歯車の個別誤差と角度伝達誤差に関する統計的考察*

高 野 政 晴**

Statistical Investigation of the Relation between
Gear Transmission Error and Inherent Gear Errors

Masaharu TAKANO

The function of the gear mechanism is to transmit exactly the rotation angle. This function error, that is, single-flank mesh error is discussed from statistical view point, and the following results are obtained in relation to the inherent gear errors (pitch error and tooth profile error).

(1) If the inherent gear errors are normally distributed, the mesh error is also normally distributed in approximation in any contact ratio.

(2) If one factor causing the errors is dominant, it is no more normal distribution, and the effect of this factor appears characteristically in mesh error spectrum.

(3) The variance of mesh error is proportional to that of inherent gear errors, experimental results show, however, that the actual value is about $(2/3-3/2)^2$ times of calculated one.

(4) In order to obtain the reliable function error, it is necessary to do the single-flank mesh test, as the usual measurement of inherent gear errors gives insufficient numbers of data to treat those statistically.

1. 序 論

精密機械用小型歯車に要求される機能は一定の回転比で正しく角度を伝達することである。時計用歯車ではトルクの伝達比が一定であることを要求され、この二つの機能は必ずしも両立して満足されることはないが、後者の場合は歯面の摩擦係数から決まるある変動回転比が要求される機能であると言いかえることができる。いずれにしろ決められた回転比からのずれが、一般的に機能誤差、あるいは機構内部に存在する雑音と呼ばれるべきもので、この雑音の要求機能に対する S/N 比が機構そのものの良否を示す指標となる。

ところで歯車の測定は、静的に各種ピッチ誤差、歯形誤差、偏心などによって、その最大値から便宜的に精度等級を決めている。しかしこれらの測定によって得られたデータは測定回数を重ねるごとに異なった値をとることはよく経験するところである¹⁾。本来歯車の持つ個別誤差は統計的な性質を持っており、その誤差集合から得られた有限個のサンプル値の最大値から集合全体を推定するところに無理がある。歯車の機能から考えれば、ピッチ誤差や歯形誤差があってもそれらが相補って回転伝達が正しく保たれれば問題はないはずであり、個別誤差

の測定はその点では間接的な機能誤差測定法である。最も直接的な測定は一歯面かみあい誤差を測定することである。

本研究は、間接的な個別誤差(ピッチ誤差と歯形誤差)と機能誤差である角度伝達誤差(かみあい誤差)のおおの統計量の間の関係を見いだすこと、および個別誤差から機能誤差を推定することが可能であるかどうかを明らかにすることを目的とする。ただし偏心についてはここでは論じない。偏心は歯車固有のものと組立の不整から起因するものがあり、歯車単体だけの測定では類推できない。組立の不整、例えば軸の傾きやねじれの位置にあること、回転軸と歯車中心軸が平行でないことに起因する一見歯形誤差、ピッチ誤差と等価なかみあい誤差も生ずるが²⁾、これらは軸の傾き角の2次のオーダーであり、機能的には無視してさしつかえない量である。

歯車の誤差を統計的に取扱う例はほかにもあるが^{3),4)}、実験データに欠けている。

2. 解 析

歯車の個別誤差(固有の誤差)はJISに7種類定められているが、これらは歯面誤差とその歯面が正しい位置に並んでいるかどうかを定める量(ここでは法線ピッチ誤差)***の2種類によって表示すれば十分である。各種

* 原稿受付 昭和48年1月9日。昭和45年度精機学会春季大会学術講演会(昭和45年4月5日)にて発表。

** 正 会 員 東京大学工学部(東京都文京区本郷7-3-1)

*** より詳しく言うところ累積法線ピッチ誤差の、その1次調波を差引いた量。

図1 個別誤差の二つの基本量

ピッチ誤差は法線ピッチ誤差を別な角度からながめた値にすぎない。

図1に示すようにかみあう1対の歯車において各歯車の i 番目の歯形誤差を $f_{p1}(\theta - \theta_i)$, $f_{p2}(\theta - \theta_i)$, i 番目の法線ピッチ誤差を $f_{te1}(\theta_i)$, $f_{te2}(\theta_i)$, $\theta_i = 2\pi/Z$ とする。ただしここで述べている法線ピッチ誤差とはインポリュート曲面を平面にのばしたときの平均平面間の距離であり、実際に測定される法線ピッチではない。これらの誤差が全く偶然に生ずるならばこれらの値は正規分布をなすと考えることができる。すなわちおのおのの分布密度関数は、平均値0で、

$$\left. \begin{aligned} P_{p1}(f_{p1}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{p1}} e^{-\frac{f_{p1}^2}{2\sigma_{p1}^2}} \\ P_{p2}(f_{p2}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{p2}} e^{-\frac{f_{p2}^2}{2\sigma_{p2}^2}} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} P_{t1}(f_{te1}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{t1}} e^{-\frac{f_{te1}^2}{2\sigma_{t1}^2}} \\ P_{t2}(f_{te2}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{t2}} e^{-\frac{f_{te2}^2}{2\sigma_{t2}^2}} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

である。ただし σ_{p1}^2 , σ_{p2}^2 , σ_{t1}^2 , σ_{t2}^2 はそれぞれ駆動、従動歯車の歯形誤差、ピッチ誤差の分散である。

2.1 1対かみあいにおけるかみあい誤差 ε_1

ε_1 は回転角 θ の関数として、 i 番目の歯がかみあっているとき、

$$\varepsilon_1(\theta) = \{-f_{te1}(n\theta_i) + f_{te2}(\theta_i) + f_{p1}(n(\theta - \theta_i)) + f_{p2}(\theta - \theta_i)\} / r_{s2} \quad (3)$$

と表示できる。ただし $n = Z_2/Z_1$, $\theta_i = 2\pi i/Z_2$ 。各誤差が正規分布をして独立ならば ε_1 の振幅確率密度関数 $P_1(\varepsilon_1)$ は、

$$P_1(\varepsilon_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\varepsilon_1}} e^{-\frac{\varepsilon_1^2}{2\sigma_{\varepsilon_1}^2}} \quad (4)$$

$$\sigma_{\varepsilon_1}^2 = \frac{\sigma_{t1}^2 + \sigma_{t2}^2 + \sigma_{p1}^2 + \sigma_{p2}^2}{r_{s2}^2} \quad (5)$$

図2 2対かみあいのかみあい誤差曲線

対称な曲線は正規分布すなわち1対かみあい誤差分布を示す。かみあい率 I ($1 \leq I \leq 2$) のかみあい誤差分布は両者の中間にある

図3 2対かみあいの正規化されたかみあい誤差分布

となることが帰結される。 ε_1 のスペクトルは有限回転で必ず元にもどるから線スペクトルとなる。各歯車のピッチ誤差、歯形誤差のスペクトルの位相がランダムに生ずれば ε_1 のスペクトルの大きさは各歯車の誤差の2乗和の平方根であることは理論の教えるところであるが、歯車の f_p , f_{te} はサンプル数が少なすぎるので信頼できるデータをとりにくい。 $f_p(\theta)$ の内に含まれるスペクトル成分は多数の歯について同一でない限りかみあい誤差には明りょうに生じない。 $f_{te}(\theta_i)$ なるサンプル値は Z 個あるが、 Z より十分小さいスペクトル成分のみ有意である。測定される法線ピッチ誤差は歯形誤差も含むので高いスペクトル成分はその影響を受けやすいからである。

2.2 2対かみあいにおけるかみあい誤差 ε_2

このときのかみあい誤差は隣り合う対のかみあい誤差曲線を重ね合わせたとき、上方にとび出している部分をつらねたものである(図2)。このことを式で表わすと、

$$\bar{\varepsilon}_2(\theta) = \max\{\varepsilon_1(\theta)_{i=i}, \varepsilon_1(\theta)_{i=i+1}\} \quad (6)$$

となる。 ε_2 の振幅の確率密度関数 $P_2(\varepsilon_2)$ は式(5)を利用して、

$$P_2(\varepsilon_2) = 2P(\varepsilon_2) \int_{-\infty}^{\varepsilon_2} P_1(\varepsilon) d\varepsilon \quad (7)$$

となる。 $P_1(\varepsilon_1)$ が正規分布であるとする、 $P_2(\varepsilon_2)$ は図3に示すごとく、極大値がわずかに左にずれた形をしており、正規分布ではない。このときの ε_2 の平均と分散は、

$$\bar{\varepsilon}_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sigma_{\varepsilon_1}, \quad \sigma_{\varepsilon_2}^2 = \left(1 - \frac{1}{\pi}\right)\sigma_{\varepsilon_1}^2 \quad (8)$$

となる。

2.3 かみあい率 I のときのかみあい誤差 ε_I

図4 かみあい率 I のときのかみあい誤差曲線

図5 歯形誤差曲線の例

$1 \leq I \leq 2$ とすると、図4に見るごとく1対かみあいが $(2-I)$ 、2対かみあいが $(I-1)$ の割合で生ずるので、 ϵ_I の確率密度関数 $P_I(\epsilon_I)$ は、

$$P_I(\epsilon_I) = (2-I)P_1(\epsilon_I) + (I-1)P_2(\epsilon_I) \quad (9)$$

であり、その平均と分散は簡単な計算により、

$$\bar{\epsilon}_I = (I-1)\bar{\epsilon}_2 - \frac{I-1}{\sqrt{\pi}}\sigma_{\epsilon_1}$$

$$\sigma_{\epsilon_1}^2 = \left\{ 1 - \frac{(I-1)^2}{\pi} \right\} \sigma_{\epsilon_1}^2$$

$$= \left\{ 1 - \frac{(I-1)^2}{\pi} \right\} \cdot \frac{\sigma_{\epsilon_1}^2 + \sigma_{\epsilon_2}^2 + \sigma_{p_1}^2 + \sigma_{p_2}^2}{r_{g_2}^2} \quad (10)$$

となる。 $P_I(\epsilon_I)$ はかみあい率 I によって異なるが、いずれも正規分布とよく似た形をしており、したがって2対かみあいが混在してもかみあい誤差の分布はほぼ正規分布であるとみなしてもさしつかえない。また式(10)より、

かつこの値は90%信頼区間を示す

図6 ピッチ誤差曲線の例

かみあい率が大きいほどかみあい誤差の分散が小さくなるが、 $I=1$ と $I=2$ との $\sigma_{\epsilon_I}^2$ の比は1:0.682であり、かみあい率が大きくても著しく改善されるわけではない。

3. 歯車の誤差測定とかみあい試験

前述の理論がどの程度正しいかを見るために平歯車の個別誤差測定と一歯面かみあい試験を行ない、両誤差の分散値の比較と、ピッチ誤差とかみあい誤差の両スペクトルの比較をした。実験に使用した歯車の諸元は、 $M=1$ 、 $\alpha_0=20^\circ$ 、歯幅 $B=8$ mm、 $Z=20, 30, 40$ 各20個、黄銅製である。すべての歯車は浜井製精密ホブ盤によって同一の条件下に歯切りしたものである。

3.1 個別誤差の測定と結果

すべての供試歯車の歯形誤差と単一ピッチ誤差をKlingelnberg PZ 375 万能歯車試験機によって測定した。歯形誤差は等間隔に10枚の歯を選んで、歯幅方向中央部を測定し、ピッチ誤差はピッチ点付近において単一ピッチを測定した。その測定結果の数例を図5, 6に示す。また図7, 8, 9にこれらの誤差の分布とスペクトルを示す。誤差の大きさは歯車によってかなり異なるが、全体として精度は非常に悪い。これはホブ盤が古いためである。歯すじ方向によって歯形誤差の形状が異なるかどうか2個の $Z=40$ の歯車の歯幅方向6個所をとってすべての歯

かつこの値は90%信頼区間を示す

図7 歯形誤差分布(歯形曲線上120点のサンプルの度数分布)

について測定した結果は、一部を除いて相対的には大きな差がないことがわかった。統計的には歯すじ方向の誤差の影響は小さいものと思われる。また歯形誤差の密度分布は正規分布曲線に近い形をしており、統計的处理に対して近似的に正規分布と見なしてよいと思われる。

ピッチ誤差の統計量を出すためにはデータの数か歯の枚数しか得られず、またすでに報告されているように¹⁾、ピッチ誤差は測定位置によってかなり異なるので、信頼性のある値が得られない。数回の測定によってはじめて意味のある統計量となるが、ここでは常用の測定によって得られた値とかみあい誤差との間の関係を求めるのが目的であるので、1回の測定値をもとに議論する。ピッチ誤差の分散 σ_p^2 は χ^2 分布の表からその信頼区間が図中にある値のように与えられる。この幅はほぼ $1/\sqrt{Z}$ に比例している。ピッチ誤差にはある周期成分が明瞭ように生じているものがある。スペクトル分析の結果はそれが14~18次の間にあることを示しているが、データの数が少ないために正しい周期成分を確定できない。これはかみあい誤差測定によってはじめて明らかにする。

3.2 かみあい誤差測定とその結果

長周期振動計を応用した一歯面小型歯車かみあい試験機⁵⁾によって、前述の歯車のかみあい試験を行なった。図10, 11, 12に測定したかみあい誤差曲線の例と、誤差の振幅分布および誤差のスペクトル分析の結果を示す。ただし分布は一次調波(偏心と果

右側のグラフは両歯車の位置を決めてかみ合わせたときに予想されるかみあい誤差のスペクトルを示す

図8 累積ピッチ誤差のスペクトル

右側の図は両歯車をかみ合わせたとき予想されるかみあい誤差

図9 累積ピッチ誤差の一次調波からのずれの分布

マスタギヤは $Z=38$

図 10 かみあい誤差測定例

積ピッチ誤差の影響)を除いた変動分について求めたものである。この供試歯車群は普通の歯車と比べて精度は非常に悪い。また一ピッチかみあい誤差のごとき短周期の振幅の大きな波があるが、これは1歯ごとのかみあい誤差ではなく、歯数に関係なく生じている第16次調波成分であり、これはホブ盤の親ウォームホイール(ここではねじ歯車)の歯数と一致しており、明らかに親ウォームの摩耗がはげしいことを示している。供試歯車同志のかみあいでは両歯車の16次調波成分が同位相になるとかみあい誤差は大きく現われ、逆位相では小さく現われる。かみあい誤差の分布は、正規分布とみなし得るものもあるが、そうでないものもある。これはある強い周期成分が一定振幅で存在すると、その密度分布が正弦波の山と谷の部分に集中する傾向があるので、その存在のためと思われる。

1周期約200点のサンプル値の度数分布

図 11 かみあい誤差分布

図 12 かみあい誤差のスペクトル

4. 歯車静的誤差とかみあい誤差の比較

単一ピッチ誤差のスペクトルとかみあい誤差のスペクトルとを比較した場合、両者の間には明確な対応は認められない。ただ、かみあい誤差で 16 次調波の大きい歯車については、単一ピッチ誤差でも 16 次付近に強い周期成分の存在することが言える。それ以上の対応がないのは単一ピッチ誤差のデータ数が、常用の測定法では統計量の算出には不十分なためである。すなわち歯形誤差を含めて歯車の個別誤差から角度伝達のノイズのスペクトルを推定することは困難である。

解析によれば歯車の静的誤差が正規分布をすれば、かみあい誤差はかみあい率が 2 以下において近似的に正規分布をなすことを述べたが、図 8 よりかみあい誤差の分布は強い周期成分がない限り、ほぼ正規分布とみなし得

ることがわかる。強い周期成分があって正規分布にならないのは、誤差を生じた原因としてある一つの要因が強く影響していることを示しており、これは歯切り盤固有のものと言うことができる。言い換えれば歯車の角度伝達誤差を測定した統計量から原因を得ることができる。

次に解析結果の式 (10) に基づいて歯車の個別誤差から計算したかみあい誤差の分散 $\sigma_{\varepsilon(th)}^2$ と実験によって求めたかみあい誤差の分散 $\sigma_{\varepsilon(ex)}^2$ との比較を図 13 に示す。ただし前述ピッチ誤差は $\cos \alpha_0$ をかけて法線ピッチ誤差に変換した。また実際の単一ピッチ誤差の測定値には歯形誤差も含まれており、統計量に意味があれば測定した単一ピッチ誤差から得た法線ピッチ誤差の分散 σ_t^2 は

$$\sigma_t^2 = \sigma_i^2 + 2\sigma_p^2$$

と表現されて、 σ_t^2 は常に $2\sigma_p^2$ より大きいはずである。しかし σ_t^2 から推定される真の σ_i^2 はある幅を持った範囲内にあり、点推定値としての実測の σ_t^2 は $2\sigma_p^2$ より小さい場合もある。 $\sigma_{\varepsilon(th)}^2$ の計算には $\sigma_t^2 > 2\sigma_p^2$ の場合は $\sigma_t^2 - 2\sigma_p^2 = \sigma_i^2$ として、 $\sigma_t^2 < 2\sigma_p^2$ の場合は σ_p^2 のみを計算の考慮に入れた。図 13 において、実験値 $\sigma_{\varepsilon(ex)}$ は期待値としてのかみあい誤差の標準偏差 $\sigma_{\varepsilon(th)}$ と異なる値をとる場合が多い。これは $\sigma_{\varepsilon(th)}$ の推定値に幅があるためであり、この幅は個別誤差のサンプル数の

平方根に反比例する。 $\sigma_{\varepsilon(ex)}$ は同じ歯車対でかみあい位置を変えることによっても異なる値が得られるが、これは各周波数成分の位相差がかみあい位置によって異なるためである。個別誤差もかみあい誤差もほぼ正規分布とみなせる場合には、個別誤差から推定したかみあい誤差の 95% 信頼区間に実験値も大体おさまっている。その信頼区間から著しくはずれている例もあるが、これはある周波数成分が他と比べて非常に大きい場合であり、個別誤差の測定からその存在を正しくとらえられなかったためと思われる。これらのことを考慮して、現在行なわれている個別誤差の測定法によって得られた値をもとにかみあい誤差を推定する場合は、図 13 のごとく $\sigma_{\varepsilon(ex)}$ はほぼ $(2/3 \sim 3/2)\sigma_{\varepsilon(th)}$ の間にあると言うことができる。

以上の結果から考えると、歯車の個別誤差からは本来の機能である角度伝達の誤差の類推に対してかなり大き

$M=1$, $\alpha_0=20^\circ$, $Z=38$ はマスタギヤ

図 13 かみあい誤差の実験値と計算値の比較

っぱな結論しか出し得ない。JIS 等級でたとえば 3 級と言われてもその誤差からは上のある幅を持った角度伝達誤差が求められるのみで、スペクトルとしては強い成分以外は全く類推できない。正しく角度伝達誤差を得るには一歯面かみあい試験を行なうこと、それもマスタギヤとのかみあいばかりでなく、使用する歯車対を使用条件と同じ状態で行なうことが必要であろう。

5. 結 論

解析と実験とから導かれる結論を示すと次のごとくなる。

- (1) 個別誤差は強い周期成分がなければほぼ正規分布をなし、かみあい誤差もほぼ正規分布をなす。強い周期成分の存在は個別誤差の測定からは十分な情報が得られず、かみあい試験によって明らかになる。
- (2) かみあい誤差の分散は個別誤差の偏心分を除いた分散の和より式 (10) で与えられるが、いくつかの理由により計算値のほぼ $(2/3 \sim 3/2)^2$ 倍の間にある。
- (3) かみあい率が大きいほどかみあい精度はよくなるが、その程度は小さい。
- (4) 歯車の機能誤差を正しく把握するためには一歯面かみあい試験を行なう必要がある。

参 考 文 献

- 1) 石川二郎, 林 輝: 精研における歯車の精度測定, 東工大精密工学研究所シンポジウム前刷集 (1968-3) 1.
- 2) G. Nishimura & M. Takano: Effect of Gear Accuracy on Mesh Regularity, J. Faculty of Engg. Univ. Tokyo (B), **27**, 1 (1964) 69.
- 3) G.W. Michalec: Precision Gearing, J. Wiley & Sons, New York (1966) 141.
- 4) G.W. Michalec: Statistical Backlash Error Prediction for Gear Trains, JSME 1967 Semi-Int. Symp., Sept. (1967) 11.
- 5) 西村源六郎, 神保泰雄, 高野政晴: 振り振動計を応用した小形歯車かみ合い試験機, 精密機械, **33**, 9 (1967) 606.