有限要素法による工具刃先の剛性解析*

——工具すくい面の切削応力分布と工具刃先の静剛性——

岸浪建史** 横内弘宇*** 星 光一† 斉藤勝政**

Analyses of Static Deformation of Cutting Tools by the Finite Element Method

——Distributon of Normal Stresses on the Rake Face and
the Static Deformation of Cutting Edge——

Tateshi KISHINAMI, Hirotaka YOKOUCHI, Koichi HOSHI, Katsumasa SAITO

The finite element method is applied to the analyses of the distribution of normal stresses on the tool rake face, stress-strain distribution in the tool and the static deformation of cutting edge. The following results are obtained:

- (1) The acting force on the distance of 10 percent of chip contact length near the cutting point is about 25 percent of total cutting force.
- (2) The cutting edge is deformed in both directions of the cutting and the depth of cut in cutting process, and the displacement of cutting point is nearly proportional to the value of clearance angle.
- (3) Maximum principal shearing stress is produced in the rake face except the cutting edge for a cutting tool which has less clearance angle.

1. 緒 論

金属切削において工具刃先は苛酷な応力状態と温度環境の下におかれる。すなわち工具刃先は被削材から切削抵抗を受け、また工具すくい面における切りくずとの摩擦作用、および切りくずの塑性変形により発生する切削熱により、工具内部に応力-ひずみを発生させ、同時に工具刃先の変形が生ずる。これらと工具摩耗、チップング、欠損、および加工精度を論じる場合、切削条件、被削材、工具材質、工具形状をも同時に考慮して検討されるべきである¹⁾。特に工具内部に発生する応力-ひずみ分布、工具刃先の剛性を知ることは工具刃先のチップング、欠損、加工精度への影響を知るうえで重要である。しかし実際の工具形状は複雑であり、工具すくい面での切削応力分布、熱源分布、および断続切削等で生ずる衝撃力をも一度に考慮して解析することは困難である。そのため、工具内部の応力-ひずみ分布、工具刃先の変形を生じさせた各要因を分離し、工具形状を単純化し、個々の影響を検討することが必要である。

2. 問題の設定と用いた仮定

問題を単純化するため2次元切削における工具を例にとり、切削熱、衝撃力はないものと仮定し、静的な切削力のみによる工具内部の応力-ひずみ分布、工具刃先の剛性と工具形状との関連について解析を行なう。これらの解析を行なうためには工具すくい面における切削応力分布を知っておく必要がある。工具すくい面切削応力分布は光弾性測定²⁾により工具刃先点での集中力を除いては、比較的良く知られているので、これを基に有限要素法解析において必要とされる等価節点荷重を求め、工具刃先点には適当な荷重を加えて工具内部の主応力差分布、主応力方向を求め、等色線、等傾線と比較することにより適当な切削応力分布の推定を行なう。このようにして求められる工具すくい面切削応力分布は、ある特定の工具、工具形状、被削材、切削条件の下で初めて妥当なものとなるが、実際の金属切削においても、同一の工具形状、切削条件であれば、工具すくい面切削応力分布の形状はほぼ同じであると仮定した。

したがって、これらの仮定を基にして、工具形状と切削時の工具刃先の変形、工具内部の応力-ひずみ分布を議論する場合、工具すくい角は一定として、工具逃げ角とそれらの関係を解析することになる。しかし切削加工時における工具すくい面切削応力分布が切削条件、特に

* 原稿受付 昭和47年12月21日。昭和45年度精機学会秋季大会学術講演会(昭和45年10月7日)にて発表。

** 正会員 北海道大学工学部(札幌市北13条西8丁目)

*** 正会員 室蘭工業大学(室蘭市水元町17)

† 名誉会員 旭川工業高等専門学校(旭川市春光台)

図1 工具刃先の模型化

表1 工具すくい面上の等価節点荷重値

節点番号 荷重条件	1		2		3		4		5	
	X1 (kg)	Y1 (kg)	X2 (kg)	Y2 (kg)	X3 (kg)	Y3 (kg)	X4 (kg)	Y4 (kg)	X5 (kg)	Y5 (kg)
A	34.0	7.15	13.5	7.15	5.5	3.98	1.59	1.98	0	0.398
B	17.0	7.15	13.5	7.15	5.5	3.98	1.59	1.98	0	0.398
C	17.0	3.53	13.5	7.15	5.5	3.98	1.59	1.98	0	0.398
D	0	7.15	13.5	7.15	5.5	3.98	1.59	1.98	0	0.398

図2 工具すくい面切削応力分布と工具内

工具すくい角、被削材等によって極端に変化がない限り、これらの仮定の下での解析結果は工具のチップング、欠損、加工精度の要因を知るうえで十分な知見を与えられると思われる。

3. 解析原理と計算手順

有限要素法^{3)~5)}では2次元連続体を小さな要素(三角形要素)の集合体としてモデル化し、その要素は各節点を介して連結されており、内力は、その節点を通してのみ伝わるものとし、仮想仕事の原理を用いて、節点外力 $\{f\}$ と節点変位 $\{\delta\}$ との間に式(1)の関係を導出する。

$$\{f\} = [k] \cdot \{\delta\} \quad (1)$$

ここで $[k]$ は要素の剛性マトリックスと呼ばれ、三角形要素の場合、 $[k]$ は次式で与えられる。

$$[k] = A \cdot t \cdot [N]^T \cdot [D] \cdot [N] \quad (2)$$

ただし A : 三角形要素の面積の2倍

t : 要素の厚さ

$[D]$: 応力-ひずみ関係式の係数マトリックス

$$[N] = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix}$$

ここで $b_i = y_j - y_k$, $c_i = x_k - x_j$

x_i, y_i : i 節点での x, y 座標値

また、各要素における応力 $\bar{\sigma}$, ひずみ $\bar{\epsilon}$ は次式で与え

主応力, 主応力方向の分布と工具刃先の変形

られる。

$$\bar{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [N] \cdot \{\delta\} \quad (3)$$

$$\bar{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \cdot \bar{\varepsilon} = [D] \cdot [N] \cdot \{\delta\} \quad (4)$$

このようにして個々の要素について剛性マトリックスを求め、節点を通してのみ力の伝達が行なわれることを考慮して、各節点について力のつりあいの式を立てることにより構造全体の節点外力 $\{F\}$ と節点変位 $\{d\}$ に関する連立方程式、式 (5) を得ることができる。

$$\{F\} = [K] \cdot \{d\} \quad (5)$$

ここで $[K]$ は構造全体の剛性マトリックスと呼ばれ、全節点変位 $\{d\}$ を求めるために、誤差の設定が容易である Gauss-Seidel 法⁶⁾ を使用した。求められた節点変位より式 (3), (4) を用い各要素での応力、ひずみが計算される。

なお、本計算処理はすべて北大大型計算機 センター FACOM-230-60 により行なわれた。

4. 工具の模型化

2次元金属切削における工具は厚さ一定の2次元形状と考えられるから、三角形要素で模型化することができる。一般に有限要素法で連続体内部の応力-ひずみ分布を解析するには、解析領域を実際の形状まで多くの要素数を用いて模型化すればよいが、計算機とプログラムの性能上、解析対象の要素分割数には制限がある。したがって要素分割は解析の目的によって、解析対象をどの範囲まで広げるか、どの程度の精度を必要とするかによって決まる。工具すくい面での切削応力分布を決定する目的のために、用いた要素分割は工具すくい面近傍の応力分布を詳細に解析する必要性と、有限要素法による解析結果と光弾性測定結果との比較を容易にする目的から、図1に示す斜線cから工具保持側は剛体と仮定し、刃先部のみを要素分割する模型化を行なった。

また工具刃先の変形、工具すくい面での応力-ひずみ分布を解析するため図1に示すa, b斜線部より刃先側を模型化した。すなわち同図において工具刃先変位 δ (切削方向変位) は、工具シャンク部を片持はりと考えた場合の中心線上のたわみ δ' と同図 a, b面を固定境界として考えた場合の切削力による工具刃先点でのたわみ δ'' との和と考え、 δ'' と工具逃げ角との関係を明らかにするため図3に示す要素分割を行なった。なお計算に用いた工具の物質定数は、高速度鋼 (SKH 2) の値を用い、弾性係数、ポアソン比をそれぞれ $2.1 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2$, 0.29

図3 工具刃先の変形と逃げ角の関係

とした。

5. 工具すくい面切削応力分布の決定

工具すくい面切削応力分布は切削条件によって変化することは十分予想されるが、白井・竹山²⁾が行なった光弾性実験 (被削材: 鉛, 工具: すくい角 10° のエポキシ樹脂, 切込み: 0.8 mm, 切削速度: 18 mm/min の乾燥2次元切削) による工具内の等色線, 等傾線は鋼切削中の高速度鋼工具内の主応力差, 主応力方向の分布と相似であると考え、工具すくい面に適当な切削応力分布を仮定し有限要素法で工具内部の主応力差, 主応力方向を計算し等色線, 等傾線との比較を行なうことにより、工具すくい面切削応力分布の推定を行なった。すなわち光弾性測定により得られている切削応力分布から単位切削幅あたり、工具刃先点荷重を除いて切削抵抗が 100 kg 程度になるように換算して、等価節点荷重計算法 (付録) により、工具すくい面での節点荷重を計算した。一方、工具刃先点の荷重は若干の予備計算の結果から、適当な荷重を4種類考え、それらと工具すくい面での等価節点荷重を加えて表1に示した。これらの切削抵抗による工具内部の主応力差, 主応力方向の分布を図2に示す。同

図から荷重条件Bが、これらの中では最も光弾性測定結果との一致の程度が良いことがわかる。以上の解析結果から、刃先点近傍、すなわち切りくず接触長さの刃先から約1/10の距離に全切削主分力の約25%強の荷重が加わっていると推定できた。なお、工具刃先点近くにおけるせん断応力分布は工具すくい面での分布傾向がそのまま持続しているものとして解析を行なった。

6. 工具刃先の変形とすくい面にそっての応力-ひずみ分布に与える工具逃げ角の影響

工具逃げ角が、工具刃先の変形および工具すくい面応力-ひずみ分布に与える影響を解析するため、解析対象は図3に示すように、すくい角 0° 、逃げ角 $0^\circ, 5^\circ, 10^\circ$ の3種類に限定した。工具すくい面等価節点荷重値は表1の荷重条件Bを用いた。なお切削抵抗による工具刃先の変位 δ'' を知るために図3において境界a, bは固定されているものとして解析を行ない、得られた結果を同図に示した。図3から明らかなように、逃げ角の大きさにより工具刃先の変位の様子は異なり、逃げ角 0° の場合は工具刃先の切込み方向の変位はほとんど認められないが、逃げ角が大きくなるに従い工具刃先は過切削状態に変形することがわかる。逃げ角が 10° の場合、本解析で用いた荷重条件下で工具刃先の切削方向変位は約 $20\text{ }\mu\text{m}$ 、

図4 工具逃げ角と工具すくい面応力-ひずみ分布との関係

切込み方向変位は約 $2\ \mu\text{m}$ であった。

この工具刃先の変位量と工具シャンク部に起因する変位量 δ' とその大きさを比較するため以下の検討を行った。シャンク部に起因する変位 δ' を求めるため、高速度鋼 (SKH 2) $20 \times 20\ \text{mm}$ 角の工具を例にとり、工具尖端に本解析で用いた切削主分力に等しい集中荷重 ($67 \times 20 \times 2\ \text{kg}$) を加え、工具の突出し長さを $5, 10, 15\ \text{mm}$ としたときの、たわみ量は簡単な片持りの計算から、 $5.6, 44.7, 150.9\ \mu\text{m}$ であることがわかる。すなわち、工具尖端での切削抵抗による工具刃先の変位量は、 $20 \times 20\ \text{mm}$ 角高速度鋼工具の $6 \sim 8\ \text{mm}$ 突出し長さに基づく変位量に相当する。

このように工具シャンク部を短くするに従って工具尖端の変形は無視できなくなり、その程度は工具逃げ角の増加とともに大きくなる。

工具刃先の変形解析と同時に、工具逃げ角が工具すくい面の応力-ひずみ分布に与える影響について解析を行ない。その解析結果を図 4 に示す。応力-ひずみ分布は正確には工具すくい面に沿った深さ $0.5\ \text{mm}$ における値を表わしている。同図より応力成分 σ_x (すくい面に垂直な垂直応力成分) と τ_{xy} の分布は工具尖端を除いて光弾性測定結果と良く一致していることがわかる。しかし工具逃げ角の値により、工具尖端の応力、ひずみは大きく変化し、応力成分 σ_y 、ひずみ成分 ϵ_y を除き、各応力、ひずみ成分は工具逃げ角が 0° 以外のとき工具刃先で最大値を示し、逃げ角を大きくとるに従い、それらの値は増大することがわかる。これは実験的にも逃げ角を大きくとると工具刃先の目こぼれ、チッピングが生じやすいことから理解できる。

一方、逃げ角が 0° の場合、工具尖端の各応力、ひずみ成分は急激に減少し、すくい面にそって工具刃先点から適当な距離の所で極大値をもち、工具の破損に最も影響を与えると考えられる主応力差 ($\sigma_1 - \sigma_2$) は工具刃先から、切りくず接触長さの約 $1/3$ の所で極大値を示した。このことは工具すくい面における切削応力分布の形状が一定で、絶対値が増加したとき、この工具すくい面にそった主応力差極大の所から工具材が降伏を開始するか破損が生じることを意味していると考えられる。

7. 結 論

有限要素法を用いて、工具すくい面の切削応力分布、工具刃先の変形、工具内部の応力-ひずみ分布の解析を行ない次のことを明らかにした。

- (1) 適当な工具すくい面切削応力分布を仮定して、工具内部の主応力差、主応力方向の分布を有限要素法

で求め、光弾性解析から知られている等色線、等傾線を比較することにより工具すくい面切削応力分布の推定を行なった。その結果、工具刃先から切りくず接触長さの $1/10$ の距離内に全切削主分力の約 25% が加わっていると推定された。

- (2) 工具刃先は切削中、逃げ角を大きく取るに従い過切削状に変形し、工具シャンク部の突出し長さが短い場合には、シャンク部での変形に加えて、工具の刃先点近傍の変形が無視できないものとなり、その程度は工具逃げ角を大きくとるに従い増大する。
- (3) 工具逃げ角が 0 度に近い場合、最大主せん断応力は工具刃先点から切りくず接触長さの約 $1/3$ の所で生ずるが、工具逃げ角を大きくするにつれて、最大主せん断応力は工具刃先点で生じ、その大きさは工具逃げ角の大きさと共に増加する。

終わりに本研究の計算処理にご協力いただいた藤崎博夫氏 (現日立製作所勤務) に感謝いたします。

付録 等価節点荷重への変換

有限要素法において、構造物の境界における荷重が分布荷重である場合には、等価節点荷重を求める必要がある。等価節点荷重 $\mathbf{f}$ は

$$\mathbf{f} = t \cdot \int A \, d\mathbf{s} \, \mathbf{S} \quad (\text{A-1})$$

で与えられる。ここで

$$\mathbf{f}^T = \{X_i, Y_i, X_j, Y_j, X_k, Y_k\} \dots \text{等価節点荷重}$$

$$\mathbf{S} = \{\bar{X}, \bar{Y}\} \dots \text{分布荷重}$$

$$A = \begin{bmatrix} \xi & 0 & \eta & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & \xi & 0 & \eta & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

ただし

$$\xi = \frac{1}{A} \{ (x_j y_k - x_k y_j) + x(y_j - y_k) + y(x_k - y_j) \}$$

$$\eta = \frac{1}{A} \{ (x_k y_i - x_i y_k) + x(y_k - y_i) + x(x_i - x_k) \}$$

$$\gamma = \frac{1}{A} \{ (x_i y_j - x_j y_i) - x(x_i - y_j) + y(x_j - x_i) \}$$

A : 三角形要素の 2 倍の面積

t : 板 厚

図 a 等価節点荷重値の計算説明図

である。なお積分は三角形要素の境界に沿って行なう。したがって式(A-1)は次式の形で求められる。

$$\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ X_j \\ Y_j \\ X_k \\ Y_k \end{pmatrix} = t \cdot \int \begin{pmatrix} \xi \bar{X} \\ \xi \bar{Y} \\ \eta \bar{X} \\ \eta \bar{Y} \\ \gamma \bar{X} \\ \gamma \bar{Y} \end{pmatrix} ds \quad (\text{A-2})$$

いま図aに示すように工具すくい面切削応力分布が微小距離に関して一次分布で近似できるなら、切削応力分布は座標の一次関数となる。これを考慮して式(A-2)を積分すると

$$\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ X_j \\ Y_j \\ X_k \\ Y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} t \bar{X}_j + \frac{1}{3} t (\bar{X}_i - \bar{X}_j) \\ \frac{1}{2} t \bar{Y}_j + \frac{1}{3} t (\bar{Y}_i - \bar{Y}_j) \\ \frac{1}{2} t \bar{X}_j - \frac{1}{3} t (\bar{X}_i - \bar{X}_j) \\ \frac{1}{2} t \bar{Y}_j - \frac{1}{3} t (\bar{Y}_i - \bar{Y}_j) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A-3})$$

として求められる。ただし t は応力境界面に沿う三角形要素の1辺の長さである。

参 考 文 献

- 1) たとえば、竹山秀彦：切削作業標準設定に関する研究（第1報），機密機械，24，11（1958）586.
- 2) 臼井英治，竹山秀彦：切削応力の光弾性解析（第1報），機械試験所所報，12，4（1958）21.
- 3) O.C. Zienkiewicz & Y.K. Cheung: The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, McGraw-Hill, N.Y. (1967).
- 4) 山本善之：有限要素法の基礎，日本機械学会第327回講習会教材，28，4（1970）1.
- 5) 吉村信敏：マトリックス法による2次元平面応力場の解析，生産研究，20，5（1968）215.
- 6) たとえば，一松 信：数値計算法，至文堂（1963）.

書 評

生産システム（システム工学講座5）

佐田登志夫編，日刊工業新聞社発行，1973

ある品物を生産する場合，従来からのマスのプロという概念においては，生産能率向上のための問題点の抽出，それを解決するための方法，手段の発見と提起等々，少なくともその思考過程は比較的単純な開ループであり，また閉ループを形成したとしても全体からみるときわめて局部的であり，かつ不完全（主観的，個人的という意味で）なものになりがちであったように思われる。一方，時代のすう（趣）勢は多品種少量生産においても高効率あるいは高い効率の生産の実現を要求するにいたり，これにかかわる過程は非常に複雑多岐にわたり，いわゆる一筋縄ではゆかぬものであることを認識しなければならない。

この膨大な情報量を内蔵するシステムを，生産工学的な立場——加工や計測等に直結した狭義なものをのみみだして，情報，スケジューリング，進行管理等までも含めた広い分野——で，どのようにとらえたらよいであろうかという疑問が生ずるのはまことに至当なことであろう。狭い専門分野での日常業務にとすれば振り回され

がちな個々の技術者に，まず自分を取巻く巨大な組織（生産工学的）が存在すること，またその中で自分がどのような位置付けをもっているかを今まで比較的無関心であったものに対してもおぼろげながら悟らせてくれるのが本書であろう。

本文（362ページ）は11章からなり，各章はそれぞれ専門の執筆者によって記されており，生産に関する情報，設計，計画，加工，組立，検査等個別の小システムを1冊に統合したものとしてはおそらく最初のものであろう。ページ数制限のためにやむを得ないことであろうが，初心者や専門外のものにとっては図面その他で説明の理解しにくい箇所も見受けられるが，詳細についてはそれぞれの専門の書を参照されるのがよからう。

読者は，本書を通読することにより，現代の生産に関するシステムの中での問題点と今後の動向を今までよりは広い観点から理解することができよう。

（増田 泰二）