研究

あらさを有する平面と球の接触に関する研究 (第1報)*

—方向性をもつ均一形状突起モデルによる理論的考察—

石 垣 博 行** 木 原 利 喜*** 川 口 格**

A Study on the Contact between Spheres and Rough Planes (1st Report)

—Theoretical Consideration with Directional Uniform Asperity Model—

Hiroyuki ISHIGAKI, Toshiaki KIHARA, Itaru KAWAGUCHI

Theory of contact between a sphere and a rough plane involves a difficulty that the deformation of the subsurface material should be compatible to the deformation of the surface asperity. An approximate method in which the subsurface displacement is expressed in a quadratic equation having two unknown constants is considered to solve the above problem. These two constants are so determined by iterative method as the subsurface displacement is compatible to the surface asperity displacement. In order to clarify the theoretical basis of this method and to discuss the approximating error, this method is applied to the contacts between a sphere and such a simple model surface that uniform hemicylindrical protuberances are arranged unidirectionally. The deformation of material is assumed to be elastic for the subsurface material and to be either elastic or plastic for the surface asperity. The numerical results show that the directional arrangement of surface asperity gives the directional effect upon the deformation of subsurface material, and that the pressure at the peak of asperity is extremely high, and so on. Some experimental results are shown to verify the validity of the analysis.

1. 緒 言

球と平面の接触問題はころがり接触機構の強度問題、特にころがり摩耗を考える上で重要であるが、この問題には表面の微小突起の変形と母材の変形を適合させねばならぬという困難さがあるためか、発表されている研究^{1)~5)}も数少なく、特に方向性のあるあらさの場合については皆無であると言ってよい。ところが、実際の加工面について考えると、研削仕上面、旋削仕上面などのように方向性のある加工面の方が方向性のない面より一般的であろうと思われる。本研究は母材の変形を二次曲面で表現されるものと仮定して計算を進め、上記の微小突起の変形と母材の変形を適合させて比較的簡単な近似解法でこのような方向性のあらさを持つ平面に球を押付けたときの接触の挙動を明らかにしようとするものである。本報ではその第一段階として、高さ、半径などが均一な半円柱状の突起を真平面に敷きならべたような面に真球を押付けた場合の接触問題について上記の解法を適用して、近似量、圧力分布などを求めて、本解法の理論的根拠、精度などについて検討した。また実験結果と比

較して本理論の妥当性を確かめた。なお変形のモードとしては球および平面の母材については弾性変形のみを仮定し、突起の変形については弾性変形する場合と塑性変形する場合について考えた。

2. 理 論

ころがり接触が繰返し行われ、突起の先端が完全に塑性変形した後の接触では突起が弾性変形をするが、処女面での接触では塑性変形が支配的だと思われる。そこで本理論では突起が弾性変形する場合と、塑性変形する場合の両方について解析を行った。なお本解析にあたって用いられた記号の意味を表1に示す。

2.1 突起が弾性変形する場合

方向性を有する表面おうとつの模型として、図1に示すような半径、高さ、突起間隔が均一なおうとつの配列を考える。このような平面に真球を押付けた場合、球および平面の垂直変位は個々の突起に対してそれを独立に考え得る表層部の変位(以下でこれを突起の変位と仮称) w_p と、それより深層部の突起底部の垂直変位 w_m (以下でこれを母材の変位と仮称) の和と考えられる。そしてここでは突起が弾性変形すると考えられる場合を扱い、突起の変位の計算にはヘルツ理論を適用する。

いま、球面と平面をそれぞれ式(1)、式(2)で表すと接触条件は式(3)のように表される。

* 原稿受付 昭和49年5月24日。昭和47年度精機学会秋季大会学術講演会(昭和47年10月31日)にて発表。

** 正 会 員 大阪府立大学工学部(堺市百舌鳥梅町4丁804)

*** 近畿大学理工学部(東大阪市小若江321)

表 1 記 号

R	球の半径
β	突起の曲率半径
l	突起の間隔
φ	球の中心線からの中央接触突起のずれ
W	荷重
w	変位 ($=w_p + w_m$)
w_p	突起の変位
w_m	母材の変位
α	近接量 ($=w(0, 0)$)
α_p	突起の変形による近接量
α_m	母材の変形による近接量
α_n	n 番目の接触突起の近接量
n	各接触突起の番号 (整数)
γ_x, γ_y	$\gamma_x R, \gamma_y R$ で仮想二次曲面の x 方向, y 方向の曲率半径を表示
P_n	n 番目の突起に作用する荷重
p_n	n 番目の突起上の分布圧力
p_m	材料の流れ圧力
p_H	ヘルツ圧力
p_{max}	最大圧力
S	真実接触面積
$F'(k)$	第 1 種完全だ円積分
$E'(k)$	第 2 種完全だ円積分
E_1, E_2	ヤング率
E	$\frac{1}{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)$
λ, μ	Lamé の定数
g_1, g_2	$(\lambda + 2\mu) / 4\pi\mu(\lambda + \mu)$
σ	ポアソン比
k	$\left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right)^{1/2}$
δ	二次曲面近似による誤差
K_p	突起の塑性変形による近接量/全体の近接量
W^*	$(1 - \sigma^2)W / E R^2$
β^*	β / R
l^*	l / R
p_m^*	$(1 - \sigma^2)p_m / E$
ξ, η	個々の接触だ円の中心を原点とし短径, 長径方向に取った座標軸

図 1 突起モデルと仮想二次曲面

$$w_m \doteq \alpha_m - (C_1 x^2 + d_1 y^2) \quad (5)$$

とする。これを式 (3) に代入すると次式が得られる。

$$w_p = \alpha_p - \frac{\{(x + \varphi) - nl\}^2}{2\beta} - \frac{1}{2R} \left(\frac{x^2}{\gamma_x} + \frac{y^2}{\gamma_y} \right) \quad (6)$$

ただし

$$\frac{1}{\gamma_x} = 1 - 2RC_1, \quad \frac{1}{\gamma_y} = 1 - 2Rd_1, \quad \alpha_p = \alpha - \alpha_m$$

すなわち、何らかの方法で γ_x, γ_y を求めることができれば、母材の変位を考慮して突起の変位を求める問題は図 1 のように、母材の変形を無視して $\gamma_x R, \gamma_y R$ なる主曲率半径を有する二次曲面体を押付けた場合の突起の変位を求める問題に帰着する。式 (6) をさらに変形すると

$$w_p = \alpha_p - \frac{(nl - \varphi)^2}{2(\gamma_x R + \beta)} - Ax'^2 - By^2 \quad (7)$$

ただし

$$A = \frac{1}{2R\gamma_x} + \frac{1}{2\beta}, \quad B = \frac{1}{2R\gamma_y}, \quad x' = x - \frac{nl - \varphi}{R\gamma_x + \beta} R\gamma_x$$

したがって、各接触突起と仮想二次曲面の接触域形状は次式の $\cos \tau$ より定まるだ円形となる。

$$\cos \tau = \frac{B - A}{B + A} = \frac{(\gamma_x - \gamma_y)\beta - \gamma_x \gamma_y R}{(\gamma_x + \gamma_y)\beta + \gamma_x \gamma_y R} \quad (8)$$

個々の接触だ円における近接量 α_n と分担荷重 P_n の間には次の関係が成立する。

$$P_n = \Phi \alpha_n^{3/2} \quad (9)$$

ここで

$$\Phi = \frac{2^{3/2}}{3(g_1 + g_2)} \left\{ \frac{\gamma_x \gamma_y R \beta}{(\gamma_y + \gamma_x) + \gamma_x \gamma_y R} \right\}^{1/2} \times \left\{ \frac{E'(k)}{(1 - k^2) F^2(k)} \right\}^{1/2} \quad (9)'$$

なお、 k は式 (8) と次式を用いて逐次計算より求める。

$$\cos \tau = \frac{2(1 - k^2) F'(k) - (2 - k^2) E'(k)}{k^2 E'(k)} \quad (10)$$

で与えられるべきものであるが、本研究では可能な限り計算を簡単化するために第一近似として

ところで、分担荷重 P_n の総和は球に作用する荷重 W に等しいため次式が成立する。

$$W = \phi \sum_n \alpha_n^{3/2} = \phi \sum_n \left\{ \alpha_p - \frac{(nl - \varphi)^2}{2(\gamma_x R + \beta)} \right\}^{3/2} \quad (11)$$

式(11)を満足させるような α_p を逐次計算で求め、その値を式(9)に代入すれば分担荷重 P_n が得られる。次に n 番目の接触点円上での表面圧力分布 $p_n(x, y)$ は次式で与えられる。

$$p_n(x, y) = \frac{3P_n}{2\pi a_n b_n} \left[1 - \frac{1}{a_n^2} \left\{ x - \frac{nl - \varphi}{\beta + \gamma_x R} \gamma_x R \right\}^2 - \frac{y^2}{b_n^2} \right]^{1/2} \quad (12)$$

したがって、球および平面の垂直変位の和は弾性論⁸⁾により次式で求まる。

$$w(x, y) = \frac{\lambda + 2\mu}{2\pi\mu(\lambda + \mu)} \sum_n \iint \frac{p_n(\xi, \eta)}{\{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2\}^{1/2}} d\xi d\eta \quad (13)$$

ただし、球と平面の弾性定数は等しいものとする。

ところで、接触域内では $w_m(x, y)$ は式(3)の接触条件を満足しなければならない。式(3)を書きかえ

$$\frac{x^2 + y^2}{2R} + \frac{(x + \varphi - nl)^2}{2\beta} = w(0, 0) - w(x, y) \quad (14)$$

上式に式(13)を代入すると、上式の右辺は γ_x, γ_y の関数であることがわかる。結局、最初に仮定した γ_x, γ_y を全接触域で式(14)が満足されるように逐次計算で求めればよい。その γ_x, γ_y を式(13)に代入すれば近接量 $\alpha (=w(0, 0))$ が定まる。

2.2 突起が塑性変形する場合

突起が弾性変形する場合と同様の解析手順をふむ。すなわち、母材の変位を式(4)で示したような二次曲面で表しうものと仮定し、図1のような仮想二次曲面が荷重 W のため α_p だけくい込んだ状態を考える。個々の接触点円の短径 a_n および長径 b_n は次式で与えられる。

$$a_n = \left[\frac{2\gamma_x \beta R}{\beta + \gamma_x R} \left\{ \alpha_p - \frac{(nl - \varphi)^2}{2(\gamma_x R + \beta)} \right\} \right]^{1/2} \quad (15)$$

$$b_n = \left[2\gamma_y R \left\{ \alpha_p - \frac{(nl - \varphi)^2}{2(\gamma_x R + \beta)} \right\} \right]^{1/2} \quad (16)$$

この場合、接触面の圧力は一定でやわらかい方の材料の流れ圧力 p_m に等しいと考えられるので、 n 番目の突起が受持つ荷重は式(9)の代わりに次式で与えられる。

$$P_n = 2\pi R p_m \left\{ \alpha_p - \frac{(nl - \varphi)^2}{2(\gamma_x R + \beta)} \right\} \left\{ \frac{\gamma_x \gamma_y \beta}{\gamma_x R + \beta} \right\}^{1/2} \quad (17)$$

分担荷重の総和は荷重 W に等しいはずであるから次式が成立せねばならない。

$$W = \sum_n P_n \quad (18)$$

式(18)に式(17)を代入し、式(18)が成立するように α_p を逐次計算で求めると突起の塑性変形のみによる近接量が

表2 二次曲面近似による誤差

n	0	1	2	3	4
w (μm)	7.633	7.335	6.513	5.218	3.633
δ (μm)	0	0.048	0.125	0.165	0.0004
$\delta/w \times 100$	0	0.655	1.918	3.170	0.010

$$\beta^* = 0.013, l^* = 0.01, w^* = 3.47 \times 10^{-5}$$

求まり接触域が定まる。また母材の弾性変形量は式(13)に一定の面圧 p_m を代入して式(15), (16)で定まる領域について積分すれば求まる。接触条件は式(3)を変形することにより次式で表される。

$$\frac{1}{2R} \left(x^2 + y^2 - \frac{x^2}{\gamma_x} - \frac{y^2}{\gamma_y} \right) = w_m(0, 0) - w_m(x, y) \quad (19)$$

すなわち、全接触領域で上式を満足するように γ_x, γ_y を逐次計算で決定すると近接量 α は次式で定まる。

$$\alpha = \alpha_p + w_m(0, 0) \quad (20)$$

ところで、式(3)の接触条件式の右辺は $x = nl - \varphi$ の線だけを考えると原点に関して対称な関数となり、みかけの接触域は円形にならねばならぬことがわかる。したがって突起が塑性変形する場合には w_p が仮想二次曲面の対称性に支配されるため $\gamma_x = \gamma_y$ になることが明らかである。

以上の解析(2.1, 2.2項を通して)では個々の突起の接触域形状を独立に扱い、突起の合流は考慮してないため W や $1/l$ が非常に大きくて隣接突起の接触域の合流が生じるような場合には本理論は適用できない。

なお、以上の理論式はすべて β, l, W および p_m に関してそれぞれ $\beta/R, l/R, (1 - \sigma^2)W/ER^2$ および $(1 - \sigma^2)p_m/E$ なる無次元量のみ関数として書き表しうることが確認されたので、計算結果はこれら無次元量を用いて示す。

2.3 数値計算

式(10)の k 、式(11), (18)の α_p および γ_x, γ_y を求める逐次計算はNewton-Raphson法を用いた。また、式(13)の被積分関数は特異点を有するため極座標表示にしてGauss数値積分を行った。式(14)および式(19)の接触条件は接触域全域で成立しなければならないが、最初に母材の弾性変形を式(5)で示されるような二次曲面で近似しているため接触条件を全接触域で満足させることは不可能である。そのため、数値計算では x, y 軸上の接触域両端と中心点で接触条件を $w(0, 0) \times 10^{-3}$ の誤差以下で満足するように γ_x, γ_y を定めた。この近似による誤差は式(14)より

$$\delta(x, y) = w(0, 0) - w(x, y) - \frac{x^2 + y^2}{2R} - \frac{(x + \varphi - nl)^2}{2\beta} \quad (21)$$

で示される。表2は母材も微小突起も弾性変形する場合

図2 接触域の形状

図3 突起半径, 間隔と γ_x, γ_y の関係

の計算結果の一例であり, 接触域内の各接触点の中心
 $y=0, x=nl$ ($n=0, 1, 2, \dots, N$)

における $w(nl, 0)$, $\delta(nl, 0)$ および δ/w を示したものである. この例では誤差は最大 3.2% にすぎない. また, この誤差は他の接触条件においても 4% 以下に保たれることが確認 ($W^*=10^{-6} \sim 10^{-4}$, $l^*, \beta^*=0.005 \sim 0.05$ の範囲について確認) できた. 突起の球に対する相対的位置を示す φ については $\varphi=0$ の場合と $\varphi=l/2$ の場合とで近接量の値を比較すると, 接触点の数が 3 個以上の場合はその差は 2% 以下にすぎないことが確認されたので数値計算はすべて $\varphi=0$ で行った.

3. 理論計算結果

3.1 突起が弾性変形する場合

3.1.1 接触域形状

接触域形状を図2に示す. あらさの方向性に無関係に

図4 個々の接触突起の圧力分布

みかけの接触域は円形をしているが, いま母材の弾性変形を考慮せずに $\gamma_x = \gamma_y = 1$ とし, 個々の突起にヘルツ理論を適用し荷重条件のみを満足させた場合, みかけの接触域は x 方向 (あらさの方向と直角をなす方向) の半径の方が y 方向の半径より大なるだ円形になる (図2の点線). 母材の弾性変形量の半径方向の変化が x 方向に比べ y 方向にゆるやかであるため, 母材の弾性変形まで考慮に入れると y 方向の接触域が広がり, 接触域が円形になると考えられる. すなわち, 母材の弾性変形はあらさの方向性の影響を強く受け, 仮想二次曲面の曲率半径はあらさの方向に平行な方向 $\gamma_y R$ の方が $\gamma_x R$ より大になる. このことは, また図3より明らかであり β, l を変化させても常に $\gamma_x R < \gamma_y R$ である.

3.1.2 圧力分布

みかけの接触面積はあらさが大なるほど増加し, みかけの平均圧力はヘルツ理論 (以下, なめらかな平面と球の接触の場合のヘルツ理論を意味する) による圧力より低下する. しかし, 個々の突起に作用する圧力は図4に示すように局部的に高い値を示す. この分布圧力の最大値 $p_{\max}$ とヘルツ圧力 p_H との比 ($p_{\max}/p_H$) は突起の半径が小なるほど, また突起の間隔が大なるほど増加し, 図5に示すような範囲では次式に示す関係で表される.

$$\frac{p_{\max}}{p_H} \approx 0.70 \left\{ \frac{W(1-\sigma^2)}{ER^2} \right\}^{-0.12} \left(\frac{l}{R} \right)^{0.40} \left(\frac{\beta}{R} \right)^{-0.48} \quad (22)$$

3.1.3 真実接触面積

真実接触面積 S はヘルツ理論による接触面積よりかなり小さく, また図6に示すように突起半径が小なるほど, 突起間隔が大なるほど面積は小さくなり, 次式で近似しうる.

$$\frac{S}{R^2} \approx 6.73 \left\{ \frac{W(1-\sigma^2)}{ER^2} \right\}^{0.79} \left(\frac{l}{R} \right)^{-0.39} \left(\frac{\beta}{R} \right)^{0.46} \quad (23)$$

- (a) $l^* = 0.787 \times 10^{-2}$, $W^* = 0.672 \times 10^{-6}$
 (b) $l^* = 0.787 \times 10^{-2}$, $W^* = 3.358 \times 10^{-6}$
 (c) $\beta^* = 0.787 \times 10^{-2}$, $W^* = 0.672 \times 10^{-6}$
 (d) $\beta^* = 1.575 \times 10^{-2}$, $W^* = 0.672 \times 10^{-6}$

図5 突起半径、間隔と最大圧力の関係

図6 突起半径、間隔と真実接触面積の関係

3.1.4 近接量

突起および母材の変形による球の中心の垂直方向変位量を近接量と定義すると、突起半径および突起の間隔と近接量の関係は図7に示すようになる。すなわち、半径が小なるほど、また間隔が大なるほど近接量は増加する。

以上の理論計算は接触突起が弾性変形する場合に成立するが、荷重の増加や突起半径の減少により突起の内部の最大せん断応力が増大し、この応力が $0.5 Y$ (Y : 降伏応力) 以上になると突起内部で塑性変形が生じる。中央の接触突起における最大せん断応力を求めた結果、図8に示すように負荷よりも突起半径の方が最大せん断応力に及ぼす影響が大であり、 β/R が 0.5×10^{-2} 以下では軽微な負荷でも突起が塑性変形すると考えられる。

3.2 突起が塑性変形する場合

母材は弾性変形するがすべての接触突起は塑性変形するという仮定のもとでの計算結果を以下に示す。

この場合、みかけの接触域形状は円形であり母材も方

- (a) $\beta^* = 0.787 \times 10^{-2}$, $W^* = 3.36 \times 10^{-6}$
 (b) $l^* = 0.787 \times 10^{-2}$, $W^* = 3.36 \times 10^{-6}$
 (c) $\beta^* = 0.787 \times 10^{-2}$, $W^* = 2.02 \times 10^{-6}$
 (d) $l^* = 0.787 \times 10^{-2}$, $W^* = 2.02 \times 10^{-6}$

図7 突起間隔、半径と近接量の関係

図8 突起半径と突起内部の最大せん断応力の関係

向性の影響を受けないこと ($\gamma_x = \gamma_y$) は 2.2 項で述べたように理論式から明らかである。荷重と近接量の関係は図9に示すようになり、この理論で算出した近接量は当然ヘルツ理論による近接量より大になる。またこの図の点線は母材の変形による近接量でヘルツ理論より低い値を示してはいるが、この母材の変形を無視して接触問題を扱うと大きな誤差を生じることは明らかである。

全近接量中に占める突起の塑性変形による近接量の割合は突起半径が小なるほど、また突起間隔が大なるほど増大することが図10より明らかである。

ところで、以上の計算結果の中には一見すると表面が真平面に近づいた場合にもヘルツ理論に漸近しないかの

$$\beta^* = 0.276 \times 10^{-2}, \quad l^* = 0.787 \times 10^{-2}, \quad p_m^* = 0.0104$$

図9 荷重と近接量の関係

図10 突起半径, 間隔と K_p の関係

図11 荷重と真実接触面積の関係

ような傾向の図もあるが, これは2.2項でも言及したように本理論では真平面に近づいた場合に生じる突起の合

図12 試料の表面あらさ曲線

$$R = 25.4 \text{ mm}, \quad P_m = 240 \text{ kg/mm}^2, \quad \beta = 0.07 \text{ mm}, \quad l = 0.2 \text{ mm}$$

図13 荷重と近接量の関係

$$R = 25.4 \text{ mm}, \quad P_m = 240 \text{ kg/mm}^2, \quad \beta = 0.07 \text{ mm}, \quad l = 0.3 \text{ mm}$$

図14 荷重と近接量の関係

流を考慮していないためと考えられる。

4. 実験方法および結果

4.1 突起が弾性変形する場合

平面試験片としては常温硬化型シリコンゴムを用い, 形削り仕上げした軟鋼面をこのゴムに転写することにより

方向性のある均一形状の表面あらさ試料を作成した。この平面に印肉を薄く塗布した球を押付けた後、ゴムの着色部分の面積を顕微鏡にて測定した。

真実接触面積の実測値と理論値は図11に示すようにかなりよく一致している。なお、理論値を計算する際、ゴムの弾性定数はあらさの無視できる ($R_{\max} 0.1 \mu\text{m}$) ゴムの平面に球を押付けた時の接触半径の実測値をヘルツ理論に適用することにより推定した。

4.2 突起が塑性変形する場合

形削り仕上により均一形状のあらさ (図12参照) を持たせた軟鋼 (マイクロビッカースかたさ $H_V=240$) に半径1inの鋼球を押付け近接量を電気マイクロメータで測定した。なお鋼球の表面あらさは $R_{\max}=0.1 \mu\text{m}$ で平面試料に比べ無視できる。図13, 14に荷重と近接量の関係を示す。点線は実測値の平均 (10回測定) で実測値のばらつきを示す。なお実線は理論値を示し、この場合突起が塑性変形していることは押付け後の表面観察により確認された。図13の $l=0.2$ の場合、実測値が理論値より少し低くでているが、これは断面形が $Z=x^2/2\beta$ で与えられる突起を作製することが難しく、 β の設定誤差が大きく原因しているのではないと思われる。いずれにしろ、理論値と実験値とはかなりよく一致している。

5. 結 言

あらさを有する平面と球の接触問題を解析する一近似解法を考え、それを均一な形状で高さが一定の方向性を有する突起模型に適用し数値計算を行った。同時に実験

も行い以下の結論を得た。

- (1) 母材の変形を二次曲面で近似しても十分な精度が得られる。
- (2) 突起が弾性変形する場合、母材の弾性変形はあらさの方向性の影響をうけて顕著な方向性を示す。
- (3) 近接量、圧力分布、真実接触面積等を理論的に推定できる。
- (4) 実測値と理論値とはかなりよく一致し、この理論の妥当性が実験的にも確かめられた。

終わりに、実験遂行にご協力いただいた本学学生・久我耕三氏に感謝します。

なお数値計算は京都大学大型計算機センター FACOM 230-60 を使用しました。

参 考 文 献

- 1) J.F. Archard: Elastic Deformation and the Laws of Friction, Proc. Roy. Soc. Lond., A 243 (1957) 190.
- 2) J. A. Greenwood & J. H. Tripp: The Elastic Contact of Rough Spheres, Trans. ASME, Ser. E, 34 (1967) 153.
- 3) F. C. Yip & J. E. S. Venart: An Elastic Analysis of the Deformation of Rough Spheres, Rough Cylinders and Rough Annuli in Contact, J. Phys. D 4 (1971) 1470.
- 4) 築添 正: 寸法測定精度に及ぼす表面あらさの影響について (第2報), 精密機械, 37, 5 (1971) 344.
- 5) 久門輝正: 固体仕上面間の接触機構 (第6報), 日本機械学会論文集, 38, 315 (1972) 2945.
- 6) A. E. H. Love: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Dover (1944).