2 I_s} t^2 + \omega_s t \quad (17)$$

これらの式から t を消去し、式(12), (14), および(15)を適用して整理すれば、運動の軌跡として次の関係式

$$\varphi_s = \frac{K \varphi_p^2}{4 (\pi_s + A \pi_p)^2} + \frac{\varphi_p}{\lambda} \quad (18)$$

が得られる。運動の軌跡が一般に放物線となることは上式によつて明らかである。

運動制限曲線 B を $\theta'_s - \theta'_p$ 座標に関して

$$\theta'_p = B(\theta'_s) \quad (19)$$

なる関数関係で表わせれば、これと運動の軌跡との交点 (θ'_s, θ'_p) は、式(18)において $\varphi_p = \theta'_p$, $\varphi_s = \theta'_s$ と置き、式(19)と連立に解いて求めることができる。この交点は制限曲線上の第2の衝突点 P' である。

点 P' における衝突直前のアンクルおよびガンギの角速度をそれぞれ Ω'_p および Ω'_s とし、式(12)および(13)に対応してこの点における無次元変数 K' および A' を

$$T_s = \frac{K'}{2} I_s (\Omega'_s)^2 \quad (20)$$

$$\Omega'_p = A' \Omega'_s \quad (21)$$

のごとく定める。点 PP' 間の運動エネルギー増加はこの間で作用する駆動トルクの仕事に等しいから

$$\frac{I_s}{2} (\Omega'^2_s - \omega_s^2) = T_s \theta'_s$$

この式に式(12), (14)および(20)の関係を入れれば

$$\frac{1}{K'} = \frac{1}{K} (\sigma_s + A \sigma_p)^2 + \theta'_s \quad (22)$$

また式(21)を書き直し、 $\Omega'_p = \omega_p$ なることを考慮すれば

$$\begin{aligned} (A')^2 &= \frac{(\Omega'_p)^2}{(\Omega'_s)^2} = \frac{(\pi_s + A \pi_p)^2 \Omega_s^2}{(\Omega'_s)^2} \\ &= (\pi_s + A \pi_p)^2 \frac{K'}{K} \end{aligned} \quad (23)$$

かくして第1の衝突点における θ_s , K , および A が与えられれば、上述のごとくして、第2の衝突点にお

る θ'_s , K' , および A' が定められる。同ようにして, 順次第3衝突点以降の位置および無次元変数はことごとく最初に与えられた θ_s , K , および A の関数として与えられる。

以上の議論はアンクル・ガンギ運動が定常運動の状態にあるなしにかかわらず適用される。定常運動の場合は後述することくすべての衝突点において θ_s , K , および A が一定の常数となり, また式 (14) の σ および π 係数も一定値となるから, 式 (18) から明らかなるごとく, 運動の軌跡の位置および形状は一定となる。すなわち, 運動の軌跡は定常運動の場合ガンギ駆動トルク, アンクルまたはガンギ角速度に関して独立である。

4.2 定常運動の動的安定

与えられた一つのアンクル・ガンギ機構の運動制限曲線を図2に示す。ガンギの歯数を n とすれば, 各ガン

図2 定常運動付近の微小じよう乱

ギ歯の基準座標軸は図示のごとく $\theta_s = 2\pi/n$ の間隔で配列される。この緩速機構が定常運動の状態にあれば, 本論文の定義によつて, 一つの運動制限曲線に関するすべてのガンギ歯についての対応する衝突点の各基準座標 $\theta_{s,i}$ は相等しく, またこれらの点における既述の無次元の変数はことごとく相等しい。それらを K_o および A_o で表わす。

いま, この定常運動に微小じよう乱が与えられた結果第 x 番目のガンギ歯に関する上記の3変数がそれぞれ $\theta_{s,x}$, K_x , および A_x になつたと仮定しよう。第 $(x+1)$ 番目のガンギ歯については4.1で述べたところによつて対応する3変数は次の3個の関数関係で表わすことができる。

$$\theta_{s,x+1} = F_1\left(\theta_{s,x}, \frac{1}{K_x}, A_x\right) \quad (24)$$

$$\frac{1}{K_{x+1}} = F_2\left(\theta_{s,x}, \frac{1}{K_x}, A_x\right) \quad (25)$$

$$A_{x+1} = F_3\left(\theta_{s,x}, \frac{1}{K_x}, A_x\right) \quad (26)$$

微小じよう乱の仮定から

$$\theta_{s,x} = \theta_{so} + \delta\theta_{s,x}, \quad \frac{1}{K_x} = \frac{1}{K_o} + \delta\left(\frac{1}{K}\right)_x, \quad A_x = A_o + \delta A_x \quad (27)$$

と置くことができるから, これらを式 (24) に代入し, Taylor の定理によつて展開して高次の微小量を無視すれば

$$\begin{aligned} \theta_{s,x+1} &= \theta_{so} + \delta\theta_{s,x+1} \\ &= F_1\left(\theta_{so}, \frac{1}{K_o}, A_o\right) + \frac{\partial F_1}{\partial \theta_{so}} \delta\theta_{s,x} \\ &\quad + \frac{\partial F_1}{\partial \left(\frac{1}{K}\right)_o} \delta\left(\frac{1}{K}\right)_x + \frac{\partial F_1}{\partial A_o} \delta A_x \end{aligned}$$

しかるに, 定常運動の定義から

$$\theta_{so} = F_1\left(\theta_{so}, \frac{1}{K_o}, A_o\right)$$

となるから上式は

$$\begin{aligned} \delta\theta_{s,x+1} &= \frac{\partial F_1}{\partial \theta_{so}} \delta\theta_{s,x} + \frac{\partial F_1}{\partial \left(\frac{1}{K}\right)_o} \delta\left(\frac{1}{K}\right)_x \\ &\quad + \frac{\partial F_1}{\partial A_o} \delta A_x \end{aligned} \quad (28)$$

全く同ようにして (25) および (26) の両式から

$$\begin{aligned} \delta\left(\frac{1}{K}\right)_{x+1} &= \frac{\partial F_2}{\partial \theta_{so}} \delta\theta_{s,x} + \frac{\partial F_2}{\partial \left(\frac{1}{K}\right)_o} \delta\left(\frac{1}{K}\right)_x \\ &\quad + \frac{\partial F_2}{\partial A_o} \delta A_x \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \delta A_{x+1} &= \frac{\partial F_3}{\partial \theta_{so}} \delta\theta_{s,x} + \frac{\partial F_3}{\partial \left(\frac{1}{K}\right)_o} \delta\left(\frac{1}{K}\right)_x \\ &\quad + \frac{\partial F_3}{\partial A_o} \delta A_x \end{aligned} \quad (30)$$

いま

$$\begin{aligned} [a_{ij}] &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \theta_{so}} & \frac{\partial F_1}{\partial \left(\frac{1}{K_o}\right)} & \frac{\partial F_1}{\partial A_o} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \theta_{so}} & \frac{\partial F_2}{\partial \left(\frac{1}{K_o}\right)} & \frac{\partial F_2}{\partial A_o} \\ \frac{\partial F_3}{\partial \theta_{so}} & \frac{\partial F_3}{\partial \left(\frac{1}{K_o}\right)} & \frac{\partial F_3}{\partial A_o} \end{pmatrix} (i, j=1, 2, 3) \end{aligned} \quad (31)$$

と置けば (28), (29), および (30) の3式は

$$\begin{pmatrix} \delta\theta_{s,x+1} \\ \delta\left(\frac{1}{K}\right)_{x+1} \\ \delta A_{x+1} \end{pmatrix} = [a_{ij}] \begin{pmatrix} \delta\theta_{s,x} \\ \delta\left(\frac{1}{K}\right)_x \\ \delta A_x \end{pmatrix} \quad (32)$$

のごとく表わせる。式 (32) は $\delta\theta_{s,x}$, $\delta(1/K)_x$, およ

び δA_x に関する連立線型差分方程式である。

上の連立差分方程式を解くために

$$\delta \theta_{s,x} = A_1 \nu^x, \quad \delta \left(\frac{1}{K} \right)_x = A_2 \nu^x, \quad \delta A_x = A_3 \nu^x \quad (33)$$

と置いて式 (32) に代入すれば

$$([a_{ij}] - \nu I) \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (34)$$

ただし、上式の I は単位マトリックスを表わす。式(34)が解を有するためには

$$|[a_{ij}] - \nu I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \nu & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \nu & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \nu \end{vmatrix} = 0 \quad (35)$$

上式の3根を ν_1, ν_2 , および ν_3 とし、そのうち最大の絶対値をもつ根を ν_1 とする。しかるときは式 (32) の一般解として

$$\begin{pmatrix} \delta \theta_{s,x} \\ \delta \left(\frac{1}{K} \right)_x \\ \delta A_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1^x \\ \nu_2^x \\ \nu_3^x \end{pmatrix} \quad (36)$$

が得られる。この式には9個の常数 A_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) を含むが、式 (34) の関係を利用して A_{ij} ($i=2, 3, j=1, 2, 3$) は A_{1j} ($j=1, 2, 3$) をもって表わすことができるから、任意に定めることのできる常数は3個となる。これらの3個の常数は式 (32) の3個の初期条件によって定まる。

仮定した定常運動が動的安定であるということは、与えられた微小じよう乱がガンギ車回転の進行につれて減衰し、当初の定常運動が回復されることを意味する。このためには式 (36) から明らかなるごとく

$$|\nu_1| < 1 \quad (37)$$

でなければならない。

起動されたアングル・ガンギ運動は既述のごとく実験的および理論的にその終速度の状態に漸近することが認められている。終速度の状態を定常運動と考えれば、前者に漸近する過程は上述の定常運動に微小じよう乱を与えた場合に相当する。したがって、式 (37) の条件が満足されるならば、この定常運動は、本論文冒頭で定義したごとく、ガンギの回転につれてガンギの各歯の進行について同一の運動形式を繰返すこととなる。

4.3 微係数の求め方

定常運動の動的安定を論ずるには、まず式 (31) の a_{ij} で表わされるすべての微係数を計算しなければならない。これらの微係数はもちろん式 (24) から (26) の各式から理論的に求めることはできるが、一般にその計算

は容易でない。実際的にそれらはむしろ次に述べる方法によつて計算するのが得策である。

いま、定常運動の形式が与えられたとして、この定常運動に任意の微小じよう乱を仮定し、ガンギ歯を適当数 N 個だけ進行させる。この間の $\delta \theta_{s,x}$, $\delta \left(\frac{1}{K} \right)_x$, および δA_x , は式 (24), (25), および (26) を利用して計算する。しかるときは、すべての微係数は最小自乗法によつて容易に求められる。計算の結果を示せば

$D =$

$$\begin{pmatrix} \Sigma (\delta \theta_{s,x})^2 & \Sigma \delta \theta_{s,x} \delta \left(\frac{1}{K} \right)_x & \Sigma \delta \theta_{s,x} \delta A_x \\ \Sigma \delta \theta_{s,x} \delta \left(\frac{1}{K} \right)_x & \Sigma \left\{ \delta \left(\frac{1}{K} \right)_x \right\}^2 & \Sigma \delta \left(\frac{1}{K} \right)_x \delta A_x \\ \Sigma \delta A_x \delta \theta_{s,x} & \Sigma \delta \left(\frac{1}{K} \right)_x \delta A_x & \Sigma (\delta A_x)^2 \end{pmatrix} \quad (38)$$

と置いて

$$D \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma \delta \theta_{s,x} \delta \theta_{s,x+1} \\ \Sigma \delta \left(\frac{1}{K} \right)_x \delta \theta_{s,x+1} \\ \Sigma \delta A_x \delta \theta_{s,x+1} \end{pmatrix} \quad (39)$$

$$D \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma \delta \theta_{s,x} \delta \left(\frac{1}{K} \right)_{x+1} \\ \Sigma \delta \left(\frac{1}{K} \right)_x \delta \left(\frac{1}{K} \right)_{x+1} \\ \Sigma \delta A_x \delta \left(\frac{1}{K} \right)_{x+1} \end{pmatrix} \quad (40)$$

および

$$D \begin{pmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma \delta \theta_{s,x} \delta A_{x+1} \\ \Sigma \delta \left(\frac{1}{K} \right)_x \delta A_{x+1} \\ \Sigma \delta A_x \delta A_{x+1} \end{pmatrix} \quad (41)$$

これら3組の連立方程式から a_{ij} のすべてが定まる。ただし、上式の Σ は $x=1$ から $x=N-1$ までの各変化量の総和を示すものとする。

5. 歯車列のある緩速機構

緩速装置としてのアングル・ガンギは通常数組の歯車およびピニオンからなる歯車列と組み合わせられ、歯車によるガンギ角速度の増速によつて緩速機構は一定空間内で最大の抵抗を得るごとく構成されている。

いま、歯車列の1番車に駆動モーメント T が作用し、歯車列を介してガンギを平均角速度 ω_{sm} で回転するものとしよう。この機構の全機械損失トルクを1番車について T_o とし、1番車とガンギとの間の総歯車比を R^* ($R^* > 1$), またガンギの等価慣性モーメントを I_{se} とす

れば、式(8)を参照して次の関係が成立することを知らる。

$$\frac{T - T_0}{R^*} = \frac{C_p}{2} I_{se} \omega_{sm}^2 \quad (42)$$

ここでは T_0 が実質的にガンギ角速度と無関係であると仮定しよう。また、等価慣性モーメント I_{se} とは、ガンギ単体の慣性モーメントにこれとかみ合う歯車列のそれを加えたものを意味し

$$I_{se} = I_s + \sum \frac{I_i}{(r_i^*)^2}, \quad r_i^* > 1 \quad (43)$$

で表わされる。上式中 $i=1, 2, \dots$ はそれぞれ歯車列の1番車, 2番車, ……を意味し, I_i はそれらの慣性モーメント, r_i^* はそれらとガンギ車との歯車比を表わす。ここで注意すべきことは、式(42)の C_p は式(8)のごとく I_p/I_s の関数ではなく I_p/I_{se} のそれであることである。

歯車列のある場合のガンギ周期は式(11)を参照して

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{R^* C_p I_{se}}{2(T - T_0)}} \quad (44)$$

となる。この式から明らかなごとく、ガンギ周期は駆動トルク T が非常に大きい場合にのみほぼ後者の2乗根に逆比例するが、 T が減少して T_0 に近接するに従って前者は後者の1/2より高位の乗べきに逆比例して変化する。このことは千代田光学精工の橋本徹氏によつて実験的に確かめられた⁷⁾。

駆動力が直接歯車列の1番車に作用するものとして、1番車の平均角速度を ω_1 とすれば、 $\omega_1 = \omega_{sm}/R^*$ 、これを式(42)に代入して

$$T - T_0 = \frac{C_p}{2} (R^*)^3 I_{se} \omega_1^2 \quad (45)$$

設計上の観点から重要なことは、与えられた正味駆動トルクにたいして1番車の角速度を制御することである。上式右辺の $C_p(R^*)^3/2$ は1番車についての抵抗係数とみなされ、歯車比が抵抗係数に3乗できき、速度制御に最も有利な役割を果たすことに注意しなければならない。

9. むすび

本論文においてはアングル・ガンギ機構の定常運動について一般的に論説した。これはいわば定常運動の総論である。次いで解明しなければならない問題は、既述の各定常運動の形式およびその性能特性の決定である。それには上述の一般論を適用するほか、各定常運動につきそれぞれの運動形式の特性に応じた方法を適宜使用する。これら定常運動の各論と称すべきものについては本論文の後報において逐次詳説する。(1962, 2月15日受付)

参考文献

- 1) W.F.Durand : Aerodynamic Theory, Vol. I, Div. A, Julius Springer, 1934.
- 2) H.Dittmar : Feingerätetechnik, 6 Jg., Heft. 2, Feb.(1957)
- 3) 神保泰雄：緩速度装置理論解析並びに実験，千代田光学研究報告，昭和29年12月
- 4) 藤井甚五郎：Anchor Brake の理論抄，千代田光学報告，昭和24年
- 5) 著者：精密機械，28巻，5号(1962) 280.
- 6) 著者：精密機械，28巻，7号(1962) 416.
- 7) 橋本徹：スロー・タイム・ギヤのアングル・ガンギ運動の考察，千代田光学実験報告書，昭和28年11月