先行関係拘束のある順序付け問題の一解法*

町 田 史 彦** 嘉 数 侑 昇*** 沖 野 教 郎***

A Solution of the Operational Sequencing Problem
under Constraint of Precedence Relationship

Fumihiko MACHIDA, Yukinori KAKAZU, Norio OKINO

This paper gives an algorithm that converges quickly to a solution of the operational sequencing problem under any constraint of precedence relationship. And this method uses a conception called "reduction of feasible domain" in addition to the Little's algorithm. The outlines of this method are as follows.

(1) The precedence relationship is represented by matrix of which elements are denoted with 0 or 1.

(2) The complete precedence relationship is constructed by the relation between two operations (the former is precedence-matrix and the latter is incidence-matrix).

(3) All infeasible elements of the cost-matrix are forbidden by precedence-matrix.

(4) In order to effective search, the Little's motive of branching is used.

(5) Already determined partial sequences are considered as an operation and then new precedence-matrix is built up. Using them, infeasible elements of cost-matrix, newly appeared, are forbidden ("reduction of transferable domain").

According as the repetition of process (5) and branching, it converges to a solution. Moreover, this method can be used under any constraint of precedence relationship, even if the system has no relation. As the examples of experiments, each of 13, 10, 21 operational sequencing problem is attempted and expected results are obtained.

1. 緒 言

先行関係拘束下にある作業順序付け問題はすべてのスケジューリング問題の基礎となるものである。しかし、先行関係によっては、現在までに提出されている方法^{2),3)}では効率の良い探索が難しい場合がある。本論文は順序に制約のない場合の巡回セールスマン問題の解法として有効な Little ら¹⁾の方法を“可遷移領域の縮退”という概念を導入することにより、順序拘束のある系へ拡張、一般化し、先行関係のいかんによらず効率の良い適応性のある解法を提出する。

2. 先行関係の行列による表現

先行関係を視覚化したものに先行関係図がある(図1(a))。この図で一つの矢印で結ばれた二つの節(node)の関係を直前(直後)と区別するために1次の先行(後続)関係にあると呼ぶことにする。同様に、 k 個の矢印で連続して結ばれた二つの節を k 次の先行(後続)関係にあると呼ぶ。先行関係図の意味するものは、各節の作

業(operation)は入射するすべての節の作業が完了しないとその節の作業を始めることができないということであり、決定される経路が図の線上に拘束されるものではない。先行関係図は、一次先行関係を表した INCIDENCE MATRIX (I 行列)(図1(b))、またはすべての先行関係を表した PRECEDENCE MATRIX (P 行列)(図1(c))によって表現することができ、両者の間には以下の関係がある。

$$[P] = \bigcup_{k=1}^{n-1} \{[I]^k\} \quad (1)$$

2.1 P 行列の構成

入力として P 行列を用いることは先行関係が複雑になると難しくなるばかりでなく混乱を招くことになる。しかし、 I 行列を用いればきわめて容易になることがわかる。そこで、本解法では P 行列は計算機内部で I 行列より構成する。式(1)は表現としては良いが計算量としては膨大なものとなるので、以下に示す手続によって演算時間を極小とすることができる。

【手 続】 I 行列において、まず列(行)に注目し各列(行)に関して行番号の小さいものから逐一探索してゆき、1の立っている要素の行(列)番号と同じ番号を持つ列と論理和をとる。この探索は、それぞれの列(行)に対して一度だけ行う。すなわち、現在の DO ループの回数

* 原稿受付 昭和48年1月20日。昭和47年度精機学会春季大会学術講演会(昭和47年4月7日)にて発表。

** 学生会員 北海道大学工学部(札幌市北区北13条西8丁目)

*** 正 会 員 北海道大学工学部

(a) 先行関係図

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
13	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

(b) I 行列

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
5	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
7	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
8	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
11	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
12	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
13	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

(c) P 行列

図1 先行関係図と行列表現

図2 P 行列の行と列の関係

より小さな行(列)番号の要素に新しく1が立っても再び探索されないが, DO の回数より大きな行(列)番号の要素に新しく1が立った場合は再び探索の対象となる。以下の操作がすべての列(行)に対して完了したら同様のことを各行(列)に対して行う。

【証 明】 図2のような部分先行関係を仮定する。

ここで重要なのは節番号の大小であり, $b < c < d$ と $b > c > d$ のときは自明となるから $b, d < c$ のときを証明する。図2の上側に, この仮定のもとに, 上手続を行のみに, 下側に列のみに関して行った場合, 少なくともこれだけの先行関係は知ることができるというものを示してある。○印中の記号は行番号であり, □印中のものは列番号を示している。@に関して言えば, 要素 c は DO ループの c 回目探索されるため要素 d に新しく1が立っても $d < c$ であるから再び探索されないので要素 e には必ずしも1が立つとはかぎらない。しかし, 図2の下側に示されるように列 b, c, d, e を探索することにより作られる行 c, d, e に1が立っているから完全な行 a が構成できる。すなわち, 上手続を行に関して行ったものと列に関して行ったものとの間には相補的な関係がある。また, 先行関係は図2に示したような部分先行関係の集合であるから, この手続を行えば完全な P 行列を構成することができる。

なお, 閉ループ系の場合, 元来, 先行関係はあり得ないが, 始点と終点と同じ閉ループ系とみなすことができる。図1は閉ループ系の P 行列の処理例を示す。

3. P 行列と費用行列の関係

一般に, 与えられた系に先行関係拘束があれば, 必ず費用行列の中に実行不可能要素が出てくる。すなわち, P 行列と費用行列の間には以下のような明白な関係がある。

- (1) P 行列で, 1が立っている要素の転置要素(先行関係に逆行する要素)に相当する費用行列の要素は実行不可能である。
- (2) P 行列で, 1が立っている要素(先行要素)のうちで I 行列の同じ要素に1が立っていない要素(1次先行以外の先行要素)に相当する費用行列の要素は実行不可能である。

4. 可遷移領域の縮退

Little らの分岐限界法については触れないが, 彼らの方法で最も巧妙なのは, 以前からあった下界の概念よりも, その分岐の動機付けである。しかし, この方法は順序に制約がある場合には, そのままの適用はできない。その理由は遷移領域の中に, 先行関係拘束による実行不可能要素が含まれているからである。ところで, 節の対が逐次選ばれるということは先行関係図上で選ばれた二つの節相互の位置が固定することであり, それまで得られた部分シーケンスは一つの作業と見なすことができる。すなわち, 分岐された枝における新しい先行関係を知ることができ, 更に2節で述べた方法で費用行列上の禁止要素を消去できる。このように可遷移領域の中から実行不可能要素を追いつき, 順序の制約を強めることを「可遷移領域の縮退」(reduction of feasible domain)と呼ぶ。以下, 実行不可能要素に関する基本定理と可遷移領域の縮退の手続を述べる。

基本定理1 並列の場合*

$\{A\} \leq b \leq \{C\}$, $\{A'\} \leq b' \leq \{C'\}$, $a, a_i \in \{A\}$, $a'_i \in \{A'\}$, $c_i \in \{C\}$, $c'_i \in \{C'\}$, a は b の1次先行, c' は

* $a \leq b$ は a 先行 b , $a \ll b$ は a 直前 b , $\{A\}$ は節の集合。

図3 両立しない対

b' の1次後続で対 (b', b) が選ばれたとき, (a_i, c_i) , (c_i', a_i) , (a_i', c_i) , (c_i, a_i') , (a, c_i') , (c_i', a) , (a_i, c') , (c', a_i) , (a, c') , (c', a) , (a_i, b') , (b, a_i') , (b, c_i') , (c_i, b') の対は (b', b) と両立しない (図3(a)).

- 【証明】 対 (b, a_i') , (b, c_i') , (a_i, b') , (c_i, b') , (a_i, c_i') , (c_i', a_i) について証明する. ほかは同様である.
- i) $(b' \ll b) \cap (b \ll a_i') \Rightarrow b' \ll b \ll a_i'$. これは $a_i' \in \{A'\}$ に矛盾する.
 - ii) $(b' \ll b) \cap (b \ll c_i') \Rightarrow b' \ll b \ll c_i'$. これは $b' \leq c' \leq c_i'$ に矛盾する.
 - iii) $(b' \ll b) \cap (a_i \ll b') \Rightarrow a_i \ll b' \ll b$. これは $a_i \leq a \leq b$ に矛盾する.
 - iv) $(b' \ll b) \cap (c_i \ll b') \Rightarrow c_i \ll b' \ll b$. これは $c_i \in \{C\}$ に矛盾する.
 - v) $(b' \ll b) \cap (a_i \ll c_i') \cap (a_i < b) \Rightarrow a_i \ll c_i' \leq b' \ll b$. これは $b' \leq c_i'$ に矛盾する.
 - vi) $(b' \ll b) \cap (c_i' \ll a_i) \cap (a_i < b) \Rightarrow c_i' \ll a_i \leq b' \ll b$. これは $b' \leq c_i'$ に矛盾する.

基本定理2 多重入射節の場合

c は $\{B\}$ からの多重入射節, $b, b_i \in \{B\}$, $a_{ij} \leq b$, $a_{ij} \in \{A_i\}$, $\{A_i\} \leq b_i$ で対 (b, c) が選ばれたとき, (a_{ij}, b) は (b, c) と両立しない (図3(b)).

【証明】 $(a_{ij} \ll b) \cap (b \ll c) \Rightarrow a_{ij} \ll b \ll c$. これは $a_{ij} \leq b_i \leq c$ に矛盾する.

基本定理3 多重射出節の場合

a は $\{B\}$ への多重射出節, $b, b_i \in \{B\}$, $b \leq c_{ij}$, $c_{ij} \in \{C_i\}$, $b_i \leq \{C_i\}$ で対 (a, b) が選ばれたとき (b, c_{ij}) は (a, b) と両立しない (図3(c)).

【証明】 $(b \ll c_{ij}) \cap (a \ll b) \Rightarrow a \ll b \ll c_{ij}$. $a \leq b_i \leq c_{ij}$ に矛盾する.

以上の対に関する基本定理を部分シーケンスにまで拡張すると次のような可遷移領域の縮退の手続となる.

縮退の手続1 すでに選ばれた部分シーケンスや対

図4 フローチャート

を一つの作業と考えて部分シーケンスの始点以外の節の先行節を始点の先行節とし, 終点以外の節の後続節を終点の後続節として先行関係 (I 行列) を書き換える.

縮退の手続2 多重入射節の1次先行節相互間で他の1次先行節の先行節である1次先行節と多重入射節間の遷移を先行関係 (I 行列) より除く.

縮退の手続3 多重射出節の1次後続節相互間で他の1次後続節の後続節である1次後続節と多重射出節間の遷移を先行関係 (I 行列) より除く.

以上の操作で新しい先行関係 (I 行列) ができ上がったわけである. この新しい I 行列から P 行列を構成し, 2節の手続を適用すれば実行不可能要素はすべて消去され可遷移領域の縮退は完了する.

5. フローチャート

基本的なアルゴリズムは Little らの分岐限界法と大差

図5 計算例 (a)

はないが、可遷移領域の縮退というアルゴリズムが組合わされる。フローチャート全体を見れば対の選択よりも可遷移領域（制約領域）の縮退のほうが常に先にあることがわかる。このことは、分岐を続けていくことにより必ず解に到達しうることを保証している。更に、分岐は

図7 計算例 (b)

許される領域の中で最も下界を増さない方向に分岐されていくので効率の良い探索ができる。なお、フローチャートの説明は紙面の都合で省略する(図4)。

6. 計算例および考察

以上、進めてきた議論を確かめるために2,3の数値例について計算を試みた。実験はすべて北海道大学大型計算センターのFACOM 230-60を使用した。

6.1 13作業閉ループ系の例題

先行関係図と費用行列は、それぞれ図1と図5(b)のように与えられる。結果として、最適経路1, 2, 3, 4, 10, 8, 5, 11, 9, 6, 12, 13, 7, 1を得た。総分岐数は51(図5(a))で演算時計は約11秒であった。参考文献[2]では最適経路費用を452としているが、われわれの計算結果によれば最適経路費用は437であり、経路も異なっていることがわかった。なお、3節で述べた可遷移領域の縮退がどのように行われているかを最適解への木に沿って示したのが図6である。

6.2 10作業閉ループ系の例題

図7(a), (b)に先行関係図と費用行列を与える。費用行で×印が記入されている要素は初期実行不可能要素である(参考文献3)では空白となっているが、われわれの方法では自動的に禁止されるので費用行列には何ら手を加える必要はない。先行関係は一見、例題6.1より複雑で難しいように感じられるが、むしろ先行関係拘束の強いほうが可遷移領域の縮退が速いので有利になる。総分岐数21であり(図7(c))、最適経路は1, 2, 4, 3, 7, 5,

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	x	12	98	24	67	1	6	85	71	46	47	84	48	27	17	34	26	89	76	9	95
2	63	x	58	92	94	41	80	42	53	47	80	39	58	27	10	50	80	76	80	2	92
3	29	35	x	64	25	2	20	53	30	52	2	60	14	71	72	3	11	8	95	64	17
4	15	61	41	x	50	41	14	96	34	7	40	16	90	98	73	55	6	18	33	47	30
5	59	18	66	86	x	66	11	26	87	64	36	4	1	4	49	45	81	42	22	35	29
6	50	38	34	52	2	x	90	38	63	39	13	13	63	95	63	53	95	80	67	99	16
7	93	79	21	76	57	49	x	29	51	76	29	80	57	59	68	61	23	61	13	64	57
8	70	90	6	30	89	49	17	x	18	9	49	62	94	22	69	16	16	4	9	70	47
9	4	73	33	60	13	46	23	26	x	24	0	92	73	12	87	95	67	79	66	34	69
10	18	45	72	55	94	49	47	3	22	x	38	41	45	23	19	60	68	73	27	13	60
11	4	0	85	5	17	94	46	24	43	83	x	85	78	77	5	31	81	51	21	68	73
12	79	72	84	67	40	9	73	39	36	25	13	x	16	85	85	40	91	15	32	23	36
13	50	98	0	22	65	73	51	73	95	71	62	48	x	11	65	97	77	72	58	31	20
14	77	81	38	45	92	80	29	91	65	8	47	92	50	x	79	53	67	94	76	36	96
15	37	50	45	60	91	3	44	61	5	49	0	9	86	12	x	60	7	80	0	32	1
16	81	24	70	10	56	52	90	17	53	99	54	23	32	41	55	x	19	20	50	30	1
17	2	77	28	13	73	44	72	20	86	16	9	38	58	21	85	29	x	54	9	18	50
18	98	95	59	26	79	58	74	20	87	71	90	97	88	16	8	73	13	x	90	24	56
19	27	43	96	12	28	1	21	22	98	14	16	47	57	18	35	56	89	14	x	79	41
20	78	28	23	97	51	71	39	43	94	35	54	98	85	10	75	82	54	49	70	x	6
21	29	55	40	34	17	18	20	81	38	27	90	89	20	27	7	31	53	22	94	46	x

図8 計算例(c)

6, 8, 9, 10 で費用は 157 となり, 参考文献 3) と一致していたが, 分岐数は 17 で, われわれの解法よりも少ないものになっていた. しかし参考文献 3) の方法はこのような先行関係の制約の強い場合に有利な方法であり, 制約の緩い場合(極端な場合として, 巡回セールスマン問題において始点と終点だけが与えられたとき, または全く制約がないとき)にはわれわれの方法のほうが有利になると考えられる. 計算時間は約 3 秒であった.

6.3 21 作業閉ループ系の例題

この計算例では実際の大きさの問題を解いてみた. 費用行列は一般性を持たせるために一様乱数を用いて構成した(図 8(b)). 先行関係も無作為に結んでみた(図 8(a)). 総分岐数 691. 最適費用 341. 最適経路は 1, 2, 8, 3, 6, 5, 13, 4, 10, 9, 7, 11, 15, 12, 18, 14, 20, 21, 16, 17, 19, 1 のようになった. 計算時間は約 107 秒であった.

以上, 三つの計算例によって, 本手法が所期の目的を十分果たし得ることがわかった.

7. 結 言

以上の議論をまとめると次のようになる.

- (1) 先行関係のいかんにかかわらず, 効率の良い順序付け問題の解法を示した. 極端な場合として, 先行関係がない場合にも, Little らの分岐限界法となり解法としての有効性を失わない.
- (2) 先行関係の入力は 2 者関係のみで, 入力を容易にした.
- (3) I 行列, P 行列はビット処理されるので演算が迅速であるとともに記憶容量をきわめて少なくできた.

- (4) 実行不能要素は I 行列と P 行列により合理的に消去されることを示した.
- (5) 費用行列の入力に際しても, 先行関係による修正は全く必要としない.
- (6) I 行列から P 行列を構成する場合の有効なアルゴリズムを示した. これによって本手法に実用性が与えられた.
- (7) “可遷移領域の縮退”により, Little らの分岐の動機が使える, 解への収束性を高めた.
- (8) 最後に上記の議論について計算例をあげ所期の結果が得られることを示した.

特に, (2) は先行関係に矛盾がないかぎり全体の先行関係は知る必要はなく, 単に 2 者間の 1 次先行関係を知るのみでよく, 煩雑になりがちな先行関係の入力をきわめて容易にした. 更に, (7) の“可遷移領域の縮退”の概念によって, シーケンス対の選択が自由に行え, 従来の始点からシーケンスを決定していかなければならない方法と異なり, 最適解の最も存在しそうな方向へ探索が進められていく, より柔軟な解法を得ることができた.

最後に実験等において有益な示唆を賜った北海道大学工学部精密工学科助手・久保洋氏に深甚の謝意を表します.

参 考 文 献

- 1) J.D. Little et al.: An Algorithm for the Traveling-salesman Problem, Open. Res., 11 (1963) 972.
- 2) C. McMillan, Jr.: Mathematical Programming, John Wiley & Sons, New York (1970) 304.
- 3) 岡村健二郎, 山品 元: 生産システムの研究 (第 1 報), 精密機械, 35, 8 (1969) 509; 同上 (第 2 報), 精密機械, 35, 9 (1969) 567.
- 4) J. F. ミュースほか: インダストリアル・スケジューリング, 竹内書店 (1966) 66.