時計用歯車のホブ切りについて*

森 田 鈞** 井 野 博***

On Hobbing of Watch Gears

Hitoshi MORITA, Hiroshi INO

For many watch-gear-tooth profiles approximate cycloid curves consisting of arcs of circles and straight lines are being used. But watch-gears cannot always be hobbled, for in some cases there is no mating rack profile which is the tooth shape of the hob. This paper describes theoretically the possibilities of existence of mating racks for watch-gears.

These conditions are as follows :

- (1) The mating rack profile should not have any cusps.
- (2) The right and left tooth profiles of the mating rack should not intersect each other within the depth of gear teeth.

From these conditions the ranges of watch-gear-tooth profiles for which the mating racks exist are obtained, and it is shown that in cases of the gears with large numbers of teeth the mating racks for any tooth profile can exist, if the generating circles are chosen suitably, but in cases of small numbers of teeth the mating racks for certain tooth profiles cannot exist.

1. 緒 言

時計用歯車にはサイクロイドを円弧と直線で近似した歯形が多く用いられている。この歯車を切削するホブの歯形はこの歯車とかみあうラックの歯形として求められる。ところで、円弧および直線歯形に対するラック歯形は必ずしも存在せず、ホブ切りが不可能となることがある。従来円弧および直線歯形の個々の歯形について研究されたものはある¹⁾。また時計用歯車について研究されたものもあるが^{2), 3), 4)}、それは時計用歯車の歯形が与えられたとき、その歯車のホブ切りの可否などについて調べたものである。本報告においては時計用歯車全般に対してそれとかみあうラック歯形の存在する歯形の範囲を求めることを目的とする。ホブ切り可能な条件としては、さらにこのラック歯形に対するホブのねじ面の存在について調べる必要がある⁶⁾が、時計用歯車のホブは進み角が小さく普通問題としないので、ここではふれないことにする。以下においては便宜上ラック歯形の存在することをもってホブ切り可能な条件とする。

2. 時計用歯車歯形

本報告で対象とする時計用歯車の歯形は、図1に示すように歯末は円弧(AB)、歯元は直線(BC)の歯形をもつものとする。この円弧を尖円と呼び、その半径を ρ 、

*原稿受付 昭和44年11月20日。昭和43年度、44年度精機学会秋季大会学術講演会(昭和43年11月1日、44年10月11日)にて発表。

**正 会 員 早稲田大学理工学部(東京都 新宿区 西大久保 4-170)

***学生会員 早稲田大学理工学部

円弧の中心と歯車の中心との距離を b とする。また、歯底(CD)はホブの先端が描くトロコイドおよび円弧とし、直線とトロコイドとの接点Cと中心Oとの距離を r_c とする。

ところで、時計用歯車には車と呼ばれる大歯車と、カナと呼ばれる小歯車があり、その歯厚 s は円ピッチ t を用いるとつぎのような値が多く使われている。

車 $s=t/2$

カナ 歯数9あるいは11枚以上 $s=2t/5$

歯数8あるいは10枚以下 $s=t/3$ 、

3. ホブのラック歯形の式

図1 時計用歯車歯形

図 2 座標

歯形に対するラック歯形の式を求めるためにつぎのような座標を用いる。歯形に対しては歯車の中心を極、尖円を中心と歯車の中心を結ぶ直線を始線とする極座標 (r, θ) を、ラック歯形に対してはピッチ線を x 軸、歯車の中心を通りピッチ線に垂直な直線を y 軸とする直角座標 (x, y) を用いる (図 2)。

いま歯形の式が、

$$r = f(\theta) \quad (1)$$

なる関係をもって表わされるならば、歯車のかみあい条件によりラック歯形の式を求めることができる⁵⁾。

すなわち、図 2 より

$$\tan \psi = -r \frac{d\theta}{dr} \quad (2)$$

$$\cos \alpha = \frac{r}{r_c} \cos \psi \quad (3)$$

$$\epsilon = \psi - \alpha - \theta \quad (4)$$

$$x_p = r \cdot \sin(\psi - \alpha) \quad (5)$$

したがって、ラック歯形の式は、

$$x = x_p - \epsilon r_c \quad (6)$$

$$y = r_c - r \cdot \cos(\psi - \alpha) \quad (7)$$

ここで ψ : 歯面の接線と動径のなす角

α : 圧力角

ϵ : 歯車の回転角

x_p : 接触点の横座標

r_c : 歯切ピッチ円半径

これらの式を用いて時計用歯車の右歯面に対するラック歯形の式を求める。

直線 BC の歯形の式は、

$$\sin \theta = -\frac{\rho}{b} \quad (8)$$

であるから、ラック歯形の式は、

$$x = -\frac{r \sqrt{r_c^2 - r^2}}{r_c} + r_c \left(\text{Arc cos } \frac{r}{r_c} + \text{Arc sin } \frac{\rho}{b} \right) \quad (9)$$

$$y = r_c - \frac{r^2}{r_c} \quad (10)$$

ただし $0 < r \leq \sqrt{b^2 - \rho^2}$, $r_c \geq \sqrt{b^2 - \rho^2}$

円弧 AB の歯形の式は、

$$\cos \theta = \frac{r^2 + b^2 - \rho^2}{2br} \quad (11)$$

であるから、ラック歯形の式は、

$$x = \frac{\sqrt{4\rho^2 r_c^2 - X^2}}{4\rho^2 r_c} \left\{ (r^2 - b^2 + \rho^2) - X \right\} - r_c \left\{ \text{Arc sin } \frac{r^2 - b^2 + \rho^2}{2\rho r} - \text{Arc sin } \frac{X}{2\rho r_c} - \text{Arc cos } \frac{r^2 + b^2 - \rho^2}{2br} \right\} \quad (12)$$

$$y = r_c - \frac{1}{4\rho^2 r_c} \left\{ 4\rho^2 r_c^2 - X^2 + (r^2 - b^2 + \rho^2) X \right\} \quad (13)$$

ここで $X = \sqrt{(r^2 + b^2 - \rho^2)^2 - 4b^2 r^2 + 4\rho^2 r_c^2}$ (14)

ところで、歯車の歯形とラック歯形の共通法線は常にピッチ点を通らねばならない。この条件は圧力角 α が存在することである。このことを考慮すると円弧歯形の動径の範囲は、

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{4b^2 r^2 - (r^2 + b^2 - \rho^2)^2}}{2\rho r_c} \leq 1$$

より、

$$b \leq r_c \text{ のとき } \sqrt{b^2 - \rho^2} \leq r \leq b + \rho$$

$$\sqrt{b^2 - \rho^2} < r_c < b \text{ のとき}$$

$$\sqrt{b^2 - \rho^2} \leq r \leq \sqrt{b^2 + \rho^2 - 2\rho\sqrt{b^2 - r_c^2}}$$

$$\text{および } \sqrt{b^2 + \rho^2 + 2\rho\sqrt{b^2 - r_c^2}} \leq r \leq b + \rho \quad (15)$$

$r_c < \sqrt{b^2 - \rho^2}$ のとき $\sqrt{b^2 + \rho^2 + 2\rho\sqrt{b^2 - r_c^2}} \leq r \leq b + \rho$ となる。

4. ホブ成立の条件

時計用歯車のホブ成立の条件は、

(1) ラックの歯面に尖点が生じないこと。

(2) ラックの両歯面が交わらぬこと。

である。干渉の問題は条件(1)と同じことである (4.1 参照)。また第二種の干渉はこの歯形の形状には生じないことがわかる。なおインボリュート歯車で問題となる切り下げについて考慮していないのは、時計用歯車においては種々の歯数の歯車を同一ホブで切削するのでなく、

歯形が与えられてからホブの歯形が決定されるので切り下げの問題は生じないからである。

4.1 ラックの歯面に尖点が生じないための条件

時計用歯車とかみあうラックの歯形の側面に生じる尖点は $(dx/dr)^2 + (dy/dr)^2 = 0$ となるような動径 r の点において生じるので、さきに求めたラック歯形の式を r で微分するとつぎようになる。

直線歯形の場合

$$\frac{dx}{dr} = -\frac{2\sqrt{r_c^2 - r^2}}{r_c} \quad (16)$$

$$\frac{dy}{dr} = -\frac{2r}{r_c} \quad (17)$$

円弧歯形の場合

$$\frac{dx}{dr} = \frac{-r}{2\rho^2 r_c \sqrt{4\rho^2 r_c^2 - X^2}} \times \left\{ X^2 - 2(r^2 - b^2 - \rho^2)X + (r^2 - b^2 + \rho^2)(r^2 - b^2 - \rho^2) \right\} \quad (18)$$

$$\frac{dy}{dr} = \frac{-r}{2\rho^2 r_c X} \times \left\{ X^2 - 2(r^2 - b^2 - \rho^2)X + (r^2 - b^2 + \rho^2)(r^2 - b^2 - \rho^2) \right\} \quad (19)$$

したがって、直線歯形に対するラック歯形には尖点が生じないが、円弧歯形に対するラック歯形には、

$$X^2 - 2(r^2 - b^2 - \rho^2)X + (r^2 - b^2 + \rho^2)(r^2 - b^2 - \rho^2) = 0 \quad (20)$$

を満たす r において尖点が生じる。これを解くと、

$$X = (r^2 - b^2 - \rho^2) + \rho\sqrt{2(b^2 + \rho^2 - r^2)} \quad (21)$$

となり、(14)式を用いて変形すると、

$$r_c = \sqrt{\frac{1}{2\rho} \left\{ \rho(3b^2 + \rho^2 - r^2) - \sqrt{2(b^2 + \rho^2 - r^2)^3} \right\}} \quad (22)$$

図3 歯切りピッチ円半径と尖点の生じる位置の関係

となる。(22)式を満たす r_c と r の関係は図3の実線で示され、 r_c は $r = \sqrt{b^2 + 7\rho^2/9}$ のとき最大値 $\sqrt{b^2 + \rho^2/27}$ をとる。また破線は動径 r のとる範囲(15)式の限界を示している。図3において $r_c = r_{c1}$ のとき $r = r_1$ でラック歯形に尖点が生じ、曲線 AB の右側(曲線 BC については左側)ではラックが歯車の歯の内側から接することになる。すなわち ABC の内部では歯車とラックが干渉を起こす。したがって、尖点の生じないラック歯形の存在する範囲は GABCDH の内部である。ところが円弧歯形の動径の最小値は常に $\sqrt{b^2 - \rho^2}$ であるから、BCDE の内部は曲線 ABC で尖点が生じてしまう。したがって尖点が生じない有効なラック歯形の存在する範囲は斜線の部分である。しかし、 $r_c < \sqrt{b^2 + \rho^2/27}$ の場合に尖点が生じないためには、動径の最大値すなわち歯先円半径 r_{k1} はすくなくとも $r_{k1} \leq \sqrt{b^2 + 7\rho^2/9}$ でなければならないが、これは実用上の歯形としては考えられない。したがって、ラックの歯面に尖点が生じないための条件は、

$$r_c \geq \sqrt{b^2 + \rho^2/27} \quad (23)$$

である。

4.2 ホブのとがらないための条件

図4においてラックの左右の歯面が交わずに上部に直線部分が存在するための条件はつぎのようにして求める。いま、歯切ピッチ円と時計用歯車の歯面との交点を M, N とし、それに対応するラック歯形上の点(ピッチ線との交点)を M', N' とする。また、弧 MN の中心角

図4 ホブのとがり限界

を β とすると,

$$\widehat{MN} = \widehat{M'N'} = r_c \beta \quad (24)$$

となる. 一方, ラック歯形上の M', C' は歯車の歯形上の M, C に対応し, その動径は r_c, r_e であるから, それらの x 座標は(2)および(9)式より $x(r_c), x(r_e)$ となる. したがって, ホブのとがらないための条件は図4より,

$$r_c \beta > 2\{x(r_e) - x(r_c)\} \quad (25)$$

ここで, r_e は直線歯形と歯底のトロコイドとの接点の動径で, 図4と(10)式より,

$$\begin{aligned} y_k &= r_c - \frac{r_c^2}{r_e} \\ r_e &= \sqrt{r_c(r_c - y_k)} \\ &= \sqrt{r_c r_f} \end{aligned} \quad (26)$$

ここで r_f : 歯底円半径

(25)式において, 左辺と右辺の差が小さい場合にはホブの刃先が破損あるいは摩耗が起りやすく実用的ではないが, ここでは(25)式をもってホブのとがらないための条件とする.

以上で時計用歯車のホブ成立の条件が求められたが, ホブ成立の条件(1)を満足するか否かは容易に判別できる. しかし, ホブ成立の条件(2)はその限界を示す式が複雑であるので, 数値解法によって限界を求めなければならない. その数値計算に際しては歯車自体の限界を求め, その範囲内でホブ成立の条件(2)について調べるのが都合良いので, つぎに歯車自体の限界について述べる.

5. 歯車自体の限界

歯車自体の限界としてはつぎのことが考えられる.

(1) 歯車のとがり限界. 歯車の歯をはさむ両歯面の交点があらかじめ定められた歯先円の外になければならない.

(2) 直線歯形が存在すること. (26)式で求めた r_e の点Cより歯先側では有効な歯形であるが, 歯底側ではホブの先端が描くトロコイドとなる. したがって, 直線歯形が存在するためには円弧歯形と直線歯形との接点の動径 $\sqrt{b^2 - \rho^2}$ が r_e より大きくななければならない. すなわち,

$$\sqrt{b^2 - \rho^2} > r_e \quad (27)$$

(3) 歯元に有効な歯形が存在すること. (26)式よりわかるように r_c が大きくなると r_e も大きく, すなわち有効な歯形が短くなり, 時計用歯車としては不适当である. この限界は個々の歯車のかみあいより決定されるもので一様ではないが, ここではこの限界として歯元にも有効な歯形が存在する, すなわち,

$$r_0 > r_e \quad (28)$$

とする. ただし, r_0 は歯車のピッチ円半径である.

6. ホブ切り可能な範囲

上に求めた条件により時計用歯車のホブ切り可能な歯形の範囲を求める.

6.1 $r_c = r_0$ の場合

歯切ピッチ円半径 r_c の値によってホブ切り可能な範囲が異なる. まず, r_c を歯車のピッチ円半径 r_0 とした場合のホブ切り可能な b と ρ の関係を求めると図5のようになる. この場合には, ホブ成立の条件(1)は(23)式において $r_c = r_0$ とおき変形すると,

$$\left(\frac{b}{r_0}\right)^2 + \frac{(\rho/r_0)^2}{27} \leq 1 \quad (29)$$

となり, 歯車の種々の因子には影響されず, すべて同じ曲線となる. 他の条件に関係する因子としては, ホブ成立の条件(2)は歯数・歯厚・歯元のたけ, 歯車自体の限界(1)は歯数・歯厚・歯末のたけ, 歯車自体の限界(2)は歯数・歯厚・歯元のたけである. また, 歯車自体の限界(3)は常に満足している. このことを考慮して, ある歯数および歯厚

図5 ホブ切り可能な範囲 (1)

図6 ホブ切り可能な範囲の実例 (1)

図 7 ホブ切り可能な範囲の実例 (2)

図 8 ホブ切り可能な範囲 (2)

に対して 1 枚の図に描き, 図 6 および図 7 に示す. 両図においてホブ成立の条件(2)と歯車自体の限界(2)は歯元のたけをパラメータとするので, 図 5 の DF に相当する曲線は省略してある. また, 歯車自体の限界(1)は歯末のたけにより異なる.

ところで, 図 6, 図 7 は歯元のたけを 1.0 m から 2.0 m まで変化させたのであるが, 図 6 の 1.8 m 以下や図 7 の 1.4 m 以下のように図 5 の DE に相当する曲線がなく, BF に相当する曲線がある場合には, ホブ成立の条件(2)は他の条件を満たす範囲内では満足されていることを示している. また, 図 7 の歯元のたけ 2.0 m の場合には図 5 の BF, DE に相当する曲線がないが, これはホブ成立の条件(2)を満たす歯形の範囲が存在しないことを示している. ただし m はモジュールである.

図 6, 図 7 からわかるように歯元のたけが大きくなるほどホブ成立の条件(2)による制限は大きく, 歯数が小さくなるほどその制限は大きい. したがって, 歯数の小

さいカナでは図 7 に見られるように, たとえ歯厚が小さくとも大きな h_f の値に対してはホブの歯先がとがるためにホブ切り可能な範囲は小さくなり ($h_f=1.6, 1.8$ m の場合), さらに大きくなると ($h_f=2.0$ m の場合) ホブ切りできる歯形の範囲は存在しなくなる.

6.2 $r_c = \sqrt{b^2 + \rho^2/27}$ の場合

$r_c=r_0$ の場合にはホブ成立の条件(1)により $b^2 + \rho^2/27 > r_0^2$ の範囲の歯形はホブ切りできない. そこで, 歯切ピッチ円半径をラック歯形に尖点が生じない最小値 $\sqrt{b^2 + \rho^2/27}$ とした場合について考える. これは歯切ピッチ円が与えられてからラック歯形が決定されるので転位とは異なる. そのときの範囲は図 8 のようになる.

この場合にはホブ成立の条件(1)は考慮する必要がないが, 歯車自体の限界として(1), (2)のほかに(3)を加える必要がある. 関係する因子は歯車自体の限界(3)を除き $r_c=r_0$ の場合と同じである. また, 歯車自体の限界(3)は歯車自体の限界(2)と同様に歯数・歯元のたけが関係する. そこで, $r_c=r_0$ の場合と同じ方法で整理すると図 9, 図 10 のようになる.

両図から, $r_c = \sqrt{b^2 + \rho^2/27}$ のときにも歯数が多い

図 9 ホブ切り可能な範囲の実例 (3)

図 10 ホブ切り可能な範囲の実例 (4)

表 1 歯車の分類

歯 車 (対象歯数)	h_f/m	歯 数 ($r_c=r_0$)			歯 数 ($r_c=\sqrt{b^2+\rho^2/27}$)		
		A	B	C	A	B	C
車 $s=t/2$ (20枚以上)	1.0	20以上	—	—	20以上	—	—
	1.2	20 //	—	—	20 //	—	—
	1.4	20 //	—	—	31 //	20~30	—
	1.6	20 //	—	—	47 //	20~46	—
	1.8	23 //	20~22	—	67 //	20~66	—
	2.0	34 //	20~33	—	92 //	20~91	—
カ ナ $s=2t/5$ (8~20枚)	1.0	8以上	—	—	8以上	—	—
	1.2	8 //	—	—	14 //	8~13	—
	1.4	10 //	8~9	—	—	8~20	—
	1.6	17 //	8~16	—	—	8~20	—
	1.8	—	10~20	8~9	—	8~20	—
	2.0	—	12~20	8~11	—	10~20	8~9
カ ナ $s=t/3$ (4~10枚)	1.0	4以上	—	—	6以上	4~5	—
	1.2	5 //	4	—	—	4~10	—
	1.4	9 //	5~8	4	—	5~10	4
	1.6	—	6~10	4~5	—	6~10	4~5
	1.8	—	8~10	4~7	—	7~10	4~6
	2.0	—	10	4~9	—	9~10	4~8

ほど、歯元のたけが小さいほどホブ成立の条件(2)による制限は小さいことがわかる。

7. 歯車の分類

このようにホブ切り可能な範囲の図は複雑なうえに歯数ごとにこの図が必要となり不便である。しかし、さきに述べたようにこの図を複雑としているものはホブ成立の条件(2)である。ところで、上のいくつかの例によってわかるようにホブ成立の条件(2)によって歯車をつぎの三つに分けることができる。

A: 歯車として存在するものなら、すべての歯形が条件(2)を満足する。

B: ある歯形のみ条件(2)を満足する。

C: どのような歯形も条件(2)を満足しない。

この分類は歯数、歯切ピッチ円半径、歯厚および歯元のたけによって決まる。そこで、歯厚は車では $t/2$ 、カナでは $t/3$ および $2t/5$ とし、歯切ピッチ円半径は r_0 および $\sqrt{b^2+\rho^2/27}$ とする。このとき、ある歯元のたけに対して歯数によって分類する。その結果を表1に示す。

ただし対象とする歯数は車の場合 20 枚以上、 $s=t/3$ のカナは 4~10 枚、 $s=2t/5$ のカナは 8~20 枚とした。たとえば、車の $h_f=1.6\text{ m}$ の場合には、 $r_c=r_0$ のときは歯数 20 枚以上のすべての歯車が A に属し、 $r_c=\sqrt{b^2+\rho^2/27}$ のときは歯数 47 枚以上が A、20~46 枚が B に属す。

表1を用いると C 歯車はホブ切り不可能であり、また $r_c=\sqrt{b^2+\rho^2/27}$ の場合には A 歯車はすべての歯形がホブ切り可能であり、B 歯車についてのみ詳しくホブ成立の条件(2)について調べればよい。 $r_c=r_0$ の場合には $r_c=\sqrt{b^2+\rho^2/27}$ と同様にして求めたものに、ホブ成立の条件(1)を考慮することによりホブ切り可能な範囲が求まる。

8. 結 言

以上で求めた結果より時計用歯車のホブ切りの可能性の傾向がわかった。まず、車 ($h_f=1.57\text{ m}$ が多く用いられている)においては歯数が大きいので、 $r_c=r_0$ としても $\sqrt{b^2+\rho^2/27}$ が r_0 より小さな歯車はホブ切り可能である。しかし、 $\sqrt{b^2+\rho^2/27}$ が r_0 より大きいときにはラック歯形の側面に尖点が生じるのでホブ切りが不可能となる。そこで、 $r_c=\sqrt{b^2+\rho^2/27}$ とすることにより、これを防ぐことができる。このとき歯数が小さい歯車ではホブ成立の条件(2)によりホブ切りできぬ歯形もあるが、歯数が大きい歯車では歯車として存在するものなら、すべての歯形がホブ切り可能である。現在、一般に車として使われている歯車はこれに属す。

ところが、カナの場合には歯数も小さく、歯元のたけも車に比べて大きいので、ホブ切りできない歯車が多い。

文 献

- 1) 成瀬: 歯車の研究, (1960) 養賢堂。
- 2) 菅沼: 日本時計学会誌, (1957-12) 22。
- 3) 菅沼: 日本時計学会誌, (1958-3) 7。
- 4) 菅沼: 日本時計学会誌, (1958-6) 7。
- 5) E. Buckingham: Analytical Mechanics of Gears, (1949), McGRAW-HILL
- 6) 佐藤: 歯車の歯形とねじ面, (1949) 碩学書房。
- 7) 森田: 精密機械, 23, 11 (1957-11) 524。