研究

接触機構に関する研究 (第4報)*

——モンテカルロ法による接触現象の解析方法の評価——

瀬戸 口 良 三**

The Study on the Mechanism of Contact Phenomena of the Solid (The 4th Report)

——The Evaluation on the Analysis Method about the Contact Phenomena

by the Monte-Carlo-Method-Simulation——

Ryōzo SETOGUCHI

In the 1st report, the 2nd report, and the 3rd report concerned with the study on the mechanism of contact phenomena of the solid, the quantities about the state of the contacts between the static contact and the dynamic contact caused by the relative motion has been determined.

In this paper, the method of the analysis and evaluation about the quantities of the state of contacts is applied on the rugged surfaces, which is wellknown for the quantities of the state of contact, made by the Monte-Carlo method simulation, and then it is proved by evaluating the accuracy of the method and the surface structures, especially the geometrical relations, that the method is proper.

The main evaluated affairs are as refer:

- (1) The determination method of the statistical group of the solid surface and its accuracy.
- (2) The 1st differential order between the roughness amplitude distribution and the height distribution of the asperities.
- (3) The equality of the diameter between the asperity and the calculation basic on the roughness curve.

1. 緒 言

これまで報告したごとく、接触の状態量を決定する筆者の手法は、あらさの定常性を基礎に表面の一断面の幾何学的形状を示すあらさ曲線の固有の確率的性質を利用し、直交する2方向のあらさ曲線より、接触の状態量を規定する標本集団の一つである突起の線密度と面密度を第1段階として先ず決定し、第2段階としてつぎに接触の状態量の出現頻度を示す状態量に関する密度関数を決定し¹⁾、最後に第3段階としてこれらの諸関係を基礎に接触状態に対応する確率構造に従い、確率論により基本的状態量である接触点と接触面積を決定する²⁾過程をとる。

さらにこの手法をその理論構造に従って拡張し静的接触のみならず動的接触の状態量をも決定した³⁾。

この手法のもっとも基本的表示は表面の3次元特性を示す確率表示と統計集団の大きさを決定する関係である。

たとえば高さ z の接触点の面密度 n は、

$$\begin{aligned} n &= n_x \cdot \frac{1}{d_y} = n_y \cdot \frac{1}{d_x} \\ &= n_x \cdot \frac{1}{\bar{l}_y} = n_y \cdot \frac{1}{\bar{l}_x} \\ &= n_x \cdot n_{oy} = n_y \cdot n_{ox} \end{aligned} \quad (1)$$

ここで

n_x, n_y は x 方向, y 方向の単位長さにおいて、幅 d_y, d_x の小空間の高さ z に出現する突起の数すなわち接触点の線密度

$\bar{l}_x, \bar{l}_y$ は突起の平均的直交成分

n_{ox}, n_{oy} は突起の線密度

であるから、統計集団の大きさを示す突起の面密度 n_0 は

$$n_0 = n_{ox} \cdot n_{oy} \quad (2)$$

となる。

また確率表示の一つである接触点に関する密度関数 $p_n(z)$ は

$$p_n(z) = -\frac{\dot{q}(z)}{2n_{ox}\phi_{xm}} = -\frac{\dot{r}(z)}{2n_{oy}\phi_{ym}} \quad (3)$$

ここで

$\dot{q}(z), \dot{r}(z)$ はあらさの振幅の分布 $q(z), r(z)$ の一次微分

ϕ_{xm}, ϕ_{ym} は x 方向, y 方向の傾角の余接の平均

*原稿受付 昭和47年3月8日。昭和46年度精機学会東北支部講演会(昭和46年3月13日)にて発表。

**正 会 員 東北大学工学部(仙台市荒巻字青葉)

であり、さらに接触面積に関する密度関数 $p_a(z)$ は

$$p_a(z) = -2\lambda_e \cdot A \cdot n_{ox} \cdot \phi_{xm} \frac{d}{dz} \left\{ \frac{Q^*(z) \cdot R^*(z)}{q(z)} \right\} \\ = -2\lambda_e \cdot A \cdot n_{oy} \cdot \phi_{ym} \frac{d}{dz} \left\{ \frac{R^*(z) \cdot Q^*(z)}{r(z)} \right\} \quad (4)$$

ここで

λ_e は接触点の負荷面積等価形状係数

A は変形能

$Q^*(z)$, $R^*(z)$ は Abbott の負荷曲線であり、あらさの振幅の累積分布関数を $Q(z)$, $R(z)$ とするとそれぞれ $\{1-Q(z)\}$, $\{1-R(z)\}$ の補関数 (共役関数) である。

この場合 $A \cong 1$ であると接触形態は突起が貫入する機構であり、 $A > 1$ であると突起が変形する機構に対応することはこれまで報告したとおりである。

これらの基本的表示がこの手法の核心をなし、状態量の評価の基礎となることはこれまでの報告における種々の考察より明らかである。それゆえこの報告ではこれらの基本的表示の妥当性について評価することにする。この場合、これまで報告した解析の過程から考えると明らかごとく、評価平面は任意の凹凸面の一つを選ばば必要十分であり、また評価には状態量既知の面を必要とすることも明らかである。ここでは、モンテカルロシミュレーションにより創成した凹凸面を用いたが、これは実際の凹凸状態の 3 次元的な定量的測定がきわめて困難であるという事情によるものである。この場合これらの基本的表示を導いた過程を考えると当然帰結されることであるが、評価する事項としては

(1) 凹凸表面の統計集団の大きさを定める一つの基本量である突起の面密度の決定方法とその精度に関すること
(2) あらさの振幅の分布と突起の頂点の分布の間に存在する一次微分の関係

(3) あらさ曲線に基づき算定した突起の平均直径と実際の突起の平均直径の等価関係
があり、これらの評価で必要十分となることは明らかである。

2. シミュレーションの方法

評価平面上の凹凸は傾角一定 ($\theta = 45^\circ$) の円すい突起と考え JIS-Z-9031 の一様乱数表により創成した。

この場合突起の中心位置の座標を (x, y) で表示し、その頂点の高さを z で表示すると突起は (x, y, z) の 1 組の座標として表わされるから、評価平面上に座標を設定し、この (x, y, z) を一様乱数表より抽出し、凹凸面を創成している。

またシミュレーションはこの乱数表の終了までとしたが、これは乱数表の一巡で一応評価するのに十分な標本の大きさに達することと評価にかなり都合のよい凹凸面が得られることによるものである。

さらにこの場合傾角を一定の 45° に設定したが、これは評価面積をシミュレーションするのに適当な大きさに選ぶと同時に、評価するのに必要十分な標本集団 (突起の数) の大きさを得るためである。

一般にラップ加工面の傾角は 2° から 20° の範囲にあるので $\theta = 10^\circ$ にまず設定したが、この傾角 θ では十分な標本の大きさを得るにはきわめて大きな評価面積を必要とするのでシミュレーションするのに不適当であるから、評価の実質面積を小さくするため高さを変えず傾角を 45° に設定した。

これは長さにおいてほぼ $1/10$ 、面積においてほぼ $1/100$ に縮小したものと等価である。

ここでは実際の長さ 1μ を 5000 倍に拡大し作図しており、それゆえシミュレーションにもちいた大きさは横 1000 (mm)、縦 1000 (mm) であるから面積拡大率は 2.5×10^7 倍で実際の評価全面積は $4 \times 10^{-2} (\text{mm}^2)$ に該当しており、必要十分な評価面積に達している。

従ってこの評価平面の実際の大きさは横 200 (μ)、縦 200 (μ) の大きさになる。

この評価面積の横軸を x 、縦軸を y とし、これを 1μ の間隔で分割し分割点に番号を付与し座標の位置を定めているから、JIS-Z-9031 に規定した方法に従い乱数表から 3 けたの乱数を取り、この乱数を 200 で割りその剰余で新しい一様乱数列を作り突起の頂点の位置を決定すると同時に、 z に対しては 2 けたの乱数をもちい、高さ 0μ から 10μ の範囲で小数点 1 位まで決定している。従って 8 けたの乱数を 1 組としている。

また、この空間的広がりを持つ突起を平面上にえがくため、平面上に投影し等高線で突起を表示している。

シミュレーションにおける制限条件としてはすでに出現している突起と新しく出現する突起の間に完全なオーバーラップを認める場合 (これをモデル(A)とする) と半径方向で 1μ 以下のオーバーラップのみを認める場合 (これをモデル(B)とする) を考え 2 とおりの凹凸面を創成した。

この制限条件により半径 1μ 以下の突起は測定精度以下となるから、創成される突起の高さ z は 1μ から 10μ の範に設定されることになる。

これまで述べた方法で創成した凹凸面の一部分を図 1 として示すことにする。

図 1 (a) 乱数により創成した凹凸面 (モデル (A))

図 1 (b) 乱数により創成した凹凸面 (モデル (B))

3. 創成凹凸面の解析と評価

乱数により創成した凹凸面を筆者の手法に従い解析するため、この凹凸面に直交する 2 走査線を設定した。

この場合評価平面においてももっとも長く走査線を設定するため、走査線を対角線に一致させた。

この対角線の一方を x 方向、他の方向を y 方向として以下解析している。

したがってこの走査線の長さは 0.283 (mm) である。

この走査線と交わる突起の数を N_{ox} , N_{oy} とすると、モデル (A) では $N_{ox}=30$ (ヶ), $N_{oy}=35$ (ヶ) であるから突起の線密度 n_{ox} , n_{oy} は既報^{1),2)} の定義に従うとそれぞれ

$$n_{ox} = \frac{30}{283} = 0.106 \text{ (ヶ/μ)}$$

$$n_{oy} = \frac{35}{283} = 0.124 \text{ (ヶ/μ)}$$

となり、それゆえその平均 $n_{o\theta}$ は 0.117 (ヶ/μ) となる。

それゆえ、平均的直交成分 $\bar{l}_x$, $\bar{l}_y$ は(1)式の関係を参照すると、

$$\bar{l}_x = \frac{1}{n_{ox}} = 9.428 \text{ (μ)}$$

$$\bar{l}_y = \frac{1}{n_{oy}} = 8.080 \text{ (μ)}$$

となるから、その平均 $\bar{l}$ は 8.570 (μ) となる。

一方モデル (B) では $n_{ox}=31$ (ヶ), $n_{oy}=33$ (ヶ) であるから、同様にして

$$n_{ox} = \frac{31}{283} = 0.110 \text{ (ヶ/μ)}$$

$$n_{oy} = \frac{33}{283} = 0.117 \text{ (ヶ/μ)}$$

となるから、その平均 $n_{o\theta}$ は 0.113 (μ) となる。

したがって $\bar{l}_x$, $\bar{l}_y$ はそれぞれ

$$\bar{l}_x = 9.123 \text{ (μ)}$$

$$\bar{l}_y = 8.570 \text{ (μ)}$$

となり、その平均 $\bar{l}$ は 8.838 (μ) となる。

つぎにこれらの解析結果を基礎に(2)式と定義に従い突起の面密度 n_o , 全突起数 N_o を求めた。

この計算結果を表 1 として示す。

表 1 のなかの実測値はこの創成凹凸面の全突起数を実際に数え出したものであり、参考値とは平均的直交成分(分布の長さ) $\bar{l}$ の幅でこの凹凸面に平行走査線群を設定しこれと交わった突起の数を実際に数え出したものである。

またモンテカルロ法においてもっとも問題となるサンプリングにおける標本の大きさの影響について検討するため、標本の大きさのある程度変更し得る余地を残しているモデル(B)の凹凸面を選び JIS-Z-9031 の乱数表において乱数列の組合せを変え、さらに一巡させ新しい凹凸面を得た。

これをモデル(B')の面としこれまでと同様に解析した。このモデル(B')の解析結果とモデル(B)の解析結果を比較したものが表 2 である。

一方前述の幅 $\bar{l}$ の平行走査線群に沿って凹凸面の等高線に従いあらさ曲線を作図した。

表 1 突起の面密度 (n_o) と突起の数 (N_o)

		実 測 値	計 算 値	参 考 値
モデル(A)	N_o (ヶ)	550	544	539
	n_o (ヶ/μ ²)	1.375×10^{-2}	1.360×10^{-2}	
モデル(B)	N_o (ヶ)	545	511	428
	n_o (ヶ/μ ²)	1.363×10^{-2}	1.278×10^{-2}	

評価面積 (A_0) 4×10^4 (μ²)
あらさ曲線の測定長さ 283 (μ)

表 2 標本の大きさと精度

		実 測 値	計 算 値	参 考 値
モデル(B)	$N_0(\text{ヶ})$	545	511	428
	$n_0(\text{ヶ}/\mu^2)$	1.363×10^{-2}	1.278×10^{-2}	
モデル(B')	$N_0(\text{ヶ})$	738	729	662
	$n_0(\text{ヶ}/\mu^2)$	1.845×10^{-2}	1.823×10^{-2}	

評価面積 $4 \times 10^4 (\mu^2)$ あらさ曲線の測定長さ 283 (μ)

表 3 接触の状態量に関する因子

	モ デ ル A		モ デ ル B	
	最大高さ	平均高さ	最大高さ	平均高さ
ν	1	1	2	2
γ_2	0	0	0.001	0.00033
γ_1	0.022	0.035	0	0.00277
ϕ_m	0.537	0.725	0.505	0.660
$n_0\theta$	0.117		0.113	

あらさ振幅の分布: $q(z) = \Sigma \gamma_i z^i$

この一部分を図 2 として示した。

このあらさ曲線の測定長さ 10 m (評価平面上で 2mm) の範囲であらさの振幅の分布を求めると図 3 の実線のヒストグラムが得られる。

また突起の頂点の分布を実際の凹凸面上で求めたのが図 3 の破線である。

さらにこの図の 1 点鎖線はあらさの振幅の分布を平均高さ周辺を基準として定めた場合であり、2 点鎖線は最大高さ周辺を基準に定めた場合の分布である。

それゆえそれぞれの基準高さの分布を最大高さより 4 μ の範囲で $\Sigma \gamma_i z^i$ として近似的にすると表 3 の結果を得る。

この表中の ϕ_m はそれぞれの基準高さ周辺においてあらさ曲線上で決定したものである。

ここでさらに表面凹凸状態の定量的解析と同時に統計集団の大きさの影響をも調べるため、評価面積をこれまでのほぼ 1/2 に選び凹凸の出現状態すなわち実際の接触問題では粗面 - 真平面の接触における接触点の出現状態を(2)式と(3)式により算定した。

この場合あらさの振幅の分布としては平均高さ周辺に基準をおいて定めた値をもちいるので、表 3 の計算にもちいた因子のなかで ϕ_m としてモデル (A) で 0.725、モデル (B) で 0.660 の値をもちいている。

また評価面積 A_0 はあらさ曲線の長さが評価平面上で 2 mm に達する大きさを選んだのでモデル (A) で $1.714 \times 10^4 (\mu^2)$ 、モデル (B) で $1.768 \times 10^4 (\mu^2)$ になる。

この条件に基づく解析結果を表 4 として示した。

図 2 乱数により創成した凹凸面のあらさ曲線

実線: あらさの振幅の分布, 破線: 突起の頂点の分布, 1 点鎖線: 平均高さ周辺の振幅の分布, 2 点鎖線: 最大高さ周辺の振幅の分布

図 3 振幅の分布と突起頂点の分布

なお表 4 の括弧で示した値は $\Sigma \gamma_i z^i$ として近似的にした場合実際の値より偏倚する領域を実際の分布曲線の値で算定した結果である。

さらに最大高さ周辺を基準とする分布に基づく解析結果と平均高さ周辺を基準とする分布に基づく解析結果を定量的に比較し、その相違を明らかにするため表 3 よりそれぞれの条件に対応する因子を選びこれまでと同様に解析した結果が図 4 である。

最後にあらさ曲線より求めた突起の平均直径と実際の突起の平均直径の等価関係の評価するため実測すると同時に計算した結果を図 5 として示した。

4. 考 察

突起の面密度 n_0 または評価面積内の全突起数 N_0 の解析において実際の長さが 0.283 mm の走査線と交わる突起の数は前述のごとくモデル (A) で 33(ヶ)、モデル (B) で 32(ヶ) である。

この標本の大きさに基づき、筆者の手法に従い計算し

表 4 突起の出現状態に関する解析結果

モデル(A)	接近量 (μ)	実測値(ヶ)	突起頂点の分布 による計算値	あらしの振幅の 分布による計算値
10~9(μ)	1	48	47	48
9~8	2	49	47	48
8~7	3	47	47	48
7~6	4	47	47	48
6~5	5	48	47	48

モデル(B)	接近量 (μ)	実測値(ヶ)	突起頂点の分布 による計算値	あらしの振幅の 分布による計算値
10~9(μ)	1	8	6	5
9~8	2	7	6	6
8~7	3	8	7	7
7~6	4	10	8	8
6~5	5	20	14	9 (14)
5~4	6	23	15	10 (24)

$A_0: 1.768 \times 10^4 (\mu^2) \phi_m: 0.505$ (最大高さ) $\phi_m: 0.660$ (平均高さ)

図 4 モデル(B)に基づく接触点の評価

た場合の精度は表 1 よりわかるごとくモデル (A) で 1.1 %, モデル (B) で 6.2 % になる。

また、表 1 からただちに全評価平面において $\bar{l}$ の間隔で設定された平行走査線群と交わる突起の数 (表 1 の参考値) が評価平面上の全突起の数 (表 1 の実測値) に近づくほど計算値の精度がよくなるのがわかる。

筆者の手法に従えば、統計集団の大きさの算定における評価誤差は平均的直交成分 $\bar{l}$ の精度に帰因するもので必要十分な精度の $\bar{l}$ には突起の位置、形状、向き、さらには大きさを統計的に平均化するに必要十分な標本の大きさが必要である。

一方、モデル (A) とモデル (B) では標本の大きさが同じであるにもかかわらず評価の誤差が大きく異なるのは

図 5 突起の平均直径

突起の大きさの分布が異なりモデル (B) ではきわめて小さな突起をも含むことに帰因するとともに、突起の占有密度が小さいことに帰因すると考えられる。

このことをモンテカルロ法として考えるとサンプリングが十分であるということになる。

そこでサンプリングの影響を調べることにしたがこれが表 2 である。

この場合乱数表を 2 巡して作ったモデル (B') の面の標本の大きさは 38 (ヶ) になりモデル (B) より 6 (ヶ) 増加している。

この結果モデル (B') における評価の誤差は 1.2 % に減少しモデル (A) と同じ程度の精度になる。

それゆえモンテカルロ法におけるサンプリングの影響を考慮すると、筆者の統計集団の大きさの決定方法はその精度を含め必要十分であるといえる。

一方、図 3 から突起の頂点の分布とあらしの振幅の分布との間に存在する一次微分の関係が保存されていることは明らかである。

この関係の定量的評価として、さらに表 3 に基づく接触点の出現状態について解析した結果が前述の表 4 である。

この接触点に関する解析は評価事項(1), (2)のすべてを包括し評価するものであり同時に標本集団の大きさの影響についても、評価面積内の実測結果と比較すると必要十分な評価となっており、筆者の接触の状態量の評価の手法の妥当性を示している。

また、図 3 において 1 点鎖線で示した平均高さ周辺を基準とする分布と 2 点鎖線で示した最大高さ周辺を基準とする分布の間には明らかな差異があることが認められる。

一般に統計的に考えると、状態量の算定にはあらし曲線を構成する突起が必要十分な数に達する高さ周辺の分布に基礎をおくのが本質的であることはもち論、これが平均高さ周辺を基準とする分布であることは自明のことである。

これは、図 4 に示した解析結果よりまた明らかであ

り、実際の状態量の算定において重要であることをここでとくに指摘しておく。

図5においては突起の直径の出現状態について解析したが、これは真実接触面積の評価に必要な接触面積に関する密度関数を定める基本的関係である突起の平均的負荷面積を決定するのにもちいた関係について評価するものであり、この結果あらし曲線より求めた平均直径と実測した突起の平均直径の間にはほとんど相異がなく、わずかにモデル(A)で1割弱の評価誤差が生じる程度であり、評価事項(3)で問題にした等価関係が存在することが明らかとなった。

それゆえ、たとえば変形能 A の解析に対しほとんど影響がないから A の解析は接触機構の解析に対し必要十分であり、これまで報告したごとく接触の状態を十分に表示するものといえる。

5. 結 論

この報告では、第1報で報告した接触の状態量の評価においてもっとも重要な基本的確率表示とそれを構成する種々の関係についてモンテカルロ法により創成した凹凸面をもちい詳細に解析評価した。

その結果を要約すると

(1)統計集団の大きさを決定する筆者の手法は妥当であり、その精度は必要十分であることを明らかにした。

(2)基本的確率表示の一つである接触点に関する密度関数の中に保存される一次微分の関係が実際に存在していることを証明した。

(3)あらし曲線に基づく突起の平均直径と実際の平均直径の間に等価関係が存在することを証明した。

これは接触面積に関する密度関数が妥当であることを意味している。

これらの解析で筆者の手法の妥当性が明らかになったが、さらにこのシミュレーションによる解析結果によると実際の評価に必要な関係として

(4)あらし曲線を構成するに必要な十分な標本の大きさに達する高さを基準とする分布である平均高さ周辺の分布により接触点を算定する必要がある、最大高さ周辺の実測値を基準とする分布によると、大きな評価誤差が生ずることを明らかにした。

最後にご指導いただいた東化大学佐藤健児教授にお礼を述べ謝辞とする。

参 考 文 献

- 1) 瀬戸口良三：接触機構に関する研究（第1報），精密機械，**37**，12（1971）。
- 2) 瀬戸口良三：接触機構に関する研究（第2報），精密機械，**38**，3（1972）。
- 3) 瀬戸口良三：接触機構に関する研究（第3報），精密機械，**38**，6（1972）。
- 4) 日本規格協会：ランダム抜取方法 JIS-Z-9031（1956）。
- 5) 宮武 修・中山 隆：モンテカルロ法，日刊工業，（1967）。