 研 究

横衝撃を受けた一端植込みで半無限長の厚い剛塑性板

泉 四 郎*

A Thick Rigid-Plastic Plate of Semi-Infinite Length

Fixed at one End and Subjected to a Lateral Impact

Shirō IZUMI

The theoretical researches on the high energy-rase forming have so far been performed either by predetermining the mode and form of phenomenon or by restricting the amount of displacement small. In the present study, it is endeavored to deduce the phenomenon only mathematically from the condition that the test material is rigid-plastic and obeys the von Mises yield criterion and Lévy-Mises flow rule.

Both for the theoretical simplicity and for the favorable relation to the experiment which applies the impact of collision to a plate the lateral impact is assumed to be given by an inertial-impact caused by body-force in the theory. In this way, a wave equation is obtained for the basis of the problem.

From this the following results are deduced: the phenomenon is wave-propagative with the velocity $c = \sqrt{H'/3\rho}$ (H' : modulus of plasticity, ρ : material density), and the curvature at the plastic hinge is $S/c^2 T$ (S : the velocity of the plate after impact, T : the duration-time of impact).

The "thick plate" in the title means that it has such a thickness that the surface stress condition influences but little the inner part. On the contrary, if the plate is very thin, the boundary stress condition determines the inner one. In this cass, admitting some particular assumptions with respect to the stress-strain relation of the material, the equation of motion of the same form is obtained as that for the thick plate. The theory of thin plate is not stated here however.

1. 緒 言

金属板の横衝撃による塑性変形の過渡的機構を研究する目的で、鉛板を用い、これを特殊鋼製の落下体に両端固定し、鉄の衝撃受けの上に落下させて、その際発生する変形の過程を高速カメラやストレンゲージその他で解析しているが、これを数理的に解析する際にここにあがるような問題に当面した。

実験に用いる鉛板はスパン 120mm, 厚さ 1~1.5mm で薄いものであるが、その張力~ひずみ関係式にある適当な仮定をおくと、試料が極端に薄い場合とそれが極端に厚い場合とは、数学的立場からは全く同一問題に帰着することを発見した。しかしその全貌をここで明らかにすることは紙面の許された分量を超過するので、まず理

論的により純粹でそれだけ単純な厚い方の数理解析についてだけをここでは述べてあとの準備も兼ねたいと思う。自余の説明は実験の報告などとあわせて別の機会に述べるはずである。

なお、ここで一端植込みの半無限長として、実験での両端固定の条件をとらなかったのは、両端で発生した衝撃性塑性波が中央で出合うまでは、そのそれぞれを固定端から発生して半無限に伝ばする塑性波と同一視できると考えられるからであって、数理解析はこの方がずっと簡単である。そしてあとの結果から、その考えの正しいことが明らかになる。

2. 剛塑性体の運動方程式

最初の緒言で断わったとおり、著者の目的は、落下衝撃の際の塑性波現象を数理的に解析することであるから、衝撃による力は面力ではなく体力(質量力)の方を

* 正会員 熊本大学工学部

採用するのが適当である。それは慣性力が変形運動の源泉となるためである。

つぎに板の厚みとしては、内部の大部分が表面の影響を受けない程度に十分厚いものであればよいが、数学的にはこれを ∞ とするのが最も便利である。 ∞ の板厚など現実には存在しないがそれは一つの数学的な表現法である。

植込み端の幅と厚さの中央に原点 O をとり、板の長さ方向、幅方向、および厚さの方向にそれぞれ (x, y, z) の右手系の軸をとるが、板というからには幅は厚さに比べてずっと大きいのでこれもまた ∞ としなければならない。

すなわち問題は次のようになる。

試料は平面 $x=0$ (植込端) 上の全質点で固定されていて、 $x>0$ の半空間を占める。これに空間的に一様であるが時間的に $f(t)$ で変化する。 z 方向の衝撃的質量力が作用する。ただし、関数 f は $t<0$ では値が 0 で (すなわち衝撃開始を $t=0$ とする) その他は任意であってよい。材料は等方等質とするからその ρ 密度ももち論定数である。かくて試料のおおの質点に次のような密度をもった外力が作用することになる：

$$\rho X_i = (0, 0, \rho f(t)) \quad (1)$$

次に、このような力を受ける質点の運動を記述する記号や式を定める。

0 時点まで静止のある質点の座標が (x_0, y_0, z_0) で、それが時点 t において座標 (x, y, z) に移ったとするときの変位は：

$$u_i = (u, v, w) = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \quad (2)$$

その変位の増分は：

$$du_i = (du, dv, dw) = (\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}) dt \quad (2)'$$

さて y 方向には外力の成分もなく、その他の条件もすべて一様だから当然 v は終始 0 となり、今後は y 軸方向を除いた 2 次元問題として取扱うことが許される。

いま、表面の影響の及ばない内部だけについて考えると x 座標を同じうする質点群の力学的諸条件は均一なので (2)' の各成分の z 方向の偏微分はすべて 0 となる。

さて、変形運動に基づく体積増加速度は (2)' の記号を仮りて $\partial u_i / \partial x_i$ と表わされるが、剛塑性体の場合は変形による体積変化はないとされているので、上記のことから $\partial \dot{v} / \partial y$, $\partial \dot{w} / \partial z$ 共に 0 であることとあわせて

$$\frac{\partial}{\partial x} (du) = \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} dt = 0$$

それに、 $x=0$ (植込端) では $du=0$ であることから全般的に du したがって $\dot{u}$ は 0 となり、 u もまた 0 となる。

すなわち以上をまとめると、 $u, v; \dot{u}, \dot{v}$ はことごとく 0 となり w だけが残る、また現象は y と z の二方向には一様でその方向での w の偏微分は 0 となる。そして：

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \frac{\partial w}{\partial x} \dot{u} + \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad \text{および} \\ \ddot{w} &= \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \dot{u} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3)$$

となり、各質点の運動はもっぱら z 方向だけに起こる。そのような運動に伴う変形は単純せん断変形のみで、それ以外の変形は現われない。

その際現われる単純せん断ひずみの量は：

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \tan \phi = 2 \varepsilon_{xz} \quad (4)$$

としなければならない。これは、 x (時間 t に無関係な質点の長さ方向の位置を指定する座標) と、時間 t との 2 変数関数を表わす曲面 (図 3) の、 t 一定の截口の x 点における勾配を意味し、 ϕ はその勾配角である。

さて、Hill の塑性論¹⁾の結果を借用すると、剛塑性の試料の引張試験における応力 σ と全歪 (対数) ε との関係が、そのままねじり試験における相当応力 $\sqrt{3}\tau$ (τ はせん断応力) と相当全歪 $\tan \phi / \sqrt{3}$ ($\tan \phi$ はせん断ひずみ) との関係に等しい、ということがわかっている。そこで引張り試験における加工硬化を表わす関係式としてモデル：

$$\sigma = Y + H' \varepsilon \quad (5)$$

を採用する。ここに Y は引張降伏応力、 H' は定数の引張硬化率とする。von Mises の降伏条件による場合にはせん断降伏応力 k は：

$$k = Y / \sqrt{3} \quad (\text{定値}) \quad (6)$$

であるが、(5) の σ, ε にそれぞれ $\sqrt{3}\tau, \tan \phi / \sqrt{3}$ を代入した式の両辺を $\sqrt{3}$ で割って (6) を加味すれば：

$$\tau = k + \frac{H'}{3} \tan \phi \quad (7)$$

が得られる。現在の場合の τ は τ_{xz} でこれと (4) より：

$$\tau_{xz} = k + \frac{H'}{3} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (8)$$

さて、運動している応力系のつり合方程式には、外力密度 ρX_i と同時に慣性抵抗密度 $-\rho \ddot{u}_i$ を加味し：

$$\partial \sigma_{ji} / \partial x_j + \rho (X_i - \ddot{u}_i) = 0 \quad (9)$$

としなければならない²⁾。ここに $i=1, 2, 3$ のうち w のための $i=3$ の場合以外は不要である。そして前述のとおり y と z による偏微分の項は消失するので、(1), (3)および(8)を加味することによって、次の運動方程式を導くことができる：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= f(t) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここに： $c^2 = H/3\rho$

これは明らかに伝ば速度 c の波動現象を暗示する波動方程式にはかならない。すなわち、最も普通用いられる(5)のモデルだけの仮定で塑性波現象が Hill の理論から演えきされたわけである。

以上のことは、すべての力学現象が z 方向に一樣だと考えることの許される範囲だけで成立するものである。板厚を非常に大きいとしたのはそのためで、表面では最初しばらくの間 τ_{zx} したがって τ_{xz} も共に 0 であるのに、深奥では初めからそれらが k の値をとることが明らかになる(後述)。他方、板が薄いと上下両表面の影響が内部を全く支配するようになる。もし極端に薄い場合を考えると、内部も表面同様、せん断応力は終始 0 とするのが合理的で、すなわち試料は横方向に全く柔軟性を示し、長さ方向の引張り剛塑性抵抗だけを考えるだけでよいことになるが、実はこの仮定ともう一つの仮定(引張り硬化率がその降伏張力に等しいというもう一つの仮定)を許すと、(10)と全く同形の運動方程式に到達することは真に興味深い事実である。

だが、この問題にはこれ以上ここでは立入らないことにして、もっぱら (10) の解を求めその吟味だけに止める。

3. 運動方程式を解くこと

その解法にはいろいろあるが、中でも二次元ラプラス変換法³⁾ によるのが最も簡単である。そのとき外力には $f(t)$ の代わりに $u(x/c)f(t)$ を用いる必要がある。すなわち：

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = u(\xi)f(t) \quad \text{ここに } \xi = \frac{x}{c} \quad (11)$$

また、 $u(\xi)$ は単位階段関数である。

今ここで一般的な $f(t)$ の代わりに理想単位衝撃 $\delta(t)$ ⁴⁾ が作用したときの変位(方程式の解)を $w_0(\xi, t)$ とすると：

$$\begin{aligned} \square w_0(\xi, t) &= u(\xi)\delta(t) \quad \text{ここに} \\ \square &= (\partial/\partial t)^2 - (\partial/\partial \xi)^2 \end{aligned} \quad (12)$$

そして $\delta(t)$ は一般の関数 $f(t)$ に対し次の式を成立⁴⁾ させる：

図 2

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \delta(t-\tau) d\tau \quad (13)$$

$$(12) \text{より: } \square w_0(\xi, t-\tau) = u(\xi) \delta(t-\tau)$$

$$\text{そこで今: } w(\xi, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) w_0(\xi, t-\tau) d\tau \quad (14)$$

とおけば、この両辺に線形演算子 $\square$ を作用させると：

$$\begin{aligned} \square w(\xi, t) &= \square \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) w_0(\xi, t-\tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \{\square w_0(\xi, t-\tau)\} d\tau \\ &= u(\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = u(\xi) f(t) \end{aligned}$$

これは、(14)が(11)の解であることを示している。すなわち(12)の解を求めておけば、一般波形 $f(t)$ に対する解は(14)で求められることがわかった。

さて、(12)を解かねばならないので、ここに二次元ラプラス変換法、第一境界値問題³⁾, ⁴⁾ を応用しての結果だけを示すことにする図 2：

$$w_0(\xi, t) = \begin{cases} t & (0 < t < \xi) \\ \xi & (0 < \xi < t) \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \text{また:} \\ w_0(\xi, t-\tau) &= \begin{cases} \xi & (-\infty < \tau < t-\xi) \\ t-\tau & (t-\xi < \tau < +\infty) \end{cases} \\ &\quad \text{とくに } 0 < \tau < +\infty \end{aligned} \quad (16)$$

すなわち(14)に(16)を代入して(11)の解を求めると：

$$\begin{aligned} w(\xi, t) - \xi \int_{-\infty}^{t-\xi} f(\tau) d\tau + t \int_{t-\xi}^t f(\tau) d\tau - \\ \int_{t-\xi}^t \tau f(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (17)$$

4. 長方形衝撃波 $A(t)$ と理想衝撃波 $\delta(t)$

$f(t)$ は任意の波形でよいが、特に次のものを考える：

$$A(t) = \{u(t) - u(t-T)\} / T \quad (T \text{ は衝撃時間}) \quad (18)$$

u は単位階段関数であるから、 $\{ \}$ 中の値は t が $(0, T)$ の区間だけ 1、他は 0 である。したがって：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A(t) dt = T/T = 1 \quad (\text{単位衝撃値}) \quad (19)$$

すなわち $A(t)$ は単位長方形波衝撃関数と呼ばれ、単位理

想衝撃関数 $\delta(t)$ はその $\lim(T \rightarrow 0)$ の極限と考えられるので:

$$\delta(t) = \lim \Delta(t) = \lim \{u(t) - u(t-T)\} / T = u'(t) \quad (20)$$

とされる。 $\delta(t)$ はまた Dirac 関数とも呼ばれている。

衝撃値が S ならば $S \Delta(t)$ とすればよいが、これを(1)の $f(t)$ の代わりに用いたとすると、(17)から計算で得られたその解を $w_T(\xi, t)$ とすれば:

(a) $t \leq T$ の場合

$a_1)$ ($0 \leq \xi \leq t$) の部分

$$\begin{aligned} & \frac{S}{T} \left[\frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} (t - \xi)^2 \right] \\ &= \frac{S}{T} \left[\frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} \left(t - \frac{x}{c} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$a_2)$ ($t \leq \xi < \infty$) の部分

$$\frac{S}{T} \frac{t^2}{2}$$

(b) $t \geq T$ の場合

$b_1)$ ($0 \leq \xi \leq t - T$) の部分

$$S \xi = S(x/c) \quad (21)$$

$b_2)$ ($t - T \leq \xi \leq t$) の部分

$$\begin{aligned} & \frac{S}{T} \left[Tt - \frac{1}{2} T^2 - \frac{1}{2} (t - \xi)^2 \right] \\ &= \frac{S}{T} \left[Tt - \frac{1}{2} T^2 - \frac{1}{2} \left(t - \frac{x}{c} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$b_3)$ ($t \leq \xi < \infty$) の部分

$$(S/T) \left[Tt - \frac{1}{2} T^2 \right]$$

この結果で $T \rightarrow 0$ の極限をとると ($S=1$ としたとき) (15)に戻るの当然であるが、また $f(t) = \Delta(t)$ において二次元ラプラス変換法³⁾により直接(21)の結果を導くこともできる。(15)を三次元に図示した図2にならって、(21)を図示したものが次の図3である。

u, Δ 等の性質を利用すると(21)は次の一式にまとまる:

$$\begin{aligned} w_T(\xi, t) = & S \xi u(\xi) u(t - T - \xi) + \left\{ \frac{1}{2} S T + S(t - T) \right\} u \\ & (\xi - t + T) u(t - T) + \frac{1}{2} S t^2 u(\xi) \Delta(t) - \frac{1}{2} S \\ & (t - \xi)^2 u(\xi) \Delta(t - \xi) \end{aligned} \quad (21)$$

$S=1, T \rightarrow 0$ とすればこれから $w_0(\xi, t)$ が得られる:

$$\begin{aligned} w_0(\xi, t) = & \xi u(\xi) u(t - \xi) + t u(t) u(\xi - t) \\ & + \frac{1}{2} t^2 u(\xi) \delta(t) + \frac{1}{2} (t - \xi)^2 u(\xi) \delta(t - \xi) \end{aligned}$$

ところが Dirac 関数は次の性質をもつ⁴⁾:

$$\left. \begin{aligned} \delta(\theta) &= \delta(-\theta) \\ f(\theta) \delta(\theta) &= f(0) \delta(\theta) \\ \theta \delta(\theta) &= 0 \\ f(\theta) \delta(\theta - \varphi) &= f(\varphi) \delta(\theta - \varphi) \\ \theta \delta'(\theta) &= -\delta(\theta) \quad (' \text{は } d/d\theta) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} (a_1) w &= \frac{S}{T} \left\{ \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} \left(t - \frac{x}{c} \right)^2 \right\} \\ (a_2) w &= \frac{S}{T} \frac{1}{2} t^2 \\ (b_1) w &= S \left(\frac{x}{c} \right) \\ (b_2) w &= \frac{1}{2} S T + S(t - T) - \frac{S}{2T} \left(t - \frac{x}{c} \right)^2 \\ (b_3) w &= \frac{1}{2} S T + S(t - T) \end{aligned}$$

図 3

すなわち w_0 は次のように簡単化する:

$$\begin{aligned} w_0(\xi, t) = & \xi \cdot u(\xi) u(t - \xi) + \\ & t \cdot u(t) u(\xi - t) \end{aligned} \quad (23)$$

$$\therefore \square w_0(\xi, t) = -\delta(\xi) u(t) + u(\xi) \delta(t) \quad (24)$$

これは(19)の右辺に項 $-\delta(\xi) u(t)$ が加わっている。今:

$$\square w_1(\xi, t) = -\delta(\xi) u(t) \quad (25)$$

を(19)と同じ境界値について同じ方法で解くと:

$$w_1(\xi, t) = 0 \quad (25)'$$

となるので付加項は妨げにならないのみか、(24)や(23)を便宜上の表現形式とせず、さらに物理的意味を積極的にもたせることでそれを解決できる。このような考えに立つと、(24)の右辺の第一項の意味は次節の説明で判明するように、momentum rate の元になる植込端での反力として辻つまを合わせることができる。

これ以上の深入りは差し控えるが、(17)と(24)は共に(23)を(14)に代入して逆誘導できることを注意するに止める。

5. momentum 法則による検討

x の区間 $(0, ct)$ の両端に働らくせん断応力 $(\tau_{xz})_0$ と $(\tau_{xz})_{ct}$ との差は、その区間内の momentum rate の総計に等しいはずである。今(8)の $H'/3$ を ρc^2 とおき(21)を代入すること:

$$\tau_{xz} = k + \rho c^2 \frac{\partial w}{\partial x} = \begin{cases} S \rho c & (b_1) \\ -\frac{S \rho c}{T} \left(t - \frac{x}{c} \right) & (a_1), (b_2) \\ 0 & (a_2), (b_3) \end{cases} \quad (26)$$

(a) の場合

$$\begin{aligned} (\tau_{xz})_0 &= k + S\rho ct/T, \\ (\tau_{xz})_{ct} &= k \end{aligned} \quad (27)$$

今もし物体が自由だったとすると、
同じ区間 $(0, ct)$ のもつべき momentum

$$\begin{aligned} \rho ct \dot{w}_{a2} &= \rho ct (d/dt) \left(-\frac{1}{2} S t^2 / T \right) \\ &= S\rho c t^2 / T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{ct} \dot{w}_{a1} \rho dx &= \rho \int_0^{ct} \frac{\partial}{\partial t} S \left\{ \left(\frac{x}{c} \right) t \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{c} \right)^2 \right\} dx = \frac{1}{2} S\rho c \frac{t^2}{T} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{momentum rate} = (d/dt) \{ \rho ct$$

$$\dot{w}_{a2} - \int_0^{ct} \dot{w}_{a1} \rho dx \} = S\rho c t / T$$

これは明らかに (27) $(\tau_{xz})_0 - (\tau_{xz})_{ct}$ に
等しい。 (28)

(b) の場合

$$(\tau_{xz})_0 = k + S\rho c, \quad (\tau_{xz})_{ct} = k \quad (29)$$

他方 momentum rate の方は、前の場合と同様の考
え方で：

$$(d/dt) \left\{ \rho ct \dot{w}_{b3} - \int_c^{ct} (t-T) \dot{w}_{b2} \rho dx \right\} = S\rho c$$

この値は明らかに (29) の $(\tau_{xz})_0 - (\tau_{xz})_{ct}$ に等しい。

$$(30)$$

τ_{xz} と x との関係は図4のようになる。これはあとの
三次元図7の定時点断面図形 (a, b の両場合) に相当す
る。(c)は $T \rightarrow 0$ の理想衝撃の際の階段応力波を示す。

図 4

図 5

5. Energy 法則による検討

つぎにあげる図5は、前出図3の基底面 ($x \sim t$) 平面
にあたるもので、図3である時点での曲面の截口の曲線
は板のその時の形状を示し、ある x での截口の曲線は時
間的に変位の増加していく有様を示すものであった。

さて図5について説明すると (図3と比較されたい)
 t が0の時Aに在った質点は、 a_2 [等加速 S/T の領域]
をとおり、Bを経て a_1 [等速 $(S/T)(x/c)$] に入り、C
を経て b_2 [等減速 $-S/T$]、さらにDを経て b_1 [静止域]
に入る。これに対し、初め A' にあったものは、 $A' \rightarrow$
 a_2 [加速 S/T] $\rightarrow B' \rightarrow b_2$ [等速 S] $\rightarrow C' \rightarrow b_2$ [減速 $-S/T$]
 $\rightarrow D' \rightarrow b_1$ [静止] の経過をとる。しかし $x = cT$ の質点
は途中の等速域がなく、 a_2 [等加速 S/T] から時点 T に
おいて直接 b_2 [等減速 $-S/T$] に移り、さらに時点 $2T$
で b_1 に入って静止する。

図3ではその有様が明瞭である。すなわち x 一定の截

口の形が、等加速・等速・等減速・静止の各段階を、そ
れぞれ、上に凹の放物線・ t 軸に傾斜した直線・上に凸
の放物線・ t 軸への平行線で示している。 t 軸と截口曲
線の勾配が変位の増加する速度を意味する。

また t 一定の截口の x 勾配はその点におけるせん断歪
量で、その時間的増加の割合がひずみ速度となる。ひ
ずみ速度は a_1 と b_2 だけにしか現われない。以下にそ
れをまとめて表にしておく。

	$\dot{w}$	$\dot{w}$	ϵ_{xz}	$\dot{\epsilon}_{xz}$	τ_{xz}
a_1	$(S/T)\xi$	0	$(S/cT) \cdot (t-\xi)$	$\frac{1}{2}(S/cT)$	$k + (S\rho c/T)(t-\xi)$
a_2	$(S/T)t$	S/T	0	0	k
b_1	0	0	S/c	0	$k + S\rho c$
b_2	$S - (S/T) \cdot (t-\xi)$	$-S/T$	$(S/cT) \cdot (t-\xi)$	$\frac{1}{2}(S/cT)$	$k + (S\rho c/T) \cdot (t-\xi)$
b_3	0	0	0	0	k

図 6

図 7

図 6, 7 は表中の ε_{xz} と τ_{xz} を三次元図示するもの。

ある物体部分について、外力による仕事の時間空間的総量を A 、最終時点の運動 Energy の空間的総量を K 、そしてそれまでの塑性仕事量を W とするとき、Energy 法則は次の関係を要請する：

$$A - K = W = \int \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dV \quad (31)$$

W は、右辺の式をひずみの発生過程につき積分し、さらに考える物体部分全体にわたるその総計をとったものである。それには上記表と図 6, 7 を参照して幾何学的体積計算によるのがよい。ただし塑性波の未到達部分を含む大きな物体の部分を考えたり、逆に全部が変形し終って静止状態に入った小さな部分だけを考えたりすることは、多少冗長に過ぎるので、前者の a_2, b_3 と後者の b_1 の各場合は考慮から外すことにする。すなわち計算の結果は：

$$\left. \begin{aligned} Wa_1 &= k \frac{S}{2T} \left\{ t^2 - \left(t - \frac{x}{c} \right)^2 \right\} \\ &\quad + \frac{S^2 \rho c}{6T^2} \left\{ t^3 - \left(t - \frac{x}{c} \right)^3 \right\} \\ Wb_2 &= kS \left\{ \left(t - \frac{T}{2} \right) - \frac{1}{2T} \left(t - \frac{x}{c} \right)^2 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

$$\left. \begin{aligned} &+ \frac{S^2 \rho c}{2} \left\{ \left(t - \frac{2T}{3} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3T^2} \left(t - \frac{x}{c} \right)^2 \right\} \end{aligned} \right\}$$

ただし今の場合、初めに x 軸に平行な母線に囲まれ単位断面積の柱体からとった $(0, x)$ 部分の体積を考える。

つぎに仕事 A は、運動端 x の右から働らくせん断力による A_1 と、 $(0, t)$ 時間の $S\rho A(t)$ による A_2 との合計で：

(a_1) の場合

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \int_0^w \tau_{xz} dw = k \frac{S}{T} \left(\frac{x}{c} \right) \left(t - \frac{1}{2} \frac{x}{c} \right) \\ &\quad + \frac{S^2 \rho c}{2T^2} \left(\frac{x}{c} \right) \left(t - \frac{x}{c} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (33) \leftarrow$$

$$A_2 = \int_0^x w \frac{S\rho}{S} dx = \frac{S^2 \rho c}{T^2} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{x}{c} \right)^2 t - \frac{1}{6} \left(\frac{x}{c} \right)^3 \right\}$$

$$K = \int_0^x \frac{1}{2} \dot{w}^2 \rho dx = (S^2 \rho c / 6T^2) (x/c)^3 \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \therefore A - K &= k \frac{S}{2T} \left\{ t^2 - \left(t - \frac{x}{c} \right)^2 \right\} \\ &\quad + \frac{S^2 \rho c}{6T^2} \left\{ t^3 - \left(t - \frac{x}{c} \right)^3 \right\} = W \end{aligned} \quad (35)$$

(b_2) の場合

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \int_0^w \tau_{xz} dw = kS \left\{ \left(t - \frac{1}{2T} \right) - \frac{1}{2T} \left(t - \frac{x}{c} \right)^2 \right\} \\ &\quad + S^2 \rho c \left\{ \frac{1}{2T} \left(t - \frac{x}{c} \right)^2 - \frac{1}{3T^2} \left(t - \frac{x}{c} \right)^3 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

$$A_2 = \int_0^x w \frac{S\rho}{T} dx = + \frac{S^2 \rho c}{2} \left(\frac{x}{c} - \frac{T}{3} \right)$$

$$\begin{aligned} K &= \int_0^x \frac{1}{2} \dot{w}^2 \rho dx = \frac{S^2 \rho c}{2} \left\{ \frac{T}{3} - \left(t - \frac{x}{c} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{T} \left(t - \frac{x}{c} \right)^2 - \frac{1}{3T^2} \left(t - \frac{x}{c} \right)^3 \right\} \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} A - K &= kS \left\{ \left(t - \frac{T}{2} \right) - \frac{1}{2T} \left(t - \frac{x}{c} \right)^2 \right\} \\ &\quad + \frac{S^2 \rho c}{2} \left\{ \left(t - \frac{2T}{3} \right) - \frac{1}{3T^2} \left(t - \frac{x}{c} \right)^3 \right\} = W \end{aligned} \quad (38)$$

Energy 法則はかくて完璧に守られていることがわかった。これで変形機構を詳細には握ることができた。

7. 結 言

1. 高エネルギー速度成形関係の理論的研究についてはすでに数多くの業績⁵⁾がある。この問題の本質は弾性振動論の塑性の領域への延長と考えられるが、弾性範囲とそれを越えた塑性域とは、現象が前者では可逆的であるのに反して後者ではそれが不可逆であるために、問題が著しく複雑困難さを加えてくる。この困難を避けるためにこれまでの研究者達は、変形の形状、または現象の波

動性の予定,あるいはまた変形量を微小な限界内に制限する等の方法をとった。著者の場合は,云わばその逆の行き方を選んだ。変形量を制限することは問題そのものを制限することを意味し,また変形の形状や波動性はむしろ理論の結果として演えきすべき性質のものと考え,剛塑性の試料とその従うべき運動方程式と適当な初期ならびに境界条件からそれらを導くように努めた。極端に厚い板とか薄い板を対象に選んだのは,上述の困難性を避けるための手段である。また質量力性衝撃は実験と理論の双方に好都合な選択である。

ここで取扱ったのは厚い板についての理論であつたけれども,その中にも書かれてあるように,薄い板の理論も,ある仮定(既述:引張り硬化率が降伏張力に等しいという仮定)を許すと前者と全く同一の数理に帰着することがわかった。このことについては回を改めて述べようと思う。

2. 作用力の継続時間 T である長方形波衝撃の場合の解は図1と図3で示されているが,そこでは波長 cT の塑性波が速さ c で板の長さの方向に走るのだから,ある質点を考えるとそこで塑性変形が行なわれている時間は T ということになる。ただしここで c は $\sqrt{H'/3\rho}$ で, H' は引張り硬化率(定数), ρ は試料の密度とする。

つぎにある定時点で塑性変形が進行中の質点列,すなわちその時の波帯内の(最初に長さ方向に直線上にあった)質点列は,(今では彎曲して)波頭にその頂点を置く放物線をなし,その頂点(塑性ヒンジ)の曲率は

S/c^2T である。ここに S は単位質量当りの衝撃値($x \geq cT$ の質点が獲得する最大速度で落下速度により定まる), c は試料の材質で定まる波速であるから, T を制御する方法がわかれば,理論を実験によって評価する道も開ける訳である。その T の制御法も苦心の末,最近ある程度可能になった。すなわち実験はこれからである。

3. 本研究を最初から指導していただいた名古屋大学工学部の井町勇教授と,時に当って適切な助言を賜った熊本大学工学部の清田堅吉教授と,本稿作成に当って好意溢る親身なご批判やご指導を賜った東京大学工学部の前田禎三教授ならびに学会編集委員会の方々に対する衷心よりの謝意をここに表わしたいと思う。

(1967, 2月14日受付)

文 献

- 1) R. Hill: The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford, (1950) 25-47.
- 2) S. Timoshenko & J. N. Goodier: Theory of Elasticity, 2nd edition, Asian students, edition, Kōgakusha, (1951) 28-34, 452.
- 3) D. Voelker & G. Doetsch: Die Zweidimensionale Laplace-Transformation, (邦訳) 法政大学出版局, P. 61.
- 4) P. A. M. Dirac: The Principles of Quantum Mechanics, Oxford, (1947) (邦訳) 岩波書店, P. 78.
- 5) 清田堅吉: 高速塑性変形理論の現状(はりおよび円に横荷重が作用する場合), 日本機械学会誌, 68巻, 559号 (1965) 1114.

情 報

機械工業の技術水準調査

科学技術庁はこのほど機械工業の技術水準に関する調査の結果をまとめ発表した。

この調査は機械工業分野の技術水準を総合的にとらえ将来の技術振興の方向と方策を検討するために行なったものである。

調査は第一部を日本産業材料研究所, 第二部を日本科学技術振興財団にそれぞれ委託した。

第一部では機械工業の技術水準を物的生産力水準と考え,これを原材料,設備機械,労働力および量産規模と関連してとらえている。

また第二部では機械工業技術の先端形態の一つと考えられる大形機械の技術水準を検討しており,わが国の技術水準は先進国に立ち遅れておらず,とくに電子顕微鏡,高圧の分野では自力開発で先進国に先行していると

分析している。

大要つぎのとおり

第一部=技術水準を一応,物的生産への水準と考え,これを投入単位,つまり単位製品を製造するために必要な原材料の量で測定した。この単位の低いものを生産技術の質的改善が行なわれた——とみなしたか,これによると昭和30年にたいする40年の材料原単位は自動車55%,一般機械62%,電気機械34%にそれぞれ低下,とくに電気機械工業は真空管からトランジスタ,プリント配線へと技術の進歩がはげしく,低下率は大きい。

これを国際的にみるために自動車工業を対象に海外と比較すると自動車工業が使った鉄鋼の原単位ではイギリス,西ドイツともに年産100万台から200万台の過程で急減し,その後横ばいだが,わが国でも年産73万台の1960

(22頁へつづく)