球押込みにおける接触面下内部応力分布の究明*

神 宮 利 夫**

On the Aspect of Stress in a Region beneath the Interface
in the Case a Rigid Sphere is Penetrated

Toshio JINGU

An analysis was given of the distribution of stress in semi-infinite elastic medium deformed by the pressure of rigid sphere on a part of plane boundary. The stress components obtained from such an analysis can be expressed with the integral equation. The solution of the integral equation, however so far has been discussed only to find the distribution of stress acting on the interface. To find the aspect of stress beneath the interface, some consideration is needed to solve the integral equation. This paper is to describe the method how to solve the integral equation and, to discuss the aspect of stress with based on the result.

1. は じ め に

半無限弾性体平面の一部を剛体球で押込む問題は弾性論の代表的な問題であり古くから理論解析が試みられてきた。この種の問題について Sneddon¹⁾ はベッセル関数を用いてハンケル変換を行う応用の広い解析法を確立した。また寺沢²⁾ も同様な解析を別個に示した。押込みにおいて接触面に摩擦を伴うときの問題は安³⁾ が検討した。しかしいづれにおいても接触面の応力分布、変位分布の究明にとどめていて、接触面下内部の応力分布の検討は見られない。Sneddon の解析法にしたがって究明をすすめるとき応力成分を表す積分方程式の解が接触面以外のときやっかいである。

本報においては、応力成分を表す積分方程式の解を究明することを主とするが、その結果に基づいて接触面下内部の応力分布を検討する。

2. 球押込みにおける応力成分

記号

$$\left. \begin{array}{l} \rho \\ \theta \\ z \end{array} \right\} : \text{円柱座標}$$
 u_z : 垂直方向変位 u_ρ : 水平方向変位 Φ : 応力関数 J_n : n 次ベッセル関数 a : 接触縁半径 R : 球半径 G : 横弾性係数 E : 縦弾性係数 ν : ポアソン比 σ_ρ : 水平応力 σ_θ : 円周応力 σ_z : 垂直応力 $\tau_{\rho z}$: せん断応力 ρ_0 : ρ/a ζ : z/a

球の弾性押込みにおける応力成分の誘導は文献³⁾ や教科書⁴⁾ に示されているので簡単に述べるにとどめる。

垂直方向および水平方向のそれぞれの変位成分を応力関数 Φ をもって次のように表す。

$$u_z = 2(1-\nu)\nabla^2\Phi - \partial^2\Phi/\partial z^2 \quad (1)$$

$$u_\rho = -\partial^2\Phi/\partial\rho\partial z \quad (2)$$

応力成分はフックの法則から

$$\sigma_\rho/2G = \partial/\partial z(\nu\nabla^2\Phi - \partial^2\Phi/\partial\rho^2) \quad (3)$$

$$\sigma_\theta/2G = \partial/\partial z(\nu\nabla^2\Phi - 1/\rho \times \partial\Phi/\partial\rho) \quad (4)$$

$$\sigma_z/2G = \partial/\partial z\{(2-\nu)\nabla^2\Phi - \partial^2\Phi/\partial z^2\} \quad (5)$$

$$\tau_{\rho z}/2G = \partial/\partial\rho\{(1-\nu)\nabla^2\Phi - \partial^2\Phi/\partial z^2\} \quad (6)$$

応力関数 Φ が重調和方程式であるとすれば

$$\left. \begin{array}{l} \nabla^4\Phi = 0 \\ \nabla^4 = (\partial^2/\partial\rho^2 + 1/\rho \times \partial/\partial\rho + \partial^2/\partial z^2) \\ (\partial^2/\partial\rho^2 + 1/\rho \times \partial/\partial\rho + \partial^2/\partial z^2) \end{array} \right\} \quad (7)$$

式(3),(4),(5),(6)のように表した応力成分はつりあいの式とひずみの適合条件を満足する。式(7)の重調和方程式に ρ と 0 次のベッセル関数 $J_0(\xi\rho)$ を乗じ ρ に関して $0 \sim \infty$ まで積分する積分方程式についてハンケル逆変換を行うと、応力関数は次のように表せる。

* 原稿受付 昭和48年10月29日。精機学会東海支部創立20周年記念講演会(昭和48年6月16日)にて発表。

** 正 会 員 群馬大学工学部(桐生市天神町1-5-1)

$$\Phi = \Phi(\rho, z) = \int_0^\infty \xi Q(\xi, z) J_0(\xi \rho) d\xi \quad (8)$$

なお

$$Q(\xi, z) = (A + Bz)e^{-\xi z} + (C + Dz)e^{\xi z} \quad (9)$$

であり、定数 A, B, C, D が明らかになれば、応力関数の性格がわかる。式 (8) を変位成分の式 (1), (2) および応力成分の式 (3), (4), (5), (6) に代入する。

$$u_z = \int_0^\infty \xi \left\{ (1-2\nu) \frac{d^2}{dz^2} Q(\xi, z) - 2(1-\nu) \xi^2 Q(\xi, z) \right\} J_0(\xi \rho) d\xi \quad (10)$$

$$u_\rho = \frac{\partial}{\partial z} \int_0^\infty \xi^2 Q(\xi, z) J_1(\xi \rho) d\xi \quad (11)$$

$$\frac{\sigma_\rho}{2G} = \int_0^\infty \xi \left\{ \nu \frac{d^3}{dz^3} Q(\xi, z) + (1-\nu) \xi^2 \frac{d}{dz} Q(\xi, z) \right\} J_0(\xi \rho) d\xi - \frac{1}{\rho} \int_0^\infty \xi^2 \frac{d}{dz} Q(\xi, z) J_1(\xi \rho) d\xi \quad (12)$$

$$\frac{\sigma_\theta}{2G} = \nu \int_0^\infty \xi \left\{ \frac{d^3}{dz^3} Q(\xi, z) - \xi^2 \frac{d}{dz} Q(\xi, z) \right\} J_0(\xi \rho) d\xi + \frac{1}{\rho} \int_0^\infty \xi^2 \frac{d}{dz} Q(\xi, z) J_1(\xi \rho) d\xi \quad (13)$$

$$\frac{\sigma_z}{2G} = \int_0^\infty \xi \left\{ (1-\nu) \frac{d^3}{dz^3} Q(\xi, z) - (2-\nu) \xi^2 \frac{d}{dz} Q(\xi, z) \right\} J_0(\xi \rho) d\xi \quad (14)$$

$$\frac{\tau_{\rho z}}{2G} = \int_0^\infty \xi^2 \left\{ \nu \frac{d^2}{dz^2} Q(\xi, z) + (1-\nu) \xi Q(\xi, z) \right\} J_1(\xi \rho) d\xi \quad (15)$$

次に式 (9) の定数を検討するにあたり次のような境界条件を考える。

$$(a) \quad z \rightarrow \infty, \quad u = 0, \quad \sigma = 0$$

$$(b) \quad z = 0, \quad \tau_{\rho z} = 0$$

これら二つの境界条件より $C = D = 0$, $A = 2\nu B/\xi$, したがって式 (9) は

$$Q(\xi, z) = \left(\frac{2\nu}{\xi} + z \right) B e^{-\xi z} \quad (16)$$

残る定数 B は次のようにして定めるが、数式を簡潔にするために次の記号を使用する。 $\xi a = p$, $\rho = a\rho_0$, $z = a\zeta$ 。

$$B = (a/\xi)^2 f(p) \quad (17)$$

$$u_z(\rho_0) = -2(1-\nu) a g(\rho_0) \quad (18)$$

さて、接触面における垂直方向変位と接触境界の外側自由表面における応力は式 (16) を式 (10), (14) にそれぞれ代入することによって

図1 弾性平面への剛体球の押込み

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty f(p) J_0(p\rho_0) dp &= g(\rho_0), \quad 0 \leq \rho_0 < 1 \\ \int_0^\infty p f(p) J_0(p\rho_0) dp &= 0, \quad \rho_0 > 1 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

式 (19) の連立積分方程式の解は

$$f(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \sqrt{p} J_{-\frac{1}{2}}(p) \int_0^1 y^k (1-y^2)^{-\frac{1}{2}} g(y) dy + \int_0^1 y^k (1-y^2)^{-\frac{1}{2}} dy \int_0^1 g(yu) (pu)^{3/2} J_{1/2}(pu) du \right\} \quad (20)$$

なお、式 (20) の y は ρ_0 に対応するものである。さて図 1 より

$$g(\rho_0) = -\frac{u_z}{2a(1-\nu)} = -\frac{1}{2a(1-\nu)} \left(H - \frac{a^2}{2R} \rho_0^2 \right) \quad (21)$$

であるので、式 (20) は

$$\left. \begin{aligned} f(p) &= \frac{2A_0}{\pi} \frac{\sin p}{p} + \frac{4A_2}{\pi} \left(\frac{\sin p}{p} + \frac{2 \cos p}{p^3} - \frac{2 \sin p}{p^5} \right) \\ A_0 &= \frac{-H}{2(1-\nu)a}, \quad A_2 = \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{a}{R} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

となる。したがって接触面における垂直応力は

$$\left[\frac{\sigma_z}{2G} \right]_{\zeta=0} = \int_0^\infty \left(\frac{2A_0}{\pi} + \frac{8A_2}{\pi} \right) \sin p J_0(p\rho_0) dp + \int_0^\infty \frac{8A_2}{\pi} \cdot \frac{(p \cos p - \sin p)}{p^3} J_0(p\rho_0) dp$$

となるが、右辺第 1 項の積分方程式 $\int_0^\infty \sin p e^{-\kappa} J_0(p\rho_0) dp$ は $\zeta=0$, $\rho_0=1.0$ において無限大となるが、球の押込みにおいては $\rho_0=1.0$ において有限であるから $2A_0/\pi + 8A_2/\pi = 0$ でなければならない。

したがって式 (22) は次のようになる。

$$\begin{aligned} f(p) &= \frac{8A_2}{\pi} \cdot \frac{(p \cos p - \sin p)}{p^3} \\ &= \frac{2}{\pi(1-\nu)} \cdot \frac{a}{R} \cdot \frac{(p \cos p - \sin p)}{p^3} \end{aligned} \quad (23)$$

式 (19) と式 (23) より式 (16) は次のようになる。

$$Q(p, \zeta) = \frac{2}{\pi(1-\nu)} \cdot \frac{a}{R} \cdot \frac{(p \cos p - \sin p)}{p^3} \cdot \left(\frac{2\nu a^5}{p^3} + \frac{\zeta a^5}{p^3} \right) e^{-\kappa}$$

これを式 (12), (13), (14), (15) に代入すると応力成分は次のような積分方程式で表すことができる。

$$\begin{aligned}\sigma_r = & \frac{2E}{\pi(1-\nu^2)} \cdot \frac{a}{R} \left\{ \int_0^\infty \frac{(p \cos p - \sin p)}{p^3} e^{-\kappa J_0(p\rho_0)} dp \right. \\ & - \zeta \int_0^\infty \frac{(p \cos p - \sin p)}{p} e^{-\kappa J_0(p\rho_0)} dp \\ & - \frac{(1-2\nu)}{\rho_0} \int_0^\infty \frac{(p \cos p - \sin p)}{p^3} e^{-\kappa J_1(p\rho_0)} dp \\ & \left. + \frac{\zeta}{\rho_0} \int_0^\infty \frac{(p \cos p - \sin p)}{p^3} e^{-\kappa J_1(p\rho_0)} dp \right\} \quad (24)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_\theta = & \frac{2E}{\pi(1-\nu^2)} \cdot \frac{a}{R} \left\{ 2\nu \int_0^\infty \frac{(p \cos p - \sin p)}{p^3} e^{-\kappa J_0(p\rho_0)} dp \right. \\ & + \frac{(1-2\nu)}{\rho_0} \int_0^\infty \frac{(p \cos p - \sin p)}{p^3} e^{-\kappa J_1(p\rho_0)} dp \\ & \left. - \frac{\zeta}{\rho_0} \int_0^\infty \frac{(p \cos p - \sin p)}{p^3} e^{-\kappa J_1(p\rho_0)} dp \right\} \quad (25)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_z = & \frac{2E}{\pi(1-\nu^2)} \cdot \frac{a}{R} \left\{ \int_0^\infty \frac{(p \cos p - \sin p)}{p^3} e^{-\kappa J_0(p\rho_0)} dp \right. \\ & \left. + \zeta \int_0^\infty \frac{(p \cos p - \sin p)}{p} e^{-\kappa J_0(p\rho_0)} dp \right\} \quad (26)\end{aligned}$$

$$\tau_{rz} = \frac{2E}{\pi(1-\nu^2)} \cdot \frac{a}{R} \left\{ \zeta \int_0^\infty \frac{(p \cos p - \sin p)}{p} e^{-\kappa J_1(p\rho_0)} dp \right\} \quad (27)$$

3. 本 論

球の弾性押込みにおける応力成分は三角関数の組合せ、指数関数、およびベッセル関数を含む積分方程式で示されるが、このような積分方程式の解の検討はあまり見あたらない。しかし三角関数、指数関数、ベッセル関数を含む積分方程式の解は種々の文献および参考書で目にする。

そこで、このような積分方程式の解を出発点として球の弾性押込みに対する積分方程式の解を次のような方法で求めた。

すなわち既知の積分方程式の解を基礎として、これに

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{(p \cos p - \sin p)}{p} e^{-\kappa J_0(p\rho_0)} dp = & -\frac{\zeta}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\sqrt{(1-\zeta^2-\rho_0^2)^2+4\zeta^2}+(1-\zeta^2-\rho_0^2)}}{\sqrt{(1-\zeta^2-\rho_0^2)^2+4\zeta^2}} \\ & + \frac{\sqrt{2}\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2-\rho_0^2)^2+4\zeta^2}\sqrt{\sqrt{(1-\zeta^2-\rho_0^2)^2+4\zeta^2}+(1-\zeta^2-\rho_0^2)}} - \tan^{-1} \frac{\sqrt{\sqrt{(1-\zeta^2-\rho_0^2)^2+4\zeta^2}+(1-\zeta^2-\rho_0^2)}}{\sqrt{2}\zeta} \\ & + \frac{\sqrt{2}\zeta\{\sqrt{\sqrt{(1-\zeta^2-\rho_0^2)^2+4\zeta^2}+(1-\zeta^2-\rho_0^2)}\}\{\zeta^2+\sqrt{\sqrt{(1-\zeta^2-\rho_0^2)^2+4\zeta^2}-2\zeta^2}\}}{\sqrt{(1-\zeta^2-\rho_0^2)^2+4\zeta^2}\sqrt{\sqrt{(1-\zeta^2-\rho_0^2)^2+4\zeta^2}+(1-\zeta^2-\rho_0^2)}\{2\zeta^2+\sqrt{\sqrt{(1-\zeta^2-\rho_0^2)^2+4\zeta^2}+(1-\zeta^2-\rho_0^2)}\}} \quad (28)\end{aligned}$$

また式(28)を ρ_0 について微分すると式(28)の解が得られる。

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{(p \cos p - \sin p)}{p} e^{-\kappa J_1(p\rho_0)} dp = & -\frac{\rho_0}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\sqrt{(1-\zeta^2-\rho_0^2)^2+4\zeta^2}+(1-\zeta^2-\rho_0^2)}}{\sqrt{(1-\zeta^2-\rho_0^2)^2+4\zeta^2}} \\ & + \sqrt{2}\rho_0\zeta^2 \frac{\sqrt{\sqrt{(1-\zeta^2-\rho_0^2)^2+4\zeta^2}+(1-\zeta^2-\rho_0^2)}}{\sqrt{(1-\zeta^2-\rho_0^2)^2+4\zeta^2}\{2\zeta^2+\sqrt{\sqrt{(1-\zeta^2-\rho_0^2)^2+4\zeta^2}+(1-\zeta^2-\rho_0^2)}\}} \quad (29)\end{aligned}$$

ついて積分、微分を行って目的の積分方程式の解を得る。

以下、積分方程式の解の究明について具体的に述べる。

応力成分を表す式(24),(25),(26),(27)を構成する積分方程式は次に示す5種類の式からなる。

$$(c) \int_0^\infty \frac{(p \cos p - \sin p)}{p^3} e^{-\kappa J_0(p\rho_0)} dp$$

$$(d) \int_0^\infty \frac{(p \cos p - \sin p)}{p} e^{-\kappa J_0(p\rho_0)} dp$$

$$(e) \int_0^\infty \frac{(p \cos p - \sin p)}{p^3} e^{-\kappa J_1(p\rho_0)} dp$$

$$(f) \int_0^\infty \frac{(p \cos p - \sin p)}{p^3} e^{-\kappa J_1(p\rho_0)} dp$$

$$(g) \int_0^\infty \frac{(p \cos p - \sin p)}{p} e^{-\kappa J_1(p\rho_0)} dp$$

式(c)を解くために次の積分方程式を考える。

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \sin \lambda p e^{-\kappa J_0(p\rho_0)} dp \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\sqrt{(\lambda^2-\zeta^2-\rho_0^2)^2+4\lambda^2\zeta^2}+(\lambda^2-\zeta^2-\rho_0^2)}}{\sqrt{(\lambda^2-\zeta^2-\rho_0^2)^2+4\lambda^2\zeta^2}} \quad (30)\end{aligned}$$

この式の両辺に λ を乗じ λ について0~1まで積分すると式(c)の解が次のように得られる。

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{(p \cos p - \sin p)}{p^3} e^{-\kappa J_0(p\rho_0)} dp \\ = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\sqrt{(1-\zeta^2-\rho_0^2)^2+4\zeta^2}+(1-\zeta^2-\rho_0^2)}}{\sqrt{2}\zeta} \\ + \zeta \tan^{-1} \frac{\sqrt{\sqrt{(1-\zeta^2-\rho_0^2)^2+4\zeta^2}+(1-\zeta^2-\rho_0^2)}}{\sqrt{2}\zeta} \quad (31)\end{aligned}$$

式(31)を ζ に関して微分すると式(d)の解が求められる。

式(31)に変数 λ を導入しても次のようなかたちであれば等号が成立つ.

$$\int_0^\infty \frac{(\lambda p \cos \lambda p - \sin \lambda p)}{p} e^{-\kappa J_1(p\rho_0)} dp = -\frac{\rho_0}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{(\lambda^2 - \zeta^2 - \rho_0^2)^2 + 4\lambda^2 \zeta^2 + (\lambda^2 - \zeta^2 - \rho_0^2)}}{\sqrt{(\lambda^2 - \zeta^2 - \rho_0^2)^2 + 4\lambda^2 \zeta^2}} \\ + \sqrt{2} \rho_0 \zeta^2 \frac{\sqrt{(\lambda^2 - \zeta^2 - \rho_0^2)^2 + 4\lambda^2 \zeta^2 + (\lambda^2 - \zeta^2 - \rho_0^2)}}{\sqrt{(\lambda^2 - \zeta^2 - \rho_0^2)^2 + 4\lambda^2 \zeta^2} \{2\zeta^2 + \sqrt{(\lambda^2 - \zeta^2 - \rho_0^2)^2 + 4\lambda^2 \zeta^2 + (\lambda^2 - \zeta^2 - \rho_0^2)}\}}$$

この式の両辺に λ を乗じ λ について $0 \sim 1$ まで積分する. その結果は次のようである.

$$3 \int_0^\infty \frac{(p \cos p - \sin p)}{p^3} e^{-\kappa J_1(p\rho_0)} dp + \int_0^\infty \frac{\sin p}{p} e^{-\kappa J_1(p\rho_0)} dp = -\frac{\rho_0}{\sqrt{2}} \sqrt{(1 - \zeta^2 - \rho_0^2)^2 + 4\zeta^2 + (1 - \zeta^2 - \rho_0^2)} \\ + \frac{3\rho_0 \zeta}{2} \tan^{-1} \frac{\sqrt{(1 - \zeta^2 - \rho_0^2)^2 + 4\zeta^2 + (1 - \zeta^2 - \rho_0^2)}}{\sqrt{2} \zeta} - \frac{\rho_0 \zeta^2}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{(1 - \zeta^2 - \rho_0^2)^2 + 4\zeta^2 + (1 - \zeta^2 - \rho_0^2)}}{\{2\zeta^2 + \sqrt{(1 - \zeta^2 - \rho_0^2)^2 + 4\zeta^2 + (1 - \zeta^2 - \rho_0^2)}\}} \quad (32)$$

左辺第2項の積分方程式の解は

$$\int_0^\infty \frac{\sin p}{p} e^{-\kappa J_1(p\rho_0)} dp = \frac{1}{\rho_0} \left\{ 1 - \frac{\sqrt{(1 - \zeta^2 - \rho_0^2)^2 + 4\zeta^2 + (1 - \zeta^2 - \rho_0^2)}}{\sqrt{2}} \right\} \quad (33)$$

であるので,

$$\int_0^\infty \frac{(p \cos p - \sin p)}{p^3} e^{-\kappa J_1(p\rho_0)} dp = -\frac{\rho_0}{3\sqrt{2}} \sqrt{(1 - \zeta^2 - \rho_0^2)^2 + 4\zeta^2 + (1 - \zeta^2 - \rho_0^2)} \\ + \frac{\rho_0 \zeta}{2} \tan^{-1} \frac{\sqrt{(1 - \zeta^2 - \rho_0^2)^2 + 4\zeta^2 + (1 - \zeta^2 - \rho_0^2)}}{\sqrt{2} \zeta} - \frac{\rho_0 \zeta^2}{3\sqrt{2}} \frac{\sqrt{(1 - \zeta^2 - \rho_0^2)^2 + 4\zeta^2 + (1 - \zeta^2 - \rho_0^2)}}{\{2\zeta^2 + \sqrt{(1 - \zeta^2 - \rho_0^2)^2 + 4\zeta^2 + (1 - \zeta^2 - \rho_0^2)}\}} \\ - \frac{1}{3\rho_0} \left\{ 1 - \frac{\sqrt{(1 - \zeta^2 - \rho_0^2)^2 + 4\zeta^2 + (1 - \zeta^2 - \rho_0^2)}}{\sqrt{2}} \right\} \quad (34)$$

これは式(e)の解である. 式(34)を ζ で微分すると式(f)の解が得られる.

$$\int_0^\infty \frac{(p \cos p - \sin p)}{p^2} e^{-\kappa J_1(p\rho_0)} dp = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}} \frac{1}{\rho_0} - \frac{\rho_0}{3\sqrt{2}} \right) \left\{ \frac{\zeta \sqrt{(1 - \zeta^2 - \rho_0^2)^2 + 4\zeta^2 + (1 - \zeta^2 - \rho_0^2)}}{\sqrt{(1 - \zeta^2 - \rho_0^2)^2 + 4\zeta^2}} \right. \\ \left. - \frac{2\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2 - \rho_0^2)^2 + 4\zeta^2} \sqrt{(1 - \zeta^2 - \rho_0^2)^2 + 4\zeta^2 + (1 - \zeta^2 - \rho_0^2)}} \right\} - \frac{\rho_0}{2} \tan^{-1} \frac{\sqrt{(1 - \zeta^2 - \rho_0^2)^2 + 4\zeta^2 + (1 - \zeta^2 - \rho_0^2)}}{\sqrt{2} \zeta} \\ + \frac{\rho_0 \zeta}{\sqrt{2}} \frac{[\{\sqrt{(1 - \zeta^2 - \rho_0^2)^2 + 4\zeta^2 + (1 - \zeta^2 - \rho_0^2)}\} \{\zeta^2 + \sqrt{(1 - \zeta^2 - \rho_0^2)^2 + 4\zeta^2} - 2\zeta^2\}]}{\sqrt{(1 - \zeta^2 - \rho_0^2)^2 + 4\zeta^2} \sqrt{(1 - \zeta^2 - \rho_0^2)^2 + 4\zeta^2 + (1 - \zeta^2 - \rho_0^2)} \{2\zeta^2 + \sqrt{(1 - \zeta^2 - \rho_0^2)^2 + 4\zeta^2 + (1 - \zeta^2 - \rho_0^2)}\}} \\ + \frac{\sqrt{2}}{3} \zeta \rho_0 \frac{\sqrt{(1 - \zeta^2 - \rho_0^2)^2 + 4\zeta^2 + (1 - \zeta^2 - \rho_0^2)}}{\{2\zeta^2 + \sqrt{(1 - \zeta^2 - \rho_0^2)^2 + 4\zeta^2 + (1 - \zeta^2 - \rho_0^2)}\}} \\ - \frac{\rho_0 \zeta^3}{3\sqrt{2}} \frac{[\{\sqrt{(1 - \zeta^2 - \rho_0^2)^2 + 4\zeta^2 + (1 - \zeta^2 - \rho_0^2)} - 2\} \{2\zeta^2 + \sqrt{(1 - \zeta^2 - \rho_0^2)^2 + 4\zeta^2 + (1 - \zeta^2 - \rho_0^2)}\}]}{\sqrt{(1 - \zeta^2 - \rho_0^2)^2 + 4\zeta^2} \sqrt{(1 - \zeta^2 - \rho_0^2)^2 + 4\zeta^2 + (1 - \zeta^2 - \rho_0^2)}} \\ + 2 \frac{[\sqrt{(1 - \zeta^2 - \rho_0^2)^2 + 4\zeta^2 + (1 - \zeta^2 - \rho_0^2)}] \{ \sqrt{(1 - \zeta^2 - \rho_0^2)^2 + 4\zeta^2} - (1 - \zeta^2 - \rho_0^2) + 2 \}}{\{2\zeta^2 + \sqrt{(1 - \zeta^2 - \rho_0^2)^2 + 4\zeta^2 + (1 - \zeta^2 - \rho_0^2)}\}^2} \quad (35)$$

以上の積分方程式の解を応力成分の式(24), (25), (26), (27)に代入する前に式の表現を簡単にするために次のように置く.

$$\Psi = \sqrt{(1 - \zeta^2 - \rho_0^2)^2 + 4\zeta^2}$$

$$\phi = \sqrt{\sqrt{(1 - \zeta^2 - \rho_0^2)^2 + 4\zeta^2} + (1 - \zeta^2 - \rho_0^2)}$$

$$\sigma_\rho = \frac{2E}{\pi(1-\nu^2)} \frac{a}{R} \left\{ -1 + \frac{(1-2\nu)}{3} - \frac{(1-2\nu)}{3\rho_0^2} \right\} \frac{\phi}{\sqrt{2}}$$

$$+ \left\{ \frac{3}{2} \zeta - \frac{(1-2\nu)}{2} \zeta \right\} \tan^{-1} \frac{\phi}{\sqrt{2} \zeta} + \frac{(1-2\nu)}{3\rho_0^2}$$

$$+ \frac{(3-2\nu)\zeta^2 \phi}{3\sqrt{2}(\phi^2 + 2\zeta^2)} + \frac{1}{3} \left(2 + \frac{1}{\rho_0^2} \right) \left(\frac{\zeta^2}{\sqrt{2}} \frac{\phi}{\Psi} - \frac{\sqrt{2} \zeta^2}{\Psi \phi} \right)$$

$$- \frac{\zeta^3}{\sqrt{2}} \frac{\{\phi^2(\Psi^2 + \zeta^2) - 2\zeta^2\}}{\Psi \phi(\phi^2 + 2\zeta^2)}$$

$$- \frac{\zeta^4}{3\sqrt{2}} \frac{[(\phi^2 - 2)(\phi^2 + 2\zeta^2) + 2\phi^2 \{ \Psi + 1 + \zeta^2 + \rho_0^2 \}]}{\Psi \phi(\phi^2 + 2\zeta^2)^2} \quad (36)$$

$$\sigma_\theta = \frac{2E}{\pi(1-\nu^2)} \frac{a}{R} \left\{ \left[\frac{(1-2\nu)}{3\rho_0^2} - 2\nu - \frac{(1-2\nu)}{3} \right] \frac{\phi}{\sqrt{2}} \right.$$

図2 垂直応力水平方向分布

図3 垂直等応力線図

$$\begin{aligned}
 & + \left\{ 2\nu\zeta + \frac{(1-2\nu)\zeta}{2} + \frac{\zeta}{2} \right\} \tan^{-1} \frac{\phi}{\sqrt{2}\zeta} \\
 & - \frac{(3-2\nu)\zeta^2\phi}{3\sqrt{2}(\phi^2+2\zeta^2)} - \frac{(1-2\nu)}{3\rho_0^3} \\
 & - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\rho_0^3} - 1 \right) \left(\frac{\zeta^2}{\sqrt{2}} \frac{\phi}{\Psi} - \frac{\sqrt{2}\zeta^2}{\Psi\phi} \right) \\
 & - \frac{\zeta^2}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{\phi^2(\Psi+\zeta^2)-2\zeta^2}{\Psi\phi(\phi^2+2\zeta^2)} \right\} \\
 & + \frac{\zeta^4}{3\sqrt{2}} \left\{ \frac{(\phi^2-2)(\phi^2+2\zeta^2)+2\phi^2(\Psi+1+\zeta^2+\rho_0^3)}{\Psi\phi(\phi^2+2\zeta^2)^2} \right\} \quad (37)
 \end{aligned}$$

$$\sigma_z = \frac{2E}{\pi(1-\nu^2)} \cdot \frac{a}{R} \left[-\frac{\phi}{\sqrt{2}} - \frac{\zeta^2}{\sqrt{2}} \frac{\phi}{\Psi} + \frac{\sqrt{2}\zeta^2}{\Psi\phi} + \frac{\sqrt{2}\zeta^2\{\phi^2(\Psi+\zeta^2)-2\zeta^2\}}{\Psi\phi(\phi^2+2\zeta^2)} \right] \quad (38)$$

$$\tau_{\rho z} = \frac{2E}{\pi(1-\nu^2)} \cdot \frac{a}{R} \left\{ -\frac{\rho_0\zeta}{\sqrt{2}} \frac{\phi}{\Psi} + \frac{\sqrt{2}\rho_0\zeta^2\phi}{\Psi(\phi^2+2\zeta^2)} \right\} \quad (39)$$

4. 接触面下内部の応力分布

以上のようにして得られた応力成分を水平方向に対する分布と内部領域において応力の等しい点を結んで得られる等応力線を示し、分布の状態を簡単に説明する。

図4 水平応力水平方向分布

図5 水平等応力線図

4.1 垂直応力分布

水平方向に対する垂直応力分布を図2に示す。

接触面 $\zeta=0$ における応力分布は中心軸において最大となり、接触境界でゼロとなる半円形の分布を示す。

接触面付近の浅い内部では半円形に近い分布であるが、接触境界およびその外側で応力値はゼロとならず非常に小さい値で存在する。深い内部においては水平方向に対してほぼ様な分布となる。等応力線図(図3)を見ると接触面に近い中心軸付近で最も応力値は大きく、接触中心のまわりに半円形の分布で広がる。これより深い内部および接触境界に近い領域においても等応力線は半円形を保つが応力値が小さくなる。これらの領域では中心軸上で応力の変化は等間隔である。さらに応力値が小さくなると等応力線は半円形の中心をずっと深い内部に移しているが、半円形の分布を保っている。

4.2 水平応力分布

水平方向に対する水平応力分布を図4に示す。

接触面における水平応力は中心軸で最大となり、 $\rho_0 \geq 1$ でゼロとなる半円形の分布を示す。ごく接触面付近では半円形の傾向が残るが、接触境界の外側では応力値はゼロとならず小さいが存在する。深い内部の $\zeta=0.6$ においては図に示す水平方向の範囲ではその位置によらず応力値は一定で様な分布を示す。さらに深い内部の $\zeta=1.5$ では中心軸付近でほとんど応力値はゼロであるが、接触境界およびその外側においては図4に示す範囲

図6 せん断応力水平方向分布

図7 せん断等応力線図

図8 最大せん断等応力線図

図9 球押込みにおけるすべり線

において応力値は次第に大きくなる。等応力線図(図5)を見ると応力値の大きい領域が接触面付近で接触面にそって平行になるぐらい、かなり偏平な半円形として広がる。応力値が -0.2 等応力線は接触境界に近づくとき、水平方向に対する広がりを縮めて接触境界点に収束する形状となり、傾向が急激に変わる。さらに小さい応力値 -0.1 の等応力線は中心軸付近で比較的浅い領域を通るが、接触境界付近では深い内部の領域を囲み、したがってその応力値の占める領域は広い。

4.3 せん断応力分布

水平方向に対するせん断応力分布を図6に示す。

解析において仮定したように接触面においてはせん断応力はゼロである。接触面にごく近い $\zeta=0.01$ 層では応力値は小さいが中心軸から接触境界に向かって徐々に増加し、接触境界で急激に増大し最大となる。また、その外側で再び急激に減少し応力は非常に小さくなる。これより少し深い内部の $\zeta=0.2$ では傾向がもっと端的である。この場合には接触境界の内側の $\rho_0=0.9$ あたりで最大となる。

等応力線図(図7)を見ると応力値の大きいところは $\rho_0=0.8$ 、 $\zeta=0.4$ あたりに分布し、等応力線はとがった方を接触境界点に向けて卵形に分布する。応力値が小さ

くなると等応力線の領域は深い内部に広がり接触面に対しては、せばまる傾向にある。接触面および中心軸に近い領域では応力値は非常に小さい。

4.4 最大せん断応力とすべり線

応力成分の組合せから得られる最大せん断応力について応力値の等しい点を結んで得られる等応力線を図8に示す。最大せん断応力が最も大きくなる領域は接触面上ではなく、ずっと深い内部の $\zeta=0.4\sim0.6$ にかけてである。この領域における等応力線はだ円になる。応力値が小さくなると接触面に近いところでは等応力線は接触面に平行に走る。一方、深い層では半円形となり、応力値が小さくなると等応力の領域が広がる。

次に最大せん断応力の方向を連ねてえがいたすべり線を図9に示す。 $\zeta \leq 0.4$ と $\rho_0 \leq \pm 0.4$ で囲まれた三角形の領域においては接触面に対して 45° のすべり線で直線すべり線場である。また中心軸付近の狭い範囲であるが深い内部になっても 45° のすべり線である。その他の領域においては場所によってすべり線の方法が変化する曲線すべり線場である。

最大せん断応力がある値に達すると、塑性変形を開始する材料を考えると——ほとんど金属材料はそうである——最初に塑性変形する領域は接触面より、ずっと下

側の内部であることがわかる。

このような領域は主応力に対して 45° の方向のすべり線であり、すべりが生じやすいことを示している。

5. む す び

剛体球を弾性平面に押込むときの応力成分は、ハンケル変換を用いた理論によって積分方程式で表される。接触面下内部応力分布を検討するために積分方程式の解を究明する必要がある。本論にしたように簡潔な方法を用いて解を得ることができた。これに基づいて接触面下内部応力分布の状態を明らかにした。

終わりに臨み、本研究を遂行するにあたり終始激励をたまわりました群馬大学工学部・町田周郎教授、ならび

に同工業短期大学部・百々義当教授に厚く感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) I. N. Sneddon: Fourier Transform, McGraw-Hill, N. Y. (1951).
- 2) K. Terazawa: On the Elastic Equilibrium of a Semi-infinite Solid under Given Boundary Conditions, with Some Applications, J. College of Sci. Imperial Univ., Tokyo, **37**, Art 7 (1916).
- 3) 安 文在: 剛体球で押された半無限弾性問題, 日本機械学会論文集, **24**, 147 (1958) 757.
- 4) 宮本 博: 三次元弾性論, 裳華房 (1967).
- 5) D. Tabor: The Hardness of Metals, Clarendon Press, Oxford (1951).

精密工学系大学院の研究テーマの調査結果

頭書の M は修士課程, D は博士課程を, テーマのあとのかっこ中の人名は指導教官名を示す。

大阪大学 (その 4)

- D アルカリハライド単結晶の固溶体硬化に関する研究 (山田朝治)
- D 工作機械の位置決め精度に関する研究 (津和秀夫, 井川直哉)
- D フレッシング摩耗に関する研究 (築添 正)

京都大学 (その 2)

- D モンテカルロ法を用いた非線形フィルタ
- D 計算誤差のある場合の山登り法
- D 信頼性を考慮した制御系のシンセシス (明石 一)
- D 過渡的切削過程の研究
- D 切削加工におけるびり振動に関する研究 (岡村健二郎)
- D 摩擦音に関する基礎的研究 (佐藤 進)

東京大学

- D 多孔質複合材料の破壊に関する研究
- D 結晶粒界に関する研究
- D 鋳鉄の機械的性質に関する研究
- D 金属材料の疲れ機構に関する研究
- M 表面き裂の挙動に関する研究
- M 粗大結晶粒の機械的挙動に関する研究 (宮本 博)
- D 超高真空中における二硫化モリブデンの摩擦の研究
- M 磁性薄膜に関する研究 (松永正久)
- D 高速精密位置決めサーボに関する研究
- M 洞道掘削の自動化に関する研究
- M 工作機械適応制御に関する研究
- M NC 用サーボ機構に関する研究
- M 最短時間制御に関する研究
- M 環境汚染制御に関する研究
- M 微小パターン位置決め制御の応用に関する研究 (大島康次郎)

- D 電磁成形とその応用に関する研究
- D スリッタに関する研究
- M せん断工具の摩耗に関する研究 (前田禎三)
- D ホログラフィによる精密測定法の研究
- D 高速度・高エネルギー密度による加工機構の研究
- M ホログラフィによる精密測定法の研究 (植村恒義)
- D 超精密工作機械の研究
- D 機械生産における調整問題
- D 工作機械の自励振動解析
- D 工作機械群の実時間加工計算機制御
- D 工作機械の熱変形解析とその制御
- D 切削データバンクシステム
- M 研削加工における形状精度の研究
- M 超精密加工における工作精度
- M 工作機械における自動故障診断システム (佐田登志夫)
- D 人工臓器の基礎的研究
- M ジャイロ機構を用いた 3 次元位置決めに関する研究
- M ヒトの腕の生体工学的研究 (舟久保熙康)
- D 自動組立の研究
- M 人間機械系に関する研究 (木下夏夫)
- D 機能論的設計に関する研究
- D 形状の機能論
- D 機械設計の一般理論に関する研究
- D 機械の信頼性に関する研究
- M 機械の整合的モデルの研究
- M 機能集合に関する研究
- M 自動設計システムに関する研究 (吉川弘之)
- M 制御による防振
- M 情報機器における高速位置決めに関する研究 (神保泰雄)
- M 不規則振動に対する非線形の挙動 (高野政晴)
- M 位置決め再現性についての研究 (大園成夫)
- M 電子部品のパッケージングに関する研究
- M 数値制御用機器に関する研究 (小田原豪太郎)
- M J_{rc} 破壊条件における有限変形の効果に関する研究 (三好俊郎)