研 究

リニア・シーケンスの設定*

—生産システムの研究(第1報)—

岡村健二郎** 山品元**

Establishment of Linear Sequences

—Study of Production System (1st Report)—

Kenjiro OKAMURA, Hajime YAMASHINA

The paper deals with the sequencing problem as an initial step to study of production system. Sequence may be classified roughly into linear sequence and compound sequence. This report describes the systematical method for establishing linear sequences.

The points to analyze this problem are as follows;

- (1) The representative method of precedence relations.
- (2) The systematical method of establishing linear sequences.
- (3) The total number of feasible linear sequences.

For these purposes, the fundamental matrix which makes precedence diagram into the form available to theoretical analysis, sequential product as the operational method by which precedence relations can be handled rationally, and then the linear product by which all of the feasible sequences can be established without overlapping, have been introduced. In the final analysis, sequences are established easily, systematically and very mechanically by linear product.

1. 緒 言

シーケンス設定問題は、シーケンスを設定することにより何らかの効果が期待される場合に生じる問題であり、仕事の処理が時間の経過を伴って行なわれることを考えれば、普通何かを行なおうとする場合、常にこの問題に遭遇するものである。

特に機械工業においては生産性の良いことを一つの目的としており、実施シーケンスのいかんによって生産性が大幅に影響を受けることから、この問題のもつ意味は重大である。

このようなシーケンス設定問題の特徴は、

- a. 本質は組合せ問題であり、必然的に解の総数は莫大となること、
- b. 解は工学的に課せられる種々の制約条件——特に順序の制約——を満足していなければならないこと、
- c. それらの解の中からある基準を最適にするシーケンスを一つまたはいくつか選び出さなければならないこと、

である。したがって、シーケンス設定問題の解決には、工学的な種々の制約条件を満足するシーケンスの具体的な作成法と、莫大な数の解をいかに処理して適当なシーケンスを選び出すかの2点が本質的なこととなる。

現在のところ、シーケンス設定問題は、一応、巡回セールスマン問題、ライン・バランス問題、ジョブ・ジョブ問題に大別されて論じられており、いくつかの有効なアプローチが報告され、それなりの成果をあげている。しかしながら、実際の生産システムで遭遇するシーケンス設定問題は、上記のうちのどれかの範ちゅうに入っているものでなく、上記の三つに関しては何らかの形で定式化が行なわれており、それに対して種々のアプローチがなされているというのが現在の状態である。

このように、シーケンス設定問題の研究は、まだ始まったばかりの段階にあり、多くの未解決のそして解析上困難な問題が山積みしており、今後の研究に待つところが多い。

本研究の目的は、このような初期的な研究の段階にあるシーケンス設定問題を組織的にとりあげ解析していくことにより、生産システムの最適化ならびにその管理のための方策を見出そうとするものである。

さて、機械工業においては、大別して二つの特徴的な

*原稿受付 昭和43年11月29日。昭和43年度関西地方定期学術講演会(昭和43年7月16日)にて発表。

**正 会 員 京都大学工学部(京都市左京区吉田本町)

生産方式——直線生産方式とジョブ・ジョブ生産方式——がある。直線生産方式は、ある種の製品を大量に製造するときにとられる方式で、**work pace** を問題とする。一方、ジョブ・ジョブ生産方式は、製品の種類が多く個々の製品の製作個数が少ないときにとられる方式で、**work pace** よりも **work content** が問題となる。これらの二つの特徴的な生産方式は、その内容において大きく異なり、シーケンスを論じる場合にどちらの方式を対象とするかによってその取扱いも種々異なってくる。本研究では、まず最初に直線生産方式を内容にもつ生産システムに重点をおき、これに関して種々の方向から解析を行なう。

基本的な問題として、工学的に守られねばならない順序の制約を満足する実行可能な解の設定が必要であるが、これに対して現在の知識は満足な方法を与えていない。ここで、シーケンスを作業の行ない方に着目して分類すれば、基本的にリニア・シーケンスとコンパウンド・シーケンスの二つに大別される。リニア・シーケンスとは、生産システムが行なうべき複数個の要素作業を一つずつ順次に行なう場合のシーケンスをいい、最も基本的なものである。これに対してコンパウンド・シーケンスとは、同時にいくつかの要素作業を処理して作業を遂行していく場合のシーケンスのことをいう。本報の目的は、リニア・シーケンスの組織的な設定法を見出すことにある。

この問題を解析するにあたって問題となる点を要約すると次の3点となる。

- (i) 順序の制約の表示法
- (ii) その順序の制約を満足するリニア・シーケンスの組織的な設定法
- (iii) 実行可能なリニア・シーケンスの総数

第2節で、シーケンスを論じる上において必要ないくつかの言葉の定義と記号を導入したあと、問題の具体的な定式化を行ない、それに基づき、第3節で (i) を、第4、第5節にわたって (ii) を論じ、第6節で (iii) を考察する。最後に第7節で総括を行なう。

2. 定義と記号

次のような言葉の定義と記号を導入する。

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$: 生産システムが行なうべき n 個の要素作業の集合

$|X|$: X の大いさ

$x_i < x_j$: x_i が x_j に間接に先行

$x_i \ll x_j$: x_i が x_j に直接に先行

$x_i \leq x_j$: x_i が x_j に直接または間接

に先行

$G = G(X, A)$: 先行関係図, ランクづけがすでになされ始節点は一つであるように整理されたもの、 A は次を参照

A : アローの集合

α_{x_p, x_q} : A の構成要素で、節点 x_p から他の節点 x_q に向かうアロー

π : 部分リニア・シーケンス

Π : 完全リニア・シーケンス

${}^m\pi_\nu(x_1, x_p)$: 始節点 x_1 から始まって節点 x_p に至る m 濃度の部分リニア・シーケンス、 ν は、このようなものが一般に複数個存在するため、それらを区別するために添えたもの

$\vee_\nu$: シーケンス和、個々の内容がそれぞれ独立したシーケンスを表わす。

${}^m\pi(x_1, x_p)$: $= \{\vee_\nu {}^m\pi_\nu(x_1, x_p)\}$

$S\{{}^m\pi_\nu(x_1, x_p)\}$: ${}^m\pi_\nu(x_1, x_p)$ が含む m 個の節点の集合

$\sigma\{{}^m\pi_\nu(x_1, x_p)\}$: ${}^m\pi_\nu(x_1, x_p)$ の x_p による切片 $= \{x_i | x_i \leq x_p, x_i \in S\{{}^m\pi_\nu(x_1, x_p)\}\}$

ここで、 m 濃度の部分リニア・シーケンスとは、始節点から始めて m 個の節点を先行関係を乱さずに遷移することによって得られた経路のことをいうものとする。濃度が与えられた要素作業集合 X の全体をおおうとき、この経路を完全リニア・シーケンスと名づける。

本報の目的は、実行可能な完全リニア・シーケンスのすべてを組織的に重複なく求めることにある。これは結局ネットワーク図における Hamilton の path を求めることにほかならない。したがって、それは matrix のラテン積を用いることによって求められよう。しかしながら、不幸にして、これを用いてのリニア・シーケンスの設定にはいくつかの困難な点がある。まず第一にラテン積で用いるネットワーク図では、アローの存在するところのみ遷移していくことになるから、先行関係図に必要なアローをつけ加えて対応するネットワーク図に書き加えてやる必要がある。しかしながら、この操作によって先行関係図はきわめて複雑なものになり、順序の制約を簡便に表わす手段としての価値を失ってしまう。第二に、ラテン積を用いて、順次、部分リニア・シーケンス

から完全リニア・シーケンスへと求めていく際、正当なシーケンスが作成されるに付随して順序の制約を満たさないシーケンスが数多く作成されてくる。これはシーケンスの組織的な作成には致命的な欠点である。このことは、先行関係図とネットワーク図の持っている本質的な違いを考慮することなく、順序の制約を表わすものとして、ネットワーク図を安易に用いたことによる。先行関係図は、ネットワーク図と比較して次のような特徴を備えている：

- a. 順序の制約を最も簡便に表わしたものであり、要素作業のたどるべき経路を指示するものでない。すなわち、順序の制約を犯さなければアローのあるなしにかかわらず遷移して経路を作ることが可能である。
- b. すべてのアローは一方向（普通左から右）に方向づけられている。

本報は、これらの特徴を生かすことにより、先の欠点を取り除いて、リニア・シーケンスの組織的な設定法を見出したものである。以下その詳細についてのべる。

3. 先行関係図の解析と基本行列の作成

シーケンスを設定するということは、具体的には、部分的なシーケンスを作ることから始めて、順次、高濃度のシーケンスを作成していくことになるから、われわれはまず、部分的なシーケンスからどのようにすれば順序の制約を乱さないで高濃度のシーケンスを作成することができるかを明らかにしなければならない。それらが明らかにされたあとで、実行可能なシーケンスのすべてを重複なく組織的に作成する方法について考察することになる。最初の目的のためには、先行関係図のもっている特徴、すなわち、順序の制約を乱さなければアローのあるなしにかかわらず遷移可能ということについての解析を必要とする。このことは、結局、先行関係図において順序の制約を満たしながら一つの節点から他の節点に直接に遷移することのできる条件を明らかにすることに他ならない。この目的のために、われわれは先行関係図と等価なものとしての行列を導入する。なぜなら、理論的な解析のためには、先行関係図はそれ自体直接使用しうるものでないからである。現在までに先行関係図と等価な行列として種々のものが発表されているが、これらの行列はいずれもシーケンスの組織的な設定には不適当である。その理由として、それらの行列においては、一つの節点から他の節点へ遷移する場合に、遷移できるか、できないかということにしか着目していないことがあげられる。先の目的のためには、どういう場合に遷移

できて、どういう場合にできないかということまでが明らかにされていなければならない。このような観点から、一つの節点から他の節点へ直接に遷移することのできる条件を整理すると、それらは結局次の4点に要約される。

I. x_p から x_q へのアロー α_{x_p, x_q} が存在するとき

1. x_q に向かうアローがただ一つだけ、つまり α_{x_p, x_q} のみであるときは無条件に遷移する。

2. x_q に向かうアローが一つだけでなく、 α_{x_p, x_q} 以外に他の節点 $x_r, \dots, x_s$ からも向っていれば x_p から x_q へ直接遷移するためには、あらかじめ $x_r, \dots, x_s$ をすべて通過していることを要し、したがって条件付遷移する。

II. x_p から x_q へのアローが存在しないとき

3. x_p に先行する節点のうちのいずれかが、 x_q に先行する節点のうちの最終の節点のすべてに一致するとき無条件に遷移する。

4. x_p に先行する節点のうちのいずれかが、 x_q に先行する節点のうちの最終の節点と一致しないとき、その最終の節点のすべてをあらかじめ通過していることを要し、したがって条件付遷移する。

以上の 1, 2, 3, 4 のいずれかが成立しない場合には、

図 1 先行関係図

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	2	3	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	3	4	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{5.6}{8}$	0	0
3	0	2	0	$\frac{2}{4}$	5	6	7	0	0	0
4	0	0	3	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{5.6}{8}$	$\frac{5.6}{9}$	0
5	0	2	0	$\frac{2}{4}$	0	6	7	$\frac{2.6}{8}$	$\frac{4.5}{9}$	0
6	0	2	0	$\frac{2}{4}$	5	0	7	$\frac{2.5}{8}$	$\frac{4.5}{9}$	0
7	0	2	0	$\frac{2}{4}$	5	6	0	$\frac{2.5.6}{8}$	$\frac{4.5.6}{9}$	0
8	0	0	0	4	0	0	7	0	$\frac{4.7}{9}$	10
9	0	0	0	0	0	0	0	8	0	$\frac{8}{10}$
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

図 2 基本行列

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		1	1							
2			3	1	4	4	4	2		
3		3		4	1	1	1			
4			3		4	4	4	4	2	
5		3		4		3	3	2	2	
6		3		4	3		3	2	2	
7		3		4	3	3		4	2	
8				3			3		4	4
9								3		4
10										

図 3 直接遷移の分類

x_p から x_q への直接遷移は起りえない。

この事実を用いることによって、先行関係図と等価な一つの行列が作成される。それを基本行列と名づける。

基本行列 $L_0=(a_{ij})$

- $a_{ij}=1$: 節点 x_i から他の節点 x_j への直接遷移が可能であるとき : x_j
- $a_{ij}=0$: 節点 x_i から他の節点 x_j への直接遷移が不可能であるとき : 0

ただし、条件付遷移の情報を与えるために、あわせて次のような $c(i,j)$ を記す必要がある。

- $c(i,j)=\emptyset$: 無条件遷移のとき : 空集合 $\emptyset$
- $c(i,j)=S$: 条件付遷移のとき : あらかじめ通過しておかねばならない節点の集合

この $c(i,j)$ は各行列のマスの左上にセルを作ってそこに書き入れることにする。条件付遷移の情報がこのように簡単に整理できることは、先行関係図の第2の特徴：アローは一方方向に方向づけられている によるものである。この行列の縦、横の配列順序は、おのおの上から下、左から右へランク順に整理されており、その並べ方は同じものであるとしておく。具体例を示せば、図1の先行関係図に対して基本行列は図2のように与えられる。図2においてたとえば7行、8列目のマス目は、7から8への直接遷移は可能であるが、そのためにはあらかじめ2, 5, 6を通過している必要があるということを示している。なお参考のため図2において直接遷移可能な場合に対し、直接遷移の仕方が前述の分類のどれに該当するかを図3に示す。

さて、これなる行列を導入することによって、先行関係図が具体的に利用しうる形に変換されたことになる。

4. シーケンス積

次の問題は、部分的なシーケンスから高濃度のシーケ

図 4 シーケンス積

ンスが作成される過程を明らかにすることである。これに対しては、シーケンス設定にネットワーク図を適用した場合に生じた困難を想起する必要がある。すなわち、

- a. 順序の制約を乱さないこと
- b. サイクルを含まないこと

に対する考慮がこの問題に対しての本質的なことがらとなる。a に対しては先の基本行列によって直接遷移の条件が明らかにされているからこれを利用することにより、また b に対してはサイクルを禁止するような要項を設けることにより解決されよう。結局、これらのことを考えに入れて、先の基本行列を用い部分的なシーケンスから高濃度のシーケンスを作成する場合の手順を整理すれば図4のようなフローチャートを得る。

図において、(1)は、 ${}^m\pi_\nu(x_i, x_j)$ の最終節点 x_i から節点 x_j への直接遷移が不可能であるとき、部分リニア・シーケンス ${}^{m+1}\pi_{\nu'}(x_i, x_j)$ は存在しないことを主張するものである。添字 ν' は ν との対応関係を示す。(2)はサイクルを禁止するために設けたものである。(3)により順序の制約を犯す場合を除外している。結局、(4)または(5)の条件が満足される場合にのみ一つ新しい節点がつけ加わったシーケンスが生まれる。このように操作してシーケンスを与える手順をシーケンス積と名づける。この手順をくり返し使用することによって低濃度の部分リニア・シーケンスから、順次、高濃度のリニア・シーケンスがえられよう。本報でのべるシーケンス設定法の根幹も、実にこのシーケンス積にあり、これを導入することによって順序の制約をきわめて合理的な形で処理することが可能となり、順序の制約を満足するシーケンスの作成過程を初めて明らかにすることができることとなった。すなわち、順序の制約を直接遷移という概念によって整理することにより、解析的な取扱いがきわめて容易なものとな

り、これとサイクルに対する若干の考慮を加えて、シーケンス作成過程をシーケンス積という形に結晶させることによって順序の制約を満足しない不当なシーケンスが作成されるようなことが一切なくなり、先に指摘したシーケンス設定に際しての致命的な欠点をすべて取除くことが可能となった。

5. リニア積

前述のように、基本行列、シーケンス積を導入するこ

図 5 (a) 先行関係図

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	3	0	0	0
2	0	0	3	4	5	0
3	0	2	0	4	5	0
4	0	0	3	0	5	6
5	0	0	0	4	0	6
6	0	0	0	4	0	0

図 5 (b) 基本行列

$$\begin{aligned}
 [M]^1 &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 [M]^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \cdot 2 & 1 \cdot 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 [M]^3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \cdot 3 \cdot 2 & 1 \cdot 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 \cdot 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 [M]^4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 & 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 & 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 & 0 \\ & & & 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 & 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 & \end{bmatrix} \\
 [M]^5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 & 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 & 0 \\ & & & 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 & 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 & \end{bmatrix} \\
 [M]^6 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 6 \\ & & & & & 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 6 \\ & & & & & 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \\ & & & & & 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \\ & & & & & 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

とによって、シーケンスを設定する場合の基本的な操作に関しての問題点をすべて解決したことになる。最後に残された問題は、これを用いてのシーケンスの組織的な設定法を確立することである。この目的のためには、行列の積の演算法を利用することがこの場合最も適当と考えられる。結局、これは次のような形に整理される。これをリニア積と名づける。すなわち、 $|X|=n$ のとき 1 行 n 列の行列と基本行列 L_0 との積を想定し、その際、個々の要素間の積が先のシーケンス積の手順に従うものを考える。

$$\text{リニア積 : } [M]^{m+1} = [M]^m \cdot L_0 \quad (*)$$

ここで

$$\begin{aligned}
 [M]^m &= x_1 \begin{bmatrix} 0 & {}^m\pi(x_1, x_2) & \cdots & {}^m\pi(x_1, x_i) & \cdots & {}^m\pi(x_1, x_n) \end{bmatrix} \\
 \text{としたとき } [M]^{m+1} \text{ の 1 行 } j \text{ 列の要素 } {}^{m+1}\pi(x_1, x_j) &\text{ は} \\
 {}^{m+1}\pi(x_1, x_j) &= \left\{ \bigvee_{i=1}^n ({}^{m+1}\pi_{i'}(x_1, x_j)) \right\} = \left\{ \bigvee_{i=1}^n ({}^m\pi_{i'}(x_1, x_i) \cdot a_{ij}) \right\}
 \end{aligned}$$

となる。 $[M]^1$ としては L_0 における始節点の行、 $[M]^2$ として $[M]^1$ の 0 でない要素のそれぞれにその始節点のラベル x_1 をその要素の左側に並記しシーケンス積の形にしたものを採用する。以下一般に(*)式をくり返し適用することにより、順次、高濃度のリニア・シーケンスがえられる。完全リニア・シーケンスを求めるには $[M]^n$ を求めることになる。

たとえば図 5 (a) の先行関係図に対しては、その基本行列 L_0 は図 5 (b) のように与えられ、これから図 5 (b) 下のようなステップをへて、最終的に五つの実行可能な完全リニア・シーケンスが得られる。

実際これ以外の実行可能な完全リニア・シーケンスは存在しない。この場合五つの完全リニア・シーケンスしか存在しないことは次の節でも明らかにされるが、この

リニア積の成立ちからも明らかである。

このリニア積の特徴は、シーケンス積を用いることにより無駄なく、順次、高濃度のシーケンスが作成され、行列の積の演算が利用されていることから、組織的にシーケンスの設定が行なえることである。

6. 実行可能なリニア・シーケンスの総数

順序の制約を満足する解の設定に関連して、実行可能なシー

ケンスが実際にはどれくらいあるかという問題について考察する。これは、シーケンス設定問題の解決にとって、必ずしも本質的な問題でないが、実際に計算を行なう場合の種々の目安を与えるものとしての意味をもっている。Klein その他^{1),2)} も同様の問題に関心をはらっているが、有効な方法を見出していない。ここで与える方法の基本的な考え方は次のとおりである。すなわち、順序の制約に関して実行可能な解の数を求めるということは、結局、組合せの問題であるから、順序の制約をいくつかの場合分けを行なうことと適当な変換を行なって求めよい形に直すことによって、この問題に組合せ理論が適用できるように操作しようとするのである。この観点から一つの基本的な方法が導きだされる。名づけて箱法と呼ぶことにする。

6.1 箱 法

生産システムが行なうべき要素作業の個数だけ箱を作成し、一列に並べ、これに対して先行関係の定義された各要素作業の入りうる場所の選び方を考察することにより、リニア・シーケンスの総数を見出そうとする方法である。これに適用される基本的な命題は次のとおりである。

命題 1. 生産システムが行なうべき要素作業集合 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ において

$$\left. \begin{array}{l} \text{先行条件 } P: x_{h_1} \leq x_{h_2} \leq \dots \leq x_{h_s} \\ Q: x_{i_1} \leq x_{i_2} \leq \dots \leq x_{i_t} \\ \vdots \\ R: x_{j_1} \leq x_{j_2} \leq \dots \leq x_{j_u} \end{array} \right\} \text{ただし}$$

が与えられたとき、先行条件 $P, Q, \dots, R$ がお互いに独立なら、つまり条件 $P, Q, \dots, R$ の中に共通な元が一つも含まれないならば、実行可能な解の総数は、

$$N = n! / s! t! \dots u!$$

命題 2. X に属する要素作業を、順序の制約によってリニア・シーケンス中にあらわれる位置に制約を受ける要素作業（固定順序作業と名づける）と受けない要素作業（可変順序作業と名づける）に分けて、おのおの

$$\left. \begin{array}{l} \text{固定順序作業: } x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_v} \\ \text{可変順序作業: } x_{l_1}, x_{l_2}, \dots, x_{l_w} \end{array} \right\} \text{ただし } v + w = n$$

とする。このとき実行可能な解の総数は、

$$N = n C_v \cdot (\text{固定順序作業間の可能な組合せ数}) \cdot (n - v)!$$

命題 1 は自明であろう。命題 2 の証明は次のとおり。 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ において v 個の固定順序作業は $n C_v$ 通りの仕方ですべてリニア・シーケンス中にあらわれる。このとき残りの $(n - v)$ 個の可変順序作業の並び順序は、まったく自由であるから、 $(n - v)!$ 通りの並び方がある。一方、固定順序作業同志の間でも何個かの可能な組合せ

が存在する。これより上記の式を得る。

この方法は、要素作業集合 X 中に存在する順序の制約を適当な工夫によって独立な先行条件に分割していくことができる。適用されるが、順序の制約が複雑に入り乱れている場合には、以下にのべるいくつかの補足的な方法を併用する必要がある。

6.2 固定法

この方法は、場合分けを行なうことにより、ある要素作業を完全リニア・シーケンス中にあらわれる特定の位置に固定して複雑な先行関係を切ってしまうやり方である。固定すべき要素作業としては、それを固定することにより、先行関係がいちじるしく簡単になるものや、完全リニア・シーケンス中にあらわれる可能な位置の少ないものを選ばばよい。たとえば先の図 1 に対してこの方法を用いて実行可能なリニア・シーケンスの総数を求めてみよう。箱法に従って 10 個の箱を作れば、最初の箱に 1 が、最後の箱には 10 が入る。いま 9 に着目すれば、これは 8 番目が 9 番目の箱のいずれかを占める。そこで固定法により場合分けを行なって計算すれば、9 が 8 番目の箱を占める場合は 90 通り、9 が 9 番目の箱を占める場合は 156 通り、それぞれ独立であることから加え合わせて結 246 通りの解があることがわかる。

この方法は、どのように複雑な順序の制約をもったものでも有効であり、実行可能なリニア・シーケンスの総数はこの方法によって必ず求められる。

6.3 逆アロー法

簡単な組合せ理論を応用することによって、シーケンスの総数が比較的たやすく求まる場合の例として、この方法をかかげる。この方法では、先行関係図中で前述の箱法の適用を妨げているアロー、たとえば α_{x_p, x_q} をひとまず省略し、命題を用いてその場合の完全リニア・シーケンスの数 $N(S)$ を求める。 $N(S)$ のうち先行条件 $x_p \leq x_q$ を満たす完全リニア・シーケンスの数を $N(S_{p,q})$ 、逆に $x_q \leq x_p$ を満たす完全リニア・シーケンスの数を $N(S_{q,p})$ 、とすれば、明らかに $N(S) = N(S_{p,q}) + N(S_{q,p})$ が成り立つ。これより

$$N(S_{p,q}) = N(S) - N(S_{q,p})$$

先行関係図によっては $N(S_{p,q})$ は求めにくい。が、 $N(S_{q,p})$ は比較的容易に求められることがある。こうした場合に逆アロー法が有効である。省略したアローが 2 個以上のときも同様の考え方が適用できる。たとえばアロー $\alpha_{x_p, x_q}, \alpha_{x_r, x_s}$ を省略した場合は、

$$N(S_{p,q} \cdot S_{r,s}) = N(S) - N(S_{q,p}) - N(S_{s,r}) + N(S_{q,p} \cdot S_{s,r})$$

具体例をあげれば、図 6 のような先行関係図では、アロ

図 9 先行関係図

先述の約束により遷移行列 $M_{2,1}$ は意味を失なう。また先に指摘した事実から $M_{1,2}$ 中のアロー $\alpha_{2,8}$ も失なわれる。失なわれたシーケンスを復活させて完全リニア・シーケンスの総数を求める。この場合の注意は重複なくかぞえ直すということである。遷移 $\alpha_{2,8}$, $\alpha_{8,4}$, $\alpha_{8,7}$, $\alpha_{2,8}$ と $\alpha_{8,4}$, $\alpha_{2,8}$ と $\alpha_{8,7}$, $\alpha_{8,4}$ と $\alpha_{8,7}$, $\alpha_{2,8}$ と $\alpha_{8,4}$ と $\alpha_{8,7}$ を含む完全リニア・シーケンスの数をそれぞれ N_2 , N_3 , N_4 , $N_{2,3}$, $N_{2,4}$, $N_{3,4}$, $N_{2,3,4}$ とすれば、求める完全リニア・シーケンスの総数は、

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 - N_{2,3} - N_{2,4} - N_{3,4} + N_{2,3,4} \\ = 180 + 10 + 38 + 28 - 8 - 2 - 0 + 0 = 246$$

これは先に求めた解と一致している。グルーピングにより失なわれた解の数は全体の約 27% である。

以上展開した方法を少しく現実的な問題、たとえば図 9 の先行関係図に対して応用してみれば、簡単な計算の結果から約 $N = 1.8 \times 10^{12}$ (正確には 1762551451584) と求められる。ちなみに順序の制約が無い場合の数は $29! \approx 8.8 \times 10^{30}$ 。この場合、順序の制約があることにより実行可能な解の数は全体の約 $2.0 \times 10^{-17}\%$ である。このことは組織的なシーケンスの設定ということがいかに大切であるかということを物語っている。リニア積では、順序の制約を乱すシーケンスを決して数えあげることはいないのだから、これを用いてのリニア・シーケンスの設定がいかに無駄なく能率的であるか容易に知られよう。

7. 結 論

シーケンスの組織的な設定に必要な手順を一つずつ整

理していくことにより、先行関係図を理論的に利用しうる形にしたものとして基本行列、順序の制約を合理的に処理する演算法としてシーケンス積、そして最後に、順序の制約を満足するシーケンスをすべて重複なく作成するものとしてリニア積を導入するに至った。これに関連して実際の計算上の種々の目安を与えるために完全リニア・シーケンスの総数を求める方法についても考察した。

基本行列では直接遷移の概念が本質的である。これは先行関係図において、遷移の条件を整理することによって生まれたものである。行列に $c(i, j)$ のような形で情報を与えるのは初めての試みである。従来の行列の表示法では、遷移の可否のみしか明らかにされなかったが、基本行列を用いることにより、どうの場合に遷移できてどうの場合に遷移できないかまでが明らかにされた。シーケンス積は、順次、高濃度のシーケンスを形成する際に生じる困難を無駄なく排除することによって生まれたものである。これにより部分的なシーケンスから高濃度のシーケンスを作成する過程を明らかにすることができた。このシーケンス積を用いることにより、順序の制約に関する演算が非常にすっきりした形で行なえ、順序の制約を満足しない不当なシーケンスが作成されるようなことは一切なくなった。順序の制約を満足する解の設定は、結局、リニア積を用いることによってきわめて機械的かつ組織的に行なわれる。

現実の規模の問題では、実行可能な解の総数は、先の具体例でみたように、たとえ順序の制約があっても、一般に膨大である。このことは、ある基準にしたがって、最適な完全リニア・シーケンスを求めるには、多くのシーケンスの中から適当なシーケンスを選び出すという操作に関してのテクニックが重要であることを物語っている。本論文で述べたことがらは、順次、高濃度のシーケンスを作成していく過程において、それらのテクニックが適用される土壌を与えるものであり、この意味で応用範囲は広い。

参 考 文 献

- 1) Klein, M: On Assembly Line Balancing, Oper. Res., 11, 2 (1963) 274~281.
- 2) Ignall, E.T: A Review of Assembly Line Balancing, J. of I.E., 16, 4 (1965) 244~254.