研 究

トルク比一定の歯車に関する研究 (第2報)*

— 歯 車 論 —

酒 井 高 男** 森 田 信 義***

Study on Gears of Constant Torque Ratio (2nd Report)

— Design of Gears —

Takao SAKAI, Nobuyoshi MORITA

A pair of gears of constant torque ratio does not have constant velocity ratio, while a pair of teeth are in mesh. So it becomes important to get a pair of gears which have smooth succession from each pair of teeth to the next. The aim of this paper is to get the condition how to achieve such action.

The condition is given by a relation between the gear ratio and the torque ratio, and it also depends on the position of the points of engage-in and engage-out, where the contact ratio is 1.0. And it is shown that the minimum value of the obliquity angle has a limitation, when the number of teeth and the frictional coefficient are given.

1. 緒 言

前報では、トルク比一定の歯車の歯形を理論的に導き出し、実験によってそれを確かめたり、しかしながら、歯車は1つの歯面のみでは成り立たず、多くの歯の集合によって成立する。特にトルク比一定の歯車の設計に際しては、次のような特異性に遭遇する。

1. 瞬間中心P（これをピッチ点と名づける）はトルク点Q（歯面に作用する合力が歯車の中心線を切る点）より常に駆動歯車側に存在する。
2. かみあいの最中に、ピッチ点Pが刻々とその位置を変えるため、角速度がつぎつぎと変化する。

これらの性質は、正確にかみあい、かつなめらかに回転するという、歯車の本来の目的と対立するものである。

そこで筆者らは、第1の点に関しては（前報で定義された）、駆動歯車のトルク円半径を、被動歯車のトルク円半径に増速比を乗じたものより大きくとり、第2の点に関しては、かみあい率およびかみあいの始めと終りの位置を指定することによって、なめらかなかみあいを確保するという方針をえらんだ。

この研究が、時計用歯車の設計に対し、寄与できれば幸いである。

2. 接触点の軌跡が直線である場合

2.1 歯車をなめらかに回転させるための条件

歯車をなめらかに回転させるためには、かみあい率が1.0の場合には、かみあいの始点と終点の角速度が同じであるということが必要であり、かみあい率が1.0以上2.0以下の場合には、一歯かみあいの終点と二歯かみあいの始点、二歯かみあいの終点と一歯かみあいの始点での、それぞれの角速度が同じであるということが必要である。そうでないと角速度はなめらかに変化せず、衝撃、振動の原因ともなり、トルク伝達にも悪影響を及ぼすからである。

いま、時計用歯車の通例として、かみあい率を1.0とする。かみあいの始点と終点の角速度を同じにするには、それぞれの点での歯面の法線が歯車の中心線を切る点Pの位置が、同じでなければならない。このことは、定点Qよりそれぞれの点までの距離を近寄側*i*、遠退側*j*の添字をつけて、 r_i, r_j とすれば、

$$r_i = r_j \quad (1)$$

ということである。

図1において、 $\theta = \theta_0$ で与えられる直線を $l-l$ とする。また歯車の中心 O_1 および O_2 より $l-l$ に平行線 l_1-l_1, l_2-l_2 を引く。任意の接触点Cにおける法線力 N の方向は $l-l$ に平行になるので、Cの位置を接線極座標 (p, σ) で表わした場合には、 p は直線 l_1-l_1, l_2-l_2 上で測られることになる。ところが σ は歯車に固定された基線と l_1-l_1 または l_2-l_2 との間の角をいうの

*原稿受付 昭和42年9月1日、東北支部講演会(昭和42年3月11日)にてその一部を発表。

**正 会 員 東北大学工学部

***学生会員 東北大学工学部大学院(仙台市荒巻字青葉)

図1 σ と λ の関係

であるから、歯車の回転角を λ とすれば、つぎのような関係がある。

$$|\sigma| = |\lambda| \quad (2)$$

また図1において、たとえば駆動歯車側については、

$$\begin{aligned} p_i &= p_0 - r_i \cos \gamma \\ p_j &= p_0 + r_j \cos \gamma \end{aligned} \quad (3)$$

ただし p_0 は第1報¹⁾式(16)に示されているものである。以下順次第1報の式をそのまま用いるものとする。式(3)に式(1)代入すれば、

$$-(p_i - p_0) = p_j - p_0 \quad (4)$$

式(4)を第1報の式(17)に代入すれば、

$$\begin{aligned} -(\mu p_0 + b_i) + (\mu p_0 + b_i) e^{\mu \sigma_i} \\ = (\mu p_0 - b_j) - (\mu p_0 - b_j) e^{-\mu \sigma_j} \end{aligned} \quad (5)$$

ところが第1報の式(14), (16)より、

$$(\mu p_0 + b_i) = -(\mu p_0 - b_j) \quad (6)$$

式(6)を式(5)に代入すれば、

$$\sigma_i = -\sigma_j \quad (7)$$

したがって式(7), (2)より、かみあいの始点と終点で角速度を同じにするためには、近寄側と遠退側で回転角の絶対値を同じにすればよい。

2.2 傾斜角 α の限界

図1において、 $O_1 O_2$ より直線 $l-l$ に下した垂線の足をそれぞれ I_1, I_2 とする。また $l-l$ と γ だけ傾いている直線に下した垂線の足をそれぞれ H_1, H_2 とする。折線 $H_1 Q H_2$ は接触点の軌跡を表わし、 H_1, H_2 は軌跡の使える範囲の限界点を表わしている。もし $\gamma = 0$ であれば、その限界点は I_1, I_2 となる。図からただちに、 γ が増加するにしたがい、被動歯車の遠退側での歯形の有効部分が短くなるということがわかる。

いま被動歯車の一歯が受持つべき回転角を、前節を考

慮して $2\lambda_2'$ とし、その歯数を z_2 とすれば、被動歯車の遠退側が受持つべき回転角は、

$$|\lambda_2'| = |\sigma_2'| = \pi/z_2 \quad (8)$$

ただし σ_2' は λ_2' の回転を受持つために必要な、遠退側の歯形の限界点を表わすものとする。

一般に傾斜角 α が増せば、接触点の軌跡の使える範囲は長くなる。そこで式(8)で与えられた λ_2' を被動歯車の遠退側が受持つことができるように、傾斜角 α を定めなければならない。

第1報の式(8)を σ_2 で2回微分したものに1回微分したものを代入すれば、

$$d^2 p_2 / d\sigma_2^2 = -\mu(b_j - \mu p_2) \quad (9)$$

ところで歯形曲線の曲率半径は、接線極座標表示で、

$$\rho = p + d^2 p / d\sigma^2 \quad (10)$$

また有効歯形曲線の限界は、その点での歯形の曲率半径が0になるところである。すなわち、

$$p_2 + d^2 p_2 / d\sigma_2^2 = 0 \quad (11)$$

式(9)を式(11)に代入すれば、

$$p_2 = \mu b_j / (1 + \mu^2) \quad (12)$$

式(12)および第1報の式(8)より p_2 を消去して整理すれば、

$$b_j \left(\frac{\mu}{1 + \mu^2} - \frac{1}{\mu} + \frac{e^{-\mu \sigma_2}}{\mu} \right) = p_0 e^{-\mu \sigma_2} \quad (13)$$

ここで定数 b_j, p_0 を第1報の式(19)(20)を用いて書き直せば、

$$(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) \left(\frac{\mu}{1 + \mu^2} - \frac{1}{\mu} + \frac{e^{-\mu \sigma_2}}{\mu} \right) = e^{-\mu \sigma_2} \sin \alpha \quad (14)$$

式(14)を α について解けば、

$$\alpha = \tan^{-1} \left[\{ (1 + \mu^2) e^{-\mu \sigma_2} - 1 \} / \mu \right] \quad (15)$$

式(15)の σ_2 に式(8)の σ_2' を代入すれば、傾斜角 α の限界値が求まる。ただしこの際に、被動歯車の遠退側という条件から、 σ_2' は負の値を与えなければならない。

図2 傾斜角 α の限界値

図2は被動歯車の歯数 z_2 、摩擦係数 μ と、傾斜角 α の限界値との関係を示したものである。傾斜角は、図で示されている限界値より大きくなければならないことは明らかである。そうでないと、被動歯車の遠退側の歯は、式(8)で与えられる回転角を受持たないことになるからである。図より、被動歯車の歯数 $z_2=6, 8, 10$ に対して、 α をそれぞれ $38^\circ, 32^\circ, 28^\circ$ とすれば十分である。

2.3 増速比と駆動歯車のトルク円半径との関係

歯車を正確にかみあわせるためには、駆動歯車のトルク円半径は、被動歯車のトルク円半径に増速比を乗じたものより大きくとらなければならない。

いま増速比を ε とし、 σ_2' に対応する駆動歯車の角を σ_1' とすれば、

$$\sigma_1' = -(1/\varepsilon) \sigma_2' \quad (16)$$

σ_1' に対応する p の値を p_1' とすれば、第1報の式(17)より、

$$\sigma_1' = \frac{1}{\pm \mu} \log \left| \frac{\mu p_1' \pm b_{1j}}{\mu p_0 \pm b_{1j}} \right| \quad (17)$$

式(17)に式(7)を代入すれば、

$$\left| \frac{\mu p_1' + b_{1i}}{\mu p_0 + b_{1i}} \right| = \left| \frac{\mu p_1' - b_{1j}}{\mu p_0 - b_{1j}} \right| \quad (18)$$

したがって式(18)より近寄側か遠退側のどちらか一方だけを考えればよいことになる。近寄側について考えると、式(17)より、

$$e^{\mu \sigma_1'} = \frac{\mu p_1' + b_{1i}}{\mu p_0 + b_{1i}} \quad (19)$$

また幾何学的関係から、

$$(L_1 + L_2) \cos \theta_0 = p_1' + p_2' \quad (20)$$

ただし p_2' は σ_2' に対応する p の値である。式(19)に第1報の式(14)、(16)、第2報の式(20)を代入し、それを L_1 について解けば、

$$L_1 = \frac{\mu (L_2 \cos \theta_0 - p_2')}{\sin \theta_0 (e^{\mu \sigma_1'} - 1)} \quad (21)$$

式(21)は増速比と駆動歯車のトルク円半径との関係を示す式である。

前節で定めた α の限界を考慮した上で増速比を決めれば、式(21)より L_1 が求まり、この L_1 を用いて第1報4章と同じ方法で歯形を求めればよい。このようにして求めた歯形を持つ歯車は、なめらかに、かつ正確にかみあう歯車である。

なお、この歯車の回転角度伝達誤差 δ は、次式で与えられる。

$$\delta = \lambda_2 - \varepsilon \lambda_1 \quad (22)$$

ただし λ_2 は被動歯車、 λ_1 は駆動歯車の回転角である。

2.4 計算例

摩擦係数を $\mu=0.174$ 、被動歯車の歯数を $z_2=6, 8, 10$

傾斜角をそれぞれの歯数に対応して、 $\alpha=38^\circ, 32^\circ, 28^\circ$ $\theta_0=90^\circ-\alpha$ 、被動歯車のトルク円半径を $L_2=1/\varepsilon$ とする。このとき式(8)より σ_2' が、式(16)より σ_1' が決まり、これらを第1報の式(19)に代入すれば p_2' が定まる。以上の求めた $\mu, L_2, \theta_0, p_2', \sigma_1'$ を式(21)に代入すれば、駆動歯車のトルク円半径 L_1 が定まる。

図3は、計算して求めた L_1 と ε の関係を図示したものである。

図4は、 $z_2=8$ の場合について、式(22)より回転角度伝達誤差を計算し、プロットしたものである。図より、

図3 駆動歯車のトルク円半径と増速比との関係

$z_2=8, \mu=0.174$
図4 回転角度伝達誤差

$\mu=0.174, z_1=64, z_2=8, L_1=1.0394, L_2=0.125$

図5 接触点の軌跡が直線である場合の歯車

表 1 接触点の軌跡が直線である場合の回転角度伝達誤差および歯形
 $z_2=8, \mu=0.174$

ε	λ_2	λ_1	δ	x_{1i}	y_{1i}	x_{1j}	y_{1j}	x_{2i}	y_{2i}	x_{2j}	y_{2j}
2	0.0	0.	0.	0.	1.0527	0.	1.0527	0.	0.5	0.	0.5
	5.0	2.401	0.197	0.0149	1.0278	-0.0097	1.0675	-0.0177	0.5257	0.0074	0.4870
	10.0	4.858	0.284	0.0283	1.0030	-0.0212	1.0836	-0.0397	0.5524	0.0123	0.4764
	15.0	7.370	0.258	0.0401	0.9787	-0.0347	1.1008	-0.0664	0.5795	0.0150	0.4687
	20.0	9.942	0.116	0.0503	0.9550	-0.0505	1.1192	-0.0980	0.6064	0.0162	0.4641
	22.5	11.250	0.	0.0548	0.9434	-0.0593	1.1287	-0.1157	0.6197	0.0164	0.4631
	25.0	12.573	-0.146	0.0590	0.9320	-0.0688	1.1386	-0.1347	0.6326	0.0164	0.4629
4	0.0	0.	0.	0.	1.0438	0.	1.0438	0.	0.25	0.	0.25
	5.0	0.208	0.164	0.0077	1.0313	-0.0046	1.0511	-0.0089	0.2629	0.0037	0.2435
	10.0	2.440	0.237	0.0150	1.0187	-0.0098	1.0587	-0.0199	0.2762	0.0061	0.2382
	15.0	3.696	0.215	0.0220	1.0060	-0.0154	1.0668	-0.0332	0.2898	0.0075	0.2343
	20.0	4.975	0.096	0.0286	0.9934	-0.0216	1.0752	-0.0490	0.3032	0.0081	0.2320
	22.5	5.625	0.	0.0318	0.9871	-0.0249	1.0795	-0.0578	0.3098	0.0081	0.2315
	25.0	6.280	-0.121	0.0349	0.9808	-0.0284	1.0840	-0.0673	0.3163	0.0082	0.2315
8	0.0	0.	0.	0.	1.0394	0.	1.0394	0.	0.125	0.	0.125
	5.0	0.606	0.148	0.0039	1.0331	-0.0023	1.0430	-0.0044	0.1314	0.0019	0.1217
	10.0	1.223	0.213	0.0077	1.0267	-0.0047	1.0467	-0.0099	0.1381	0.0031	0.1191
	15.0	1.850	0.139	0.0115	1.0203	-0.0072	1.0506	-0.0166	0.1449	0.0038	0.1172
	20.0	2.489	0.086	0.0152	1.0138	-0.0099	1.0545	-0.0250	0.1516	0.0041	0.1160
	22.5	2.812	0.	0.0170	1.0106	-0.0113	1.0567	-0.0289	0.1549	0.0041	0.1158
	25.0	3.138	-0.109	0.0189	1.0073	-0.0128	1.0586	-0.0337	0.1581	0.0041	0.1157

図 6 被動歯車の歯形がインボリュートである場合の接触点の軌跡

回転角度伝達誤差曲線はなめらかに変化し、かつ $|\lambda_2| = \pi/8$ のところで δ は 0 になっている。すなわちこの歯車はなめらかに回転し、かつ正確にかみあうということがわかる。

表 1 は、 $z_2=8$ の場合の L_1 および L_2 を用いて、第 1 報と同様な方法で歯形を計算したものである。表中添字 1, 2 はそれぞれ駆動歯車、被動歯車を、添字 i, j はそれぞれ近寄側、遠退側を表わす。

図 5 は、表 1 中の $\varepsilon=8$ の場合についてその歯形を描き、歯車の形に作ったものである。図中の黒点はかみあいの始点、終点、およびピッチ点を示す。なお駆動歯車および被動歯車の歯厚は、時計用歯車のそれに準じて、

図 7 回転角 λ と媒介変数 θ_0 との関係

それぞれトルク円上で、いわゆるピッチの $1/3, 1/2$ に選んだ。

3. 被動歯車の歯形がインボリュートである場合

3.1 歯車をなめらかに回転させるための条件

図 6 は第 1 報の式(22)より接触点の軌跡を求め、図示したものである。図より、近寄側の接触点 C_i と遠退側の接触点 C_j において、角速度が同じになったとする。 C_i および C_j を極とし、直線 $C_i Q, C_j Q$ より γ だけ駆

図8 被動歯車の歯数 z_2 と媒介変数の限界値 θ_0' との関係

動歯車側に傾けた直線が歯車の中心線を切る点が、ピッチ点 P である。△PQC_i, △PQC_j において、正弦公式を用いると、

$$\frac{r_i \sin \gamma}{\sin(\theta_i + \gamma)} = \frac{r_j \sin \gamma}{\sin(\theta_j - \gamma)} \quad (22)$$

式(22)に第1報の式(20)を代入すれば、

$$(\theta_i + \gamma) = (\theta_j - \gamma) = \theta_0 \quad (24)$$

すなわち、かみあいの始点と終点で角速度を同じにするには、近寄側と遠退側で媒介変数 θ_0 を同じ値にすればよい。

回転角 γ と媒介変数 θ_0 の関係を求めるには、図7を参照して、

$$\lambda_1 = \alpha + \theta_0 + \sigma_1 - \pi/2 \quad (25)$$

$$\lambda_2 = \pi/2 - \alpha - \theta_0 - \sigma_2 \quad (26)$$

$$p_2 = (L_1 + L_2) \cos \theta_0 - p_1 \quad (27)$$

また第1報の式(21)より、

$$\sigma_2 = (p_2 - L_2 \sin \alpha) / L_{g2} \quad (28)$$

第1報の式(23), 第2報の式(27)を式(28)に代入すれば、

$$\sigma_2 = \frac{\cos \theta_0}{\cos \alpha} \mp \frac{\sin \theta_0}{\mu \cos \alpha} \pm \frac{1}{\mu} - \tan \alpha \quad (29)$$

式(29)を式(26)に代入すれば、

$$\lambda_2 = \frac{-\cos \theta_0}{\cos \alpha} \pm \frac{\sin \theta_0}{\mu \cos \alpha} - \theta_0 \pm \frac{1}{\mu} + \tan \alpha + \frac{\pi}{2} \quad (30)$$

式(30)は、 α および μ を与えた場合に、被動歯車の回転角 λ_2 と媒介変数 θ_0 の関係を示すものである。

ここで被動歯車の歯数を z_2 とし、その近寄側が受持つ回転角を λ_{2i}' , 遠退側が受持つ回転角を λ_{2j}' とすれば、

$$|\lambda_{2i}'| + |\lambda_{2j}'| = 2\pi / z_2 \quad (31)$$

$\lambda_{2i}', \lambda_{2j}'$ に対応する θ_0 を θ_0' とし、式(30)を式(31)に代入すれば、

$$\theta_0' = \sin^{-1} \{ \cos \alpha (1 - \mu \pi / z_2) \} \quad (32)$$

図9 被動歯車の歯形がインボリュートである場合の傾斜角 α の限界

図8は式(32)を用いて、 $\alpha = 20^\circ$ における z_2 と θ_0' との関係を示したものである。

3.2 傾斜角 α の限界

被動歯車の歯形としてインボリュートを与えた場合の接触点の軌跡は、図6に示すようになり、トルク点から接触点までの距離 r の限界は、インボリュート歯車どうしのかみあいに比べて長くなる。したがって、歯形の有効曲線部分も増大する。ここで距離 r の限界点は、接触点の軌跡上で、その法線が歯車の中心を通るような点である。

いま、接触点の軌跡を、極座標表示で $r = f(\theta)$ とする。流通座標を R, Θ として、その法線の方程式は、

$$-\frac{1}{R} = -\frac{1}{r} \cos(\Theta - \theta) - \frac{1}{r'} \sin(\Theta - \theta) \quad (33)$$

ただし $r' = dr/d\theta$ であり、 θ, Θ は共に歯車の中心線を基線として測られた角度とする。ここで r の限界点の条件、 $R = L_2$, $\Theta = 0$ および第1報の式(12)の遠退側 $r_j = L_2 \{ \cos \alpha - \sin(\theta - \gamma) \} / \sin \gamma$ を式(33)に代入して整理すれば、

$$\cos \alpha = \sqrt{1 + \mu^2} \sin \theta \quad (34)$$

式(34)より、接触点の軌跡の限界を θ で定めれば、傾斜角 α の限界値が求まる。ところが θ は式(32)を満足しなければならない。したがって式(32), (34)を連立すれば、 α の限界値は定まる。

図9はこのようにして求めた α と z_2, μ との関係を示すものである。図より時計用歯車として被動歯車にインボリュートを用いる場合には、傾斜角 20° のものを使えば十分である。

3.3 増速比と駆動歯車のトルク円半径との関係

接触点の軌跡が直線である場合と同様、歯車を正確にかみあわせるためには、駆動歯車のトルク円半径は、被動歯車のトルク円半径に増速比を乗じたものより、大きくとらなければならない。

表 2 被動歯車の歯形がインボリュートである場合の回転角度伝達誤差および歯形
 $z_2=8, \mu=0.174$

ε	λ_{1i}	λ_{1j}	λ_{2i}	λ_{2j}	δ_i	δ_j	x_{1i}	y_{1i}	x_{1j}	y_{1j}	x_{2i}	y_{2i}	x_{2j}	y_{2j}
2	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	1.0540	0.	1.0540	0.	0.5	0.	0.5
	-2.467	2.484	-5.141	5.177	-0.205	0.208	0.0081	1.0317	-0.0042	1.0641	-0.0107	0.5240	0.0025	0.4925
	-4.329	4.380	-8.942	9.046	-0.282	0.286	0.0144	1.0142	-0.0095	1.0746	-0.0227	0.5447	0.0040	0.4872
	-6.379	6.484	-13.048	13.262	-0.289	0.293	0.0214	0.9943	-0.0176	1.0886	-0.0403	0.5691	0.0053	0.4820
	-8.632	8.816	-17.469	17.838	-0.204	0.205	0.0290	0.9721	-0.0297	1.1063	-0.0649	0.5966	0.0062	0.4772
	-11.105	11.395	-22.213	22.787	-0.003	-0.004	0.0371	0.9473	-0.0468	1.1281	-0.0982	0.6267	0.0068	0.4733
	-13.816	14.247	-27.386	28.121	0.346	-0.372	0.0456	0.9200	-0.0705	1.1538	-0.1420	0.6578	0.0070	0.4706
4	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	1.0449	0.	1.0449	0.	0.25	0.	0.25
	-1.242	1.250	-5.141	5.177	-0.171	0.174	0.0042	1.0336	-0.0020	1.0497	-0.0053	0.2620	0.0013	0.2463
	-2.176	2.201	-8.942	9.046	-0.235	0.239	0.0078	1.0245	-0.0042	1.0546	-0.0114	0.2724	0.0020	0.2436
	-3.201	3.254	-13.048	13.262	-0.240	0.244	0.0120	1.0141	-0.0075	1.0610	-0.0202	0.2845	0.0027	0.2410
	-4.324	4.416	-17.469	17.838	-0.170	0.171	0.0170	1.0022	-0.0122	1.0693	-0.0324	0.2983	0.0031	0.2386
	-5.552	5.697	-22.213	22.787	-0.002	-0.002	0.0228	0.9887	-0.0187	1.0789	-0.0491	0.3133	0.0034	0.2366
	-6.893	7.107	-27.286	28.121	0.285	-0.306	0.0294	0.9736	-0.0273	1.0907	-0.0710	0.3289	0.0035	0.2353
8	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	1.0403	0.	1.0403	0.	0.125	0.	0.125
	-0.623	0.627	-5.141	5.177	-0.153	0.157	0.0022	1.0346	-0.0009	1.0427	-0.0027	0.1310	0.0006	0.1231
	-1.091	1.103	-8.942	9.046	-0.210	0.215	0.0041	1.0300	-0.0020	1.0450	-0.0057	0.1362	0.0010	0.1218
	-1.604	1.630	-13.048	13.262	-0.215	0.220	0.0064	1.0247	-0.0035	1.0480	-0.0101	0.1423	0.0013	0.1205
	-2.164	2.210	-17.469	17.838	-0.151	0.154	0.0092	1.0185	-0.0055	1.0518	-0.0162	0.1492	0.0016	0.1193
	-2.776	2.848	-22.213	22.787	0.000	-0.002	0.0125	1.0116	-0.0083	1.0565	-0.0245	0.1567	0.0017	0.1183
	-3.443	3.549	-27.286	28.121	0.258	-0.275	0.0165	1.0037	-0.0119	1.0620	-0.0355	0.1645	0.0017	0.1176

いま、傾斜角 α の値は前節によって与えられ、摩擦係数 μ も決まっているものとして、被動歯車の歯数 z_2 を与えれば、式(32)によって θ_0 は特定の値 θ_0' になる。これから式(30)によって、 λ_2 もまたある特定の値 λ_{2i}' , λ_{2j}' として定めることができる。ここで被動歯車のトルク円半径を $L_2=1/\varepsilon$ で与えれば、第1報の式(26)から $\sigma_1=\sigma_1(L_1, \varepsilon)$ の形になり、この σ_1 を式(32)に代入すれば $\lambda_{1i}'=\lambda_{1i}'(L_1, \varepsilon)$ の形になる。そこで駆動歯車のトルク円半径 L_1 は、次式を満足するように定めればよい。

$$|\lambda_{2i}'|+|\lambda_{2j}'|-\varepsilon[|\lambda_{1i}'|+|\lambda_{1j}'|]=0 \quad (35)$$

このようにして、それぞれの ε に対して L_1 が定まる。この L_1 および L_2 を用いて第1報と同様な方法で歯形を決定すれば、この歯形をもった歯車はなめらかに回転し、かつ正確にかみあう。なお回転角度伝達誤差は次式で与えられる。

$$\delta=\lambda_2-\varepsilon\lambda_1 \quad (36)$$

3.4 計算例

摩擦係数を $\mu=0.174$ 、被動歯車の歯数を $z_2=6, 8, 10$ 、傾斜角を $\alpha=20^\circ$ 、被動歯車のトルク円半径を $L_2=1/\varepsilon$ とする。図8より、 $z_2=6, 8, 10$ のそれぞれについて、媒介変数 θ_0' の値は $59^\circ 39'$, $61^\circ 6'$, $62^\circ 40'$ になる。これらの θ_0' および μ, α を式(30)に代入すれば λ_{2i}' , λ_{2j}' が定まる。

$$\mu=0.174, \alpha=20^\circ$$

図10 駆動歯車のトルク円半径と増速比との関係

λ_{2j}' が定まる。また $\theta_0', \mu, \alpha, L_2$ および任意に与えた L_1 を第1報の式(26)に代入すれば σ_1 が定まり、この σ_1 および α, θ_0' を式(32)に代入すれば λ_{1i}' が定まる。これらの λ_{1i}' および λ_{2j}' が式(35)を満足するような L_1 を探せばよい。

このようにして計算したところ、 L_1 は図10に示するような結果になった。

表2は、 $z_2=8$ の場合についての L_1 および L_2 を用いて、回転角度伝達誤差および歯形を計算したものである。表中、 $|\lambda_{2i}'|+|\lambda_{2j}'|$ を計算してみると、それは $2\pi/z_2$ になっており、式(35)を満足している。またその時の回転角度伝達誤差は、式(36)を満足している。歯形に関して

$$z_2 = 8, \mu = 0.174$$

図11 回転角度伝達誤差

は、表中の x_2 および y_2 は、インボリュートカーブの直交座標表示である。

図11は、この場合の回転角度伝達誤差を图示したものである。図より、この歯車はなめらかに回転し、かつ正確にかみあうということがわかる。

図12は、表2中の $\epsilon = 8$ の場合について、その歯形の集合として、歯車の形を作ってみたものである。接触点の軌跡が直線である場合と同様、歯厚はトルク円上で駆動歯車では $1/3$ ピッチ、被動歯車では $1/2$ ピッチに選んだ。

4. 結 論

トルク比一定の歯車に関して、次の諸点が明らかになった。

1. 接触点の軌跡が直線である場合について
 - i) 歯車をなめらかに回転させるためには、近寄側と遠退側で回転角の絶対値を同じにすればよい。
 - ii) 傾斜角 α は、図2で示されている値以上にとらねばならない。
 - iii) 歯車を正確にかみあわせるために、駆動歯車のトルク円半径 L_1 は、図3に示されている値をとらな

$$z_1 = 64, z_2 = 8, L_1 = 1.0403, L_2 = 0.125$$

図12 被動歯車の歯形としてインボリュートを与えた場合の歯車

ければならない。

2. 被動歯車の歯形がインボリュートである場合について

- i) 歯車をなめらかに回転させるためには、歯形計算の際に、媒介変数 θ_0 の値を近寄側、遠退側で同じにすればよい。
- ii) 被動歯車には、傾斜角 20° のインボリュート歯車を用いればよい。
- iii) 歯車を正確にかみあわせるためには、駆動歯車のトルク円半径は、図10に示されている値をとらなければならない。

なお、本研究の理論解析に際し、有効な武器となった接線極座標は、東北大学名誉教授、現芝浦工業大学教授松山多賀一氏²⁾、および東北大学教授藤井康治氏³⁾の発案による。両氏の名を記して謝意を表明する。

参 考 文 献

- 1) 酒井高男, 森田信義: トルク比一定の歯車に関する研究 (第1報), 精密機械, 34, 4 (1968) 265.
- 2) 松山多賀一: 歯車歯形の理論への切線極座標の応用, 機会学会論文集, 8, 31 (1942) IV-101.
- 3) 藤井康治: インボリュート解析の一方法について, 機会学会論文集, 8, 31 (1942) IV-108.