自励びり振動の発生限界に関する研究*

—円筒プランジ研削のびり(第2報)—

鴻 巢 健 治**

Study of Generating Point in Self-excited Chatter Vibration

—Chatter Vibration in Cylindrical Plunge Grinding (2nd Report)—

Kenji KOUNOSU

This paper deals with analysis of the transition phenomena changed from the stable to the unstable grinding. From the previous paper, the grinding system can be expressed by the model of the parametric vibration system, and so it is made the Mathieu's equation. The parametric factor on its equation, which is the "working state" of the grinding wheel periphery, is given the criterion of the stable grinding. The characteristic phenomenon, which is progressive increasing chatter-amplitude, can't be explained by the usual regenerative theory, but can be made clear by the above method. The experimental results obtained the approximate 40% agreement with the theoretical analysis. Furthermore, the principle of chatter prevention is considered by means of this method.

1. 緒 言

研削加工において発生する自励びり振動は、砥石作業面にうねりが生じる場合および工作物加工面にうねりが生じる場合に分類され、研究がなされてきた。円筒研削加工では、多くの場合砥石うねり型のびりが発生しやすいが、しかし研削初期に、砥石作業面にうねりがまだみられないにもかかわらず、びりが発生することがある。このびりの発生原因として、砥石作業面の周期的状態変化が大きく影響することを前報で述べた¹⁾。それによると研削加工系は、パラメトリックな振動系を不安定原因とする振動モデルとして表すことができた。

本報は、このパラメトリック振動系の運動方程式が、減衰項をもった Mathieu 型微分方程式として表すことができ、この方程式の解の安定性を検討することにより、研削過程に安定研削から不安定研削へ移行する現象の説明ができることを示している。また、研削加工系の固有振動数の近傍でびりが発生するとき、安定限界を決める因子の砥石作業面の変動値について、計算と実験結果の比較検討を行った。

2. 安定限界値の解析

前報で検討した円筒研削加工系の研削初期の振動モデルは図1のようになり¹⁾、この系の運動方程式は、式(1)

のような減衰を伴う Mathieu 型微分方程式になる。

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + r \cdot \frac{dx}{dt} + (k_m + \bar{k}_c + \Delta k_c \cos \omega_c t) x = 0 \quad (1)$$

いま、式(2)のように変数を置換えることにより式(3)が得られる。

$$x = z \cdot \exp(-rt/2m) \quad (2)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \left\{ \frac{k_m + \bar{k}_c}{m} - \left(\frac{r}{2m} \right)^2 + \frac{\Delta k_c}{m} \cos \omega_c t \right\} z = 0 \quad (3)$$

Mathieu の微分方程式(3)の解、および式(2)より式(1)の解の安定・不安定について検討することになる。しかし、係数が周期関数になるパラメトリック振動系の問題は、式(1)または(3)の解そのものを見いだすのではなく、この運動方程式の解が安定または不安定となる領域にあるかを決定するのが實際上主要な問題といえる²⁾。

この方程式の解は一般に

$$x = f(m, r, k_m, \bar{k}_c, \Delta k_c, \omega_c) \quad (4)$$

のような関数になり、解の安定は式(4)に示されるそれぞれのパラメータについて検討すればよい。これらのうち、 m, r, k_m は工作物を含めた機械(研削盤)系の値で、

m : 工作物の等価質量, r : 工作物の粘性係数,
 k_m : 工作物のばね剛性, $\bar{k}_c$: 連成ばね剛性, Δk_c :
 研削剛性の変動分, ω_c : びり角振動数

図1 研削加工系の研削初期の振動モデル

* 原稿受付 昭和49年4月17日。新潟地方講演会(昭和47年6月30日)にて発表。

** 正会員 東京都立大学工学部(東京都世田谷区深沢2-1-1)

n_w : 工作物回転数, s_p : 切込み, b : 研削幅
 図2 研削剛性とびり振動数の関係

研削中工作物形状または心押台スリーブ長さなどが変わらないかぎり不変であると考えることができる。

次に、研削加工中に砥石と工作物間に接触剛性が作用することが指摘されている^{3), 4)}。連成ばね剛性 $\bar{k}_c$ は、接触剛性 k_c と研削剛性 k_g が結合されたものであり、これらの関数であると考え⁵⁾。

$$\bar{k}_c = f(k_c, k_g) \quad (5)$$

研削剛性（比研削抵抗に比例）は、小野⁶⁾によれば砥石周速 v_s 、工作物周速 v_w などの関数になり、また米津⁷⁾の検討によれば接触剛性も v_s 、 v_w などの関数になっている。これらの関係と計算を単純化するため、接触剛性を研削剛性の関数とし、連成ばね剛性を研削剛性の関数として次のように表すことにする。

$$\bar{k}_c = K \cdot k_g \quad (6)$$

図2は、実験より求めた研削剛性 k_g とびり振動数 f_c との関連をプロットしたものである。図1の研削加工系のモデルより、系の固有振動数は

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\bar{k}_c + k_m}{m}} \quad (7)$$

となる。式(6)において K を比例定数として、 $K=0.4$ の場合、式(7)の計算結果を図に破線で示した。実験結果との比較で、この計算値の近傍でびりが発生していると見ることができる。これらの結果から、 $\bar{k}_c$ を k_g に比例する値とする。また法線方向の研削力は、研削初期にほとんど不変であるので、研削中 $\bar{k}_c$ は一定であると考え。

以上のことから、このパラメトリック振動系において研削過程の安定限界を決める因子は Δk_c になる。前報で検討したように、砥石作業面の周期的状態変化すなわち変動研削剛性 Δk_c は、目づまりまたは砥粒の摩耗・脱落などが砥石作業面上で周期的に変化することであるが、砥石には自生作用があるので必ずしも時間的に累進的に増加するものではない。しかし、研削過程を全体的に見れば Δk_c は時間関数または累積切込み量 V_w の関数とな

図3 安定限界図

ると考えてよいと思われる。これは式(8)のようになる。

$$\Delta k_c = f(t \text{ or } V_w) \quad (8)$$

ここでは Δk_c の値が時間の経過とともにある値になったとき、このパラメトリック振動系が不安定域に入っていく、加工状態が不安定になることを示すことにする。安定限界の解法は、減衰項が加わらない Mathieu の微分方程式 ($r=0$ の場合) より複雑になるが、國井ら⁸⁾により近似解法が示されている。式(1)を次のように記号変換する。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\omega_c \frac{dx}{dt} + \omega_c^2(\alpha + \varepsilon \cos \omega_c t)x = 0 \quad (9)$$

$$\alpha = \frac{k_m + \bar{k}_c}{m\omega_c^2}, \quad \beta = \frac{r}{2m\omega_c}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta k_c}{m\omega_c^2} \quad (10)$$

式(9)の安定限界線を描いたのが図3である。ただし図中のパラメータ h は、図1の研削加工系の振動モデルの減衰比で、工作物支持系を含めた工作物系の減衰比 ζ との間に次の関係がある。

$$h = \sqrt{\frac{k_m}{\bar{k}_c + k_m}} \cdot \zeta \quad (11)$$

横軸の $\alpha - \beta^2$ は、式(10)より

$$\alpha - \beta^2 = \frac{(\bar{k}_c + k_m)/m - r^2/4m^2}{\omega_c^2} = \left(\frac{\omega_n}{\omega_c}\right)^2 \quad (12)$$

すなわち、研削加工系の固有振動数とびり周波数の比の2乗値になる。ただし r の値は小さいとしたが、通常の工作機械では減衰比 $\zeta=0.05$ 前後の値になる。

パラメトリック振動系は、1/2 次分数調波の不安定信号が出やすいのが特徴である。稲崎ら⁹⁾は、 $\omega_c \approx 2\omega_n$ になるよう砥石作業面に人為的な目づまりを造り、不安定周波数が発生するのを確かめている。しかし1/2 次分数調波の不安定振動については、強制振動の問題であり、自励振動に基づくびり周波数は、研削加工系の固有振動数の近傍で発生するので、2/2 次の不安定振動につい

図4 安定限界値を求める図

てのみ安定限界を検討すればよい。すなわち $\alpha - \beta^2 \approx 1$ に着目すればよい。図4は砥石と工作物間の動剛性を

$$Y_m(s) = 5.4 \times 10^{-8} \cdot s^2 + 2.5 \times 10^{-5} \cdot s + 3.3 \text{ kg}/\mu\text{m} \quad (13)$$

とし(本実験に使用した万能研削盤・工作物系の動特性)、横軸を周波数表示にした安定限界曲線図である。図の例から $f_c = 1750 \text{ Hz}$ のとき $\varepsilon \approx 0.32$ であるから

$$\Delta k_c = m \cdot \omega_c^2 \cdot \varepsilon = 5.4 \times 10^{-8} \times (2\pi \times 1750)^2 \times 0.32 = 2.13 \text{ kg}/\mu\text{m}$$

となる。砥石作業面に整数個 ρ のまだら模様に乗ると考えられる¹⁾。この値は次のようになる。

$$\rho = f_c \cdot 60 / n_s \quad (14)$$

系の固有振動数近くの ρ の値に対する安定限界値を変動成分 Δk_c で表すと表1のようになる。ただし砥石回転数は $n_s = 2100 \text{ rpm}$ とした。このようにびびり周波数によって安定限界値が異なる。この値を理論安定限界値 $\Delta k_{c,th}$ と呼ぶことにする。また図3において原点を通る直線の勾配 η は

$$\eta = \frac{\varepsilon}{\alpha - \beta^2} = \frac{1}{1 - \zeta^2} \cdot \frac{\Delta k_c}{k_c + k_m} \quad (15)$$

となり、安定限界曲線と交わるかどうかによって、びびり周波数に無関係に安定・不安定が確かめられる。図3から2/2次の不安定振動の $h = 0.1$ の安定限界曲線と接し、原点を通る勾配 η の直線の場合について考えてみる。原点を通る直線と安定限界曲線の接点は $\alpha - \beta^2 \approx 1$ の付近になり、したがって式(12)より $\omega_c \approx \omega_n$ となる。これは振動系の減衰比 h が小さい場合、その系の固有振動数近傍の不安定振動が発生しやすいことからわかる。したがって、勾配 η の値は、

$$\eta \approx \varepsilon_{\min} \quad (16)$$

ただし、 $\varepsilon_{\min}$ は2/2次不安定振動の安定限界曲線の最小値である。これから安定限界の Δk_c の値が決定できる。この値を絶対安定限界値 $\Delta k_{c,ab}$ と呼ぶことにする。図から

$$\Delta k_{c,ab} \leq \Delta k_{c,th} \quad (17)$$

となる。 $\Delta k_{c,ab}$ は安定限界を求める目安となる。

表1 安定限界値

ρ	$f_c \text{ (Hz)}$	$\Delta k_c \text{ (kg}/\mu\text{m)}$
46	1610	4.35
47	1645	3.47
48	1680	2.58
49	1715	1.73
50	1750	2.13
51	1785	3.75
52	1820	5.61

図5 変動動力測定図

3. 変動研削力の測定

砥石作業面の周期的状態変化 Δk_c の値を決定するためには、研削加工中の変動力の測定が必要になる。平面研削加工と異なり¹⁰⁾、円筒研削加工の場合加工系への動力計の挿入がむずかしい。著者は、円筒研削についてセンタを含む工作物およびその支持系全体を動力計と考え、これの換算方法について検討した結果を報告している¹¹⁾。これは心押台センタのひずみを取りだす方法より換算を行っているが、自励びびり振動は系の共振周波数の近傍で発生するので換算がむずかしい。本実験では、図5に示すような振止型粘性ランチェスタダンパを使用した。このような粘性抵抗が挿入されると、ピーク値がさがりその振動数が減少する。自励びびり振動の発生する範囲から考えると、センタひずみと力の対応が比例関係でなく、周波数による換算が必要になり、変動分 Δk_c の測定精度としてはあまり良好とはいえない*。ここでは、びびり周波数は単一周波数であると仮定して換算を行う。このようなダンパを系に挿入することは、その減衰比により周波数が変わるが、この減衰比に無関係に二つの定点を通ることが知られている¹²⁾。ランチェスタダンパの場合、その一つの定点が周波数 $\omega = 0$ の点になるので、工作物 m の運動は一自由度のようになる。このことは図6(a)のインパルス応答より、ダンパ挿入の場合も一自由度として考えてよいと思われる。したがって、図5の振動モデルより工作物の変位 X_1 と変動力 F との換算式は次のようになる。

$$\left| \frac{X_1}{F} \right| = \sqrt{\frac{r_d^2 + \omega^2 \cdot m_d^2}{r_d^2 \{k_m - \omega^2(m + m_d)\}^2 + \omega^2 m_d^2 (k_m - \omega^2 m)^2}} \quad (18)$$

* 動力計として、測定周波数より固有振動数が高いのが理想である。文献1)の砥石作業面検定用動力計は、固有振動数が高く理想的であるが、切込み量が不明のために、 Δk_c の換算が不可能である。

ダンパなし ダンパ付き
(a) 衝撃応答 (1ms/div)

(b) 周波数応答

図6 工作系の動特性

実験条件: $n_w=180$ rpm ($v_w=23$ m/min), $s_p=1$ μ m/rev, $b=30$ mm

図7 変動分の測定例

図6(a)の衝撃応答例から、減衰比はダンパなしの場合 $\zeta=0.03$, またダンパを挿入した場合 (油粘度 2300 SUS) $\zeta=0.23$ となる。(b)は周波数応答例である。これから図5モデルに使用した因子の値を決め、 Δk_c の換算を行った。

4. 実験方法

円筒プランジ研削における Δk_c を求めるための実験は、10秒研削ごとの変化状態を調べることとした。前節で示したダンパ挿入による変動力を測定する時間が長過ぎると、砥石作業面の状態に変化をきたしてしまうので、また過渡的 (研削開始から定常切込みになるまでの立上り過程) な測定では正確さを欠くので、定常研削域に入っていると思われる5秒前後の変動力の測定を行うことにした*。実験順序を要約すると、(1) 10秒間研削、(2) ダンパ取付5秒間研削、(3) ダンパ除き10秒間研削、(4) ダンパ取付5秒間研削、……。この間、各研削ごとの終了間際の振動信号を記録する。このような断続研削と連続的に研削を行った場合との振幅変化の差を調べたが、研削初期にはほとんど差がないことがわかった。したがって、変動力測定のための研削は、砥石作業面への影響は与えないと考える、なお、びりり信号は、前報同様切台センタに取付けたひずみゲージよりとする。他の条件も前報に準ずる。

5. 実験結果および考察

前節で説明した実験順序にしたがって行った測定例を図7に示す。写真左側が研削時間10, 20, 30秒後のびりり信号で、右側はダンパを挿入し、それぞれの変動力を検定した信号である。図8(a)は、研削量 (研削時間) に対する変動研削力の値を、(b)はそれぞれについて安定限界曲線との関係を示した一例である。不安定研削になる限界は、自励振動に特有な振幅変調の発生する場合としたが¹³⁾、これによると①の状態にてすでにびりりが発生している。(b)図の安定限界から判断すると、不安定になる値 ϵ (または Δk_c) は理論安定限界値 Δk_{cth} および絶対安定限界値 Δk_{cab} よりも小さい値になる。この場合、変動研削剛性 Δk_c は、単純に変動研削力を設定

* 文献1) 図5(b)参照。

実験条件:

$n_w = 180 \text{ rpm}$ ($v_w = 23 \text{ m/min}$),

$s_p = 1.5 \mu\text{m/rev}$, $b = 30 \text{ mm}$

図8 安定限界図における変動値

切込み量で割った値を用いた。図9は式(7)より求めた f_n と理論安定限界値 Δk_{cth} を実験値とともに、 $(f_n/f_c)^2 - \Delta k_c/f_c^2$ 平面上にプロットしたものである。ただし研削剛性 k_g は実験より求めた値である。実験値は系の固有振動数 f_n とびびり周波数 f_c との比にほとんど関係なく、安定限界値の $\Delta k_c/f_c^2$ (ε に相当する値) はほぼ一定である。したがって実験より求めた安定限界値 Δk_c は、周波数比 f_n/f_c が1から離れるにつれて理論安定限界値 Δk_{cth} との誤差が大きくなる。これらを比較したのが図10である。実験値と理論および絶対安定限界値との比は、系の固有振動数 f_n の近傍で発生するびびりの場合40%前後である。いずれにしても実験より求めた安定限界値は、絶対安定限界値や理論安定限界値より小さい。本研究において、安定限界を決める因子としてパラメータ Δk_c について検討したが、実際は変動研削力がフィードバックし Δk_c は変化して行く値である。しかし解析上から、開いた系にて計算を行ったため、現実の系との間に誤差が出たのではないと思われる。また3節で述べたように動力計の換算上による誤差も存在する。

次に砥石作業面のある状態において発生する変動研削力は、式(5)と同様に研削条件によって左右されると考えられるから、安定限界の変動研削剛性 Δk_c と研削剛性 k_g との関連を考えてみたのが図11である。 k_g の増加とともに安定限界値の Δk_c も増加しているが、単位研削幅当たりの Δk_c^* はほぼ $0.2 \sim 0.4 \text{ kg}/\mu\text{m}\cdot\text{cm}$ の値になっている。これは図9の限界値 ε の値が、だいたい一定で

実験条件:

$n_w = 150 \sim 270 \text{ rpm}$ ($v_w = 19.8 \sim 34.7 \text{ m/min}$), $s_p = 1.0 \sim 2.0 \mu\text{m/rev}$, $b = 20, 30 \text{ mm}$

図9 安定限界の理論値と実験値の比較

図10 安定限界値における比

図11 安定限界値と研削剛性の関係図

あることからうなずける。したがって周波数に無関係な絶対安定限界値式(16)が重要になる。これは式(7)によって計算される系の固有振動数 f_n とびびり周波数 f_c とに相違があるが、 $\bar{k}_c$ が式(6)で検討されるように研削剛性に単純に比例するものでなく、砥石の作業面の状態や研削条件などによって変化すると考えられる。これらを考慮して、びびりはほとんど研削加工系の固有振動数近傍で発生すると考えると、前述した Δk_{cab} が安定限界の目安となるといえる。

6. びびり抑制の原理に関する考察

前節で検討したごとく、びびりの発生限界を正確に求めるのは困難である。しかし、このパラメトリック振動系にモデル化した研削初期のびびりに関し、その防止について次に示すような原理によって行うことができる。小野⁶⁾ が示している研削剛性 k_g の式からすれば、研削

(a) 出力信号

(b) 安定限界図上の推移

図 12 びり防止法の一例

条件を変化させることにより k_g の変化が起きる。したがって安定限界曲線も変わる。前節の考察のように系の固有振動数近傍でびりが発生するものとする、図 12 (b) に示すように、最初の研削条件における安定限界線(実線)が、条件変化にともない破線の安定限界線になり、研削過程で ① の不安定な研削状態が、条件変化によって安定領域に入ることが考えられる。図 12 (a) は研削幅 b を 30 mm からいったん研削作業を中止して、20 mm 幅にて研削した場合の例である。図 (a), (b) の番号を対応させると、明らかにびり抑制効果があることがわかる。このようにパラメトリック振動系において、研削条件 (v_s, v_w など) を変えて、びりの防止ができる原理を示唆できる。詳しくは続報で報告する。

7. 結 論

円筒研削のびり振動について、研削初期に発生する自励びりの振動モデルがパラメトリック振動系になりえること、その数値計算および実験結果との比較から、次のことがわかった。

- (1) 減衰項のある Mathieu 型微分方程式が成立、砥石作業面の周期的状態変化を変動研削剛性 Δk_c とし、そのパラメータから安定・不安定研削の判別ができる。従来の再生効果理論による安定判別では説明できなかった、研削過程における安定研削領域から不安定研削領域へ移行する現象を説明できた。
- (2) 実験による安定限界値は、理論計算による安定限

界値の 40% 前後になった。これはパラメータ Δk_c が研削力によってフィードバックされない系にて計算された誤差および測定における誤差のためと思われる。

(3) 安定限界線図を利用、びり発生時に研削条件を変えることにより、びり振動抑制の原理が説明できる。

本研究を行うにあたり、東京都立大学工学

部・塩崎進教授、ならびに宮下政和教授にご指導いただきましたことを感謝いたします。

文 献

- 1) 鴻巣健治: 研削初期のびり振動の発生原因と振動モデル, 精密機械, **39**, 12 (1973) 1262.
- 2) 樫木義一: 非線型振動論, 共立出版 (1968) 73.
- 3) R. Snoeys & P. Vanherck: Forced and Selfexcited Vibrations in Plunge Grinding, Int. Conf. on Mfg. Tech. Proc. ASTM (1967) 317.
- 4) P. D. Singhal & H. Kalisz: The Effect of Workpiece Dimensions and Wheel Parameters on the Surface Roughness during Grinding, Proc. 6th MTDR Conf. (1965) 629.
- 5) 牧野秀一, 鈴木喜雄: 研削びりの実験的追究, 精密機械, **39**, 1 (1973) 113.
- 6) 小野浩二: 研削仕上, 榎書店 (1962) 22.
- 7) 米津 栄, 稲崎一郎, 清水 哲: 砥石不平衡が仕上面形状精度におよぼす影響, 日本機械学会講演論文集, **730**, 4 (1973) 209.
- 8) 國井修二郎, 樫木義一, 高橋節夫: 減衰を伴う擬調和振動における不安定限界線図の決定, 日本機械学会論文集, **17**, 64 (1951) 9.
- 9) 稲崎一郎, 米津 栄: いし作業面の不均一性に基づく振動, 日本機械学会論文集, **33**, 249 (1967) 821.
- 10) 塩崎 進, 宮下政和: 研削動力計の試作, 精密機械, **35**, 7 (1969) 471.
- 11) 塩崎 進, 宮下政和, 鴻巣健治: センタ動力計の検討, 昭和 45 年度 精機学会春季大会学術講演会前刷 (1970) 309.
- 12) J. P. Den Hartog (谷口 修, 藤井澄二共訳): 機械振動論, コロナ社 (1960) 102.
- 13) 鴻巣健治, 宮下政和, 塩崎 進: 円筒研削における不安定振動, 日本機械学会講演論文集, 199 (1968-9) 109.