衝撃引張りによる塑性波の伝ば* (第2報)

——ひずみ速度依存性理論の検討——

郡 利矩** 千田豊満** 金田隆義***

Propagation of Longitudinal Plastic Waves Produced by Tensile Impact

(The 2nd Report)

—Study of the Rate-Dependent Theory—

Toshinori KORI, Toyomitsu SENDA, Takayoshi KANATA

The Malvern's theory is discussed which was proposed to explain the propagation of longitudinal plastic waves in the rate-dependent materials, comparing with the Karman's theory. Especially, we discuss whether the Malvern's theory can explain the propagation of plastic waves in various pre-strained aluminum.

And the four elements rheological elastic-viscoplastic model is considered to illustrate the phenomena. The main results obtained are as follows.

1) The Malvern's theory predicts on plastic front. And this prediction coincides with the experimental results. This fact suggests the material possesses viscosity.

2) The propagation velocities of plastic strains calculated from the Malvern's theory coincide with the experimental results for two kinds of pre-strained aluminum, although this theory overestimates the velocity of the small strain.

3) The dynamic stress-strain curves in various distance from the impact end are calculated from the Malvern's theory.

1. 緒 言

試作した回転円板形成の衝撃引張試験機で、半無限長と考えられる銅とアルミニウムリボン片に、衝撃引張りを与え、それにより発生した塑性波の伝ば状態を、軸方向にはりつけた塑性用ひずみゲージでひずみ-時間関係を測定することにより観察し、その結果は前報¹⁾で報告した。そして、銅およびアルミニウムの処女材では、ひずみ速度の材料におよぼす効果を無視した *kármán* の理論²⁾ から計算された伝ば速度と実測された値は良好な一致を示すことを報告した。しかし、材料に前ひずみを加え、伝ば速度を測定した場合、伝ば速度は *kármán* の理論値に等しいか、またはそれより大で前ひずみ量の増加とともに、両者の値の差は増加することも示した。そして、この事実が同種の材料であっても、*kármán* の理論に対する評価³⁾ のわかれる一つの原因であることも示した。

したが、塑性ひずみの伝ば状態を説明するために提案された理論を評価する場合、前ひずみの大きさに違いがあっても現象を十分に説明するかどうかを調べるこ

とは必要欠くべからざる要件と考えられる。ひずみ速度の材料におよぼす効果を考慮した理論は *Malvern*⁴⁾ により提案され、*Shea*⁵⁾、*林*⁶⁾ら、*Rippeger*⁷⁾ら、*Wood*⁸⁾らや*西山*⁹⁾らによって検討されたが、いずれも端面に与える衝撃方法の違いや、材料のひずみ速度依存性をあらわす構成方程式の違いにより塑性ひずみの伝ば状態がどのように変化するかを観察したにすぎず、また実験結果と比較するときは、対象とする材料の前ひずみの大きさを変えていないため、この理論を十分に検討しているとはいえない。そこで、本報では *Malvern* の理論を本実験条件のもとに適用し、ひずみ-時間関係、ひずみの伝ば速度および動的応力-ひずみ 関係を得、前報で得られた実験結果と今回行った実験結果を用い、前ひずみの大きさに違いがあっても、*Malvern* の理論が塑性ひずみの伝ば状態を説明することができるかどうかを検討する。

また、*Malvern* の理論と4要素レオロジ弾粘塑性模型の共通性に着目し、*Malvern* の理論により得られた計算結果と実験結果を用いレオロジ模型にも考察を加える。

本報で用いた実験結果は、前報で用いたのとまったく同一の装置と実験方法により得られたものである。

2. 理論および数値計算

2.1 基礎式

*原稿受付 昭和47年8月29日。第22回塑性加工連合講演会(昭和46年11月12日)にて発表。

**正 会 員 愛媛大学工学部(松山市文京町三番)

***愛媛大学、大学院

ひずみ速度の材料におよぼす効果を考慮した Malvern の理論は, つぎの微分方程式で与えられる. まず, 塑性域では,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial v}{\partial t} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2)$$

$$E_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial t} + g(\sigma, \varepsilon) \quad (3)$$

ここで, σ : 公称応力, v : 粒子速度, ε : 公称ひずみ, E_1 : 縦弾性係数, x : 衝撃端からの距離, t : 時間, σ : 一定速度. 式(1)は運動方程式を示し, 式(2)は適合方程式を示し, そして式(3)は材料の塑性域での動的特性をあらわす構成方程式を示す. つぎに, 弾性域では式(3)のかわりにつぎの式が適用される.

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = E_1 \quad (4)$$

Malvern は関数 $g(\sigma, \varepsilon)$ として, 過剰応力 $\sigma - f(\varepsilon)$ の関数, すなわち衝撃応力と真の静的降伏応力間の差の関数が用いられなければならないとし, 数値計算への応用を考慮し, つぎの線型式を提案した.

$$g(\sigma, \varepsilon) = k[\sigma - f(\varepsilon)] \quad (5)$$

ここで, k : 材料定数, $f(\varepsilon)$: 静的応力-ひずみ関係.

また, 式(3)のかわりに次式を用いたのが Kármán の理論である.

$$\sigma = f(\varepsilon) \quad (6)$$

2.2 初期および境界条件

計算はアルミニウムを対象としておこない, 静的応力-ひずみ関係は, 数値計算の容易さのため, およびレオロジ模型との関連性を考慮し, 直線硬化弾性とし, 2 直線で近似した. したがい, 静的応力-ひずみ関係を示す $f(\varepsilon)$ は塑性域で次式となる.

$$f(x) = E_2 \varepsilon + \sigma_0 \quad (7)$$

ここで, E_2 : 材料の塑性域での加工硬化係数, σ_0 : 材料定数. 結局, 式(3)の構成方程式は次式となる.

$$E_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + k[\sigma - (E_2 \varepsilon + \sigma_0)] \quad (8)$$

そして, 前ひずみの大きさに違いがあっても Malvern の理論が塑性ひずみの伝ば状態をよく説明するかどうかを観察するため, 前ひずみ 3% と前ひずみ 10% の 2 種類のアルミニウムに対し, 計算を施こした. 図 1 に細線で前ひずみ 3% と前ひずみ 10% のアルミニウムの静的応力-ひずみ関係を示し, それらを直線硬化弾性とし, 2 直

表 1 材料定数

材 料	材料 A	材料 B
$E_2 = \partial \sigma / \partial \varepsilon$ (kg/mm ²)	55	16
σ_0 (kg/mm ²)	6.2505	9.2189
ε_y (降伏ひずみ) (%)	0.09	0.132
E_1 (弾性定数) (kg/mm ²)	7000	
k (sec ⁻¹)	0.5×10^6	
ρ (kg·sec ² /mm ⁴)	2.75×10^{-10}

図 1 応力-ひずみ関係

図 2 端面の衝撃条件

線で近似した静的応力-ひずみ関係を, それぞれ材料 A と材料 B として, 同図中に太実線で示す. したがい, E_2 と σ_0 として表 1 に示す値で計算を実行した.

衝撃端面の衝撃条件は, 本実験では測定されていないため, 図 2 に示すように, 200 μ sec で直線的に 15 m/sec まで立上り, 以後この一定速度 15 m/sec が保たれると仮定した. また材料の他の定数を表 1 に示す.

2.3 数値計算法

この問題は既に多くの研究者^{9), 10)}により数値計算がなされており, 概略をつぎに示す. つまり, 式(1), (2), (3)はつぎの特性曲線をもつ.

$$\frac{dx}{dt} = \pm C_0 = \pm \sqrt{E_1/\rho} \quad (9)$$

および

$$dx=0 \quad (10)$$

直線式(9)にそって微分関係

$$d\sigma \pm \rho C_0 dv = g(\sigma, \epsilon) dt \quad (11)$$

が成立し、直線式(10)にそって、

$$E_1 d\epsilon - d\sigma = g(\sigma, \epsilon) dt \quad (12)$$

が成立する。結局、式(1)、(2)、(3)系を積分するかわりに、相当微分関係式(11)と(12)を、それぞれ特性曲線式(9)と(10)にそって積分すればよく、式(11)と(12)を差分式に書きあらため、数値計算を施せば任意の位置のひずみ、時間、応力と粒子速度の関係を得ることが可能である。また、弾性範囲内では、材料はひずみ速度依存性を示さず、フックの関係が保たれるとした。なお、数値計算の際の時間きざみは $2 \mu\text{sec}$ とした。

3. レオロジ模型

材料の高速変形に対する力学レオロジ標型は、既に多くの研究者¹¹⁾によって議論されてきた。本報では、図3(a)に示す4要素弾粘塑性模型に考察を加える。図3(a)は、流体摩擦、ばねと固体摩擦が並列に連結され、さらにそれにばねが直列に連結されている。ここで、固体摩擦は一定応力 σ_y 以下では作動せず、したがって図中のAM間にはいかなるひずみも発生しない。そして、一定応力以上では、常にその一定応力が保たれ作動する。また、応力が取り除かれるときはAM間にはひずみの回復はなく、ひずみの回復はMA'間だけで生ずるものとする。この一定応力は材料学的には、材料の降伏応力に相当するもので、転位の運動の開始を意味すると考えら

れる。流体摩擦は、塑性ひずみ速度が加えられた力に比例するとしたものであり、材料が塑性変形をする際の粘性抵抗を意味する。そして、2種のばねはひずみの応力に比例する成分をあらわしたものであり、上部のばねは材料の塑性域での加工硬化を、下部のばねは弾性を意味する。結局、図3(a)の模型のレオロジ方程式は、AA'に応力 σ が作用し、ひずみ ϵ が生じるとした場合、

$$\sigma \leq \sigma_y \text{ のとき}$$

$$\sigma = E_1' \epsilon \quad (13)$$

$$\sigma > \sigma_y \text{ のとき}$$

$$\left(1 + \frac{E_2'}{E_1'}\right) \sigma + \frac{\eta}{E_1} \frac{d\sigma}{dt} = \sigma_y + E_2' \epsilon + \eta \frac{d\epsilon}{dt} \quad (14)$$

となる。ここで、 $E_1' \gg E_2'$ と仮定し、式(14)を書きかえると

$$E_1' \frac{d\epsilon}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} + \frac{E_1'}{\eta} [\sigma - (E_2' \epsilon + \sigma_y)] \quad (15)$$

となる。式(14)の E_1' を E_1 に、 E_1/η を k に、 E_2' を E_2 に、そして σ_y を σ_0 に置きかえると、式(15)と式(8)は同一となる。つまり、静的応力-ひずみ関係が直線硬化弾性と考えられる材料に関し、Malvernの理論を解くことは図3(a)で示される4要素弾粘性模型で、 $E_1' \gg E_2'$ と考えられる材料中の変形の伝ば状態を解くことと同じ意味をもつ。

また、図3(b)で示される模型のレオロジ方程式は

$$\sigma \leq \sigma_y \text{ のとき}$$

$$\sigma = E_1'' \epsilon \quad (16)$$

$$\sigma > \sigma_y \text{ のとき}$$

$$\sigma = E_2'' \epsilon + \sigma_y' \quad (17)$$

となる。そして、式(17)を式(6)と式(7)と比較すれば、容易にこのレオロジ模型がKármánの理論を意味することが理解できる。

4. 結果および考察

4.1 ひずみ-時間関係

図4(a)、(b)は2章に述べた方法により計算した材料Aと材料Bの、衝撃端から種々の位置におけるひずみ-時間関係を示す。図4(a)から明らかなごとく、ひずみ-時間関係はだんだんと一定ひずみに達し、つまりKármánの理論にみられた塑性波頭は存在しない。また、この一定ひずみの大きさは衝撃端からの距離に依存せず一定となり、塑性プラトが存在する。塑性波頭が存在しない現象は、前報で報告した実験結果と一致するものである。そして、この事実はMalvernの理論とKármánの理論との差から、過剰応力の関数 $g(\sigma, \epsilon)$ の影響であると

図3 レオロジ模型

(a) 材料 A の場合

(b) 材料 B の場合

図 4 ひずみ-時間関係

考えられる。レオロジ模型で考えた場合、Kármán の理論と同一である図 3 (b) では塑性波頭が存在することになり、図 3 (a) では存在しないことになるので、これはまた流体摩擦の存在によるものと考えられ、材料の高速変形にはなんらかの粘性的要素が存在することを示唆するものである。図 4 (b) の場合は、ひずみ-時間関係は一定ひずみに達していないが、これは一定ひずみに達するまでの時間が大きく、計算機の容量の都合で、一定ひずみに達する前に計算を切り上げたためであり、さらに長時間にわたり計算を行なえば、図 4 (a) と同じ傾向を示す結果が得られるものと考えられる。

4.2 ひずみの伝ば速度

前報では、測定された ひずみ-時間関係からひずみの伝ば速度 (C_p) を決定した。そして、同じ方法を用い、図 4 (a), (b) からひずみの伝ば速度を求め、図 5 (a), (b) に太実線で Malvern の理論による値として示す。また、図 4 (a), (b) の計算のもとになった 静的応力-ひずみ関係から Kármán の理論を用い、求めた伝ば速度を太破線で図中に示す。Malvern の理論から求めたひずみの伝

(a) 材料 A の場合

(b) 材料 B の場合

(衝撃端から任意の位置までの伝ば速度)

図 5 ひずみ伝ば速度

ば速度は、衝撃端から遠ざかるに従い、小さいひずみ領域で小さくなり、逆に大きいひずみ領域では大きくなり、徐々に Kármán の理論による伝ば速度に近づく。この事実は、4 要素レオロジ模型で考えれば容易に理解できる。つまり、図 4 (a), (b) から明らかのごとく、ひずみ速度が同一ひずみについて、衝撃端から遠ざかるに従い減少するため、流体摩擦の効果が減少し、4 要素模型はしだいに 3 要素模型に近づくためである。そして前章の考察から、この事実は Malvern の理論が Kármán の理論に近づくことを意味することを容易に理解できよう。

また、衝撃端のごく近くまでの伝ば速度を示す曲線で、図中矢印で示すような変曲点があらわれているが、これは衝撃端面での衝撃速度の与え方が図 2 に示すよう

(a) 材料 A と前ひずみ 3% のアルミニウムの場合

(b) 材料 B と前ひずみ 10% のアルミニウムの場合

図 6 ひずみ伝ば速度の比較

に直線的に立上り以後一定速度が保たれると仮定したことによるものと考えられる。つまり、この変曲点以下のひずみは端面での衝撃速度が立上っている時期に、そして、この変曲点以上のひずみは端面での衝撃速度が一定値を保っている時期に発生し伝ばしたひずみに相当すると考えられる。この端面での衝撃速度の伝ば速度に与える影響は、衝撃端から遠ざかるとともに急速に減少し消滅する。

前報では、ひずみの伝ば速度を決定する場合、衝撃端から 100 mm 離れた第 1 測定点と任意の位置の間のひずみの伝ばに着目し、伝ば速度を決定した。そこで、本報の計算結果を前報の測定結果と比較するため、衝撃端から 100 mm 離れた位置から任意の位置までのひずみ

の伝ば速度を図 4 (a), (b) から決定した。その結果を図 6 (a), (b) に太実線で示す。また、前ひずみ 3% と前ひずみ 10% のアルミニウム中の、実測されたひずみの伝ば速度 (C_p) を図中に丸印群で示し、これらのアルミニウムの静的応力-ひずみ関係から Kármán の理論により求めた伝ば速度を細破線で示す。Malvern の理論の計算を行なうときに、これらの静的応力-ひずみ関係を 2 直線で近似したが、この近似した静的応力-ひずみ関係から Kármán の理論により計算した伝ば速度を図中に太破線で示す。

材料 A と材料 B の Malvern の理論によるひずみの伝ば速度を比較した場合、材料 A と材料 B では大きな差がなく、たとえば材料 A と材料 B の 1% のひずみの伝ば速度はそれぞれ約 400 m/sec と約 550 m/sec であり、材料 A の 1% のひずみの伝ば速度は材料 B の 1.4 倍程度である。一方、Kármán の理論では、材料 A と材料 B の 1% のひずみの伝ば速度はそれぞれ 447 m/sec と 241 m/sec であり、材料 A の 1% のひずみの伝ば速度は材料 B の 1.9 倍程度である。つまり、Malvern の理論による伝ば速度と実測した伝ば速度を比較した場合、両者の材料に対してひずみが 1%~2% の範囲で、両者の伝ば速度は一致する。一方、Kármán の理論による伝ば速度と実測した伝ば速度を比較した場合、材料 A では両者の伝ば速度の差は小さくほぼ一致しているが、材料 B では実測した伝ば速度は Kármán の理論による伝ば速度より大きく、両者の伝ば速度の差は大きくなる。つまり、前ひずみの大きさが変化しても、Malvern の理論による伝ば速度は実測値と一致するが、Kármán の理論による伝ば速度は前ひずみの増加とともに実測値との差が大きくなる。もっとも、1% 以下のひずみの範囲では、Malvern の理論は両者の材料に対して、実測した伝ば速度より大きすぎる伝ば速度を与えるが Malvern の理論は前ひずみの大きさが変化しても、良好な伝ば速度を与え、Kármán の理論よりすぐれているといえる。

4.3 応力-ひずみ関係

図 7 (a), (b) は、衝撃端から種々の位置における、Malvern の理論により計算された動的応力-ひずみ関係を示す。また、図中の太実線は計算のもとになった仮定された静的応力-ひずみ関係を示す。衝撃端面 ($x=0$) において、応力は鋭い立上りを示し、最大値を示した後、急激に降下し、漸近的に静的応力-ひずみ関係に近づき、最後に一致する。最初の鋭い立上り部分は衝撃端面での衝撃速度が直線的に増加している時期に相当し、減少する部分は衝撃速度が一定値を保っている時期に相当する。また、動的応力-ひずみ関係が静的応力-ひずみ関係に一致

(a) 材料 A の場合

(b) 材料 B の場合

図 7 Malvern の理論により求められた動的応力-ひずみ関係

する時期は、図 4 の ひずみ-時間関係が一定ひずみに達する時期に相当している。そして、この顕著な最大値を示す傾向は、衝撃端から遠ざかるとともに小さくなり、静的応力-ひずみ関係に近づく。また、各位置での応力は最終的に静的応力-ひずみ関係に、同じ応力とひずみの値で一致しているが、これは衝撃後十分長い時間が経つと、試験片の全長にわたり、同じ応力とひずみの状態が保たれることを意味している。

5. 結 言

前報において、Kármán の理論は前ひずみの大きさが変化すると、塑性波の伝ば状態を説明することができなくなることを示した。そこで本報では、材料のひずみ速度依存性を考慮した理論の一つとして提案された Malvern の理論に検討を加え、前ひずみの大きさに違いがあっても、この理論が実験結果を説明することができるかどうかを観察した。また、4 要素弾粘塑性レオロジ模型は Malvern の理論と、3 要素弾塑性レオロジ模型は Kármán の理論と同じ意味を持つことから、これらの模型にも考察を加えた。得られた主な結果を示すと、

- (1) Malvern の理論では、ひずみ-時間関係に塑性波頭が存在せず、実験結果と一致した。この事実は材料の高速変形にはなんらかの粘性的要素が存在することを示唆するものである。
- (2) ひずみの伝ば速度を問題にした場合、Malvern の理論は、Kármán の理論とは違い、前ひずみの大きさに違いがあっても、正しい伝ば速度の計算値を与える。

また、この理論により計算された伝ば速度は、小さいひずみ領域では Kármán の理論による伝ば速度より大きく、逆に大きいひずみ領域では小さく、衝撃端から遠ざかるとともに、Kármán の理論による伝ば速度に近づく。

- (3) 衝撃端から種々の位置における、Malvern の理論による動的応力-ひずみ関係が求められ、その結果端面では衝撃速度の与え方の影響が大きくあらわれ、この影響は衝撃端から離れるに従い小さくなる。

参 考 文 献

- 1) 郡, 千田, 池田, 石山, 金田: 精密機械, **38** (1972) 652.
- 2) Kármán, T. & Duwez, P.E.: J. Appl. Phys, **21** (1950) 985.
- 3) たとえば田中, 黒川, 五十嵐, 岩橋: 機論のまがき, **38** (1972) 955.
- 4) Malvern, L.: J. Appl. Mech. **18** (1951) 203.
- 5) Shea, J.: J. Appl. Phys. **19** (1968) 4004.
- 6) 林, 福岡, 藤村, 香本: 第22回塑性加工連合講演会講演文集, (昭46-11) 387 東京.
- 7) Ripperger, E.A. & Watson, H.Jr.: Mechanical Behavior of Materials Under Dynamic Loads, (1968) 294, Springer-Verlag.
- 8) Wood, E.R. & Philips, A.: J. Mech. Phys. Solids. **10** (1962) 195.
- 9) 西山, 谷村: 機論, **36** (1970) 1247.
- 10) Cristescu, N.: Dynamic Plasticity, (1967), 119, North-Holland.
- 11) Cristescu, N.: Dynamic Plasticity, (1967), 135, North-Holland.