動剛性合成法による機械構造物の 静特性および動特性の CAD*

——工作機械の動特性解析法の研究 (第3報)——

吉 村 允 孝**

Computer Aided Design of Machine Structures with respect to Static and Dynamic Characteristics by Synthesis of Dynamic Rigidity Program System

——Study for Analysis of Structural Dynamics of Machine Tools (3rd Report)——

Masataka YOSHIMURA

A new program system was developed for computing the static and dynamic characteristics of machine structures and helping the designer to get the optimum machine with respect to those characteristics. The program system is a new method which combines the advantages of the synthetic technique of the receptance program system with the finite element modeling of the machine sub-structures. The function of the program system is to compute static rigidities, frequency responses, natural frequencies, mode shapes, energy distributions and modal flexibilities. In order to attain dynamically optimum design of machine tools which would have minimum chance of machining chatter, the analysis based on energy balances of a mechanical system at the resonance is endeavored by the use of this program system. This optimization process aims that the maximum compliance of the tool-work relative displacement in the direction normal to cut surface caused by the cutting force at the cutting point must be minimum across all frequency ranges. The optimization principle is based on the computation of modal flexibilities and energy distributions. The analytical principle of the program system is described and demonstrated by computed and experimental results on a practical structure.

1. 緒 言

機械構造物の振動特性を解析し、より振動を生じにくい機械を設計するためには、設計の段階で、振動特性を電子計算機プログラムによりシミュレーションすることが有効である。この目的に対して、種々の電子計算機プログラムが開発されている^{1)~3)}。筆者らはさきに、機械構造物の静剛性と振動特性を解析するために、リセプタンス合成法に基づく電子計算機プログラムを開発し⁴⁾、実際の工作機械や模型について計算を行い、実用的にも十分役立つことを示している⁵⁾。また、振動特性を改善し最適化するためのエネルギーバランスによる最適化の手法を開発し⁶⁾、実際の機械構造に適用している⁷⁾。

機械構造物の振動特性を解析するには、機械構造全体を一つの振動システムと考え、振動システム全体のバランスに着目しなければならない。電子計算機プログラムでシミュレーションを行う場合においては、振動システムを構成する、すべての要素をできるだけ忠実精確にシ

ミュレーションを行うことが必要である。この要求をより良く満たすために、今回開発した電子計算機プログラムは、リセプタンス合成法の手法による合成の技術と、複雑形状をもつ要素の特性をより正確にシミュレーションし得る有限要素法の技術を結合したもので、周波数応答、共振振動数、モード形、静剛性、エネルギー分布、モーダルフレキシビリティを求めることができる。さらに、これらの計算機能を組合わせて用いることにより、設計者に本来の目的である構造設計の最適化を行うための有力な手段を与えるものである。本論文において、この手法の原理と特徴、および計算例について述べる。

2. 振動特性の解析の原理

動剛性合成法による機械構造物の振動特性解析の手法の概略は、図1のフローチャートに示すことができる。まず、振動解析を行う機械構造物に対して、どの範囲までを振動システムとして考えるかを決定する。例えば、地盤、基礎等も考慮する必要があるときは、この部分を振動システム内に入れなければならない⁸⁾。この振動システムを、いくつかの部分構造に分割する。そして、各部分構造を平板、はり、ばね、質量のいずれかの要素に

* 原稿受付 昭和49年12月2日。昭和49年度精機学会秋季大会学術講演会(昭和49年10月21日)にて発表。

** 正 会 員 京都大学工学部(京都市左京区吉田本町)

図1 動剛性合成法による機械構造物の振動特性解析ならびに最適設計のフローチャート

モデル化する。そして、その部分構造が固定端をもたない限り、フリーフリーの状態にあるものとして以下の解析を行う。まず、その各部分構造について、式(1)の動剛性マトリクス $[K_s]$ を組み立てる。

$$\{F\} = [K] - \omega^2[M]\{X\} = [K_s]\{X\} \quad (1)$$

ここで、 $\{F\}$ および $\{X\}$ は、全節点での力および変位のマトリクスであり、 $[K]$ および $[M]$ は、有限要素法で用いられると同じ剛性および質量マトリクス⁹⁾を表している。また、 ω は角振動数である。ただし、いままる要素が分布質量をもつより要素に近似できる場合には、 $[K_s]$ をリセプタンス合成法で用いられると全く同じ解析式より求めている。部分構造に関するこの連立方程式を変位マトリクス $\{X\}$ について解いて、その解の中からその部分構造に外力が加わると想定される節点（例えば切削点）および他の部分構造との結合端の節点の力 $\{F_j\}$ と、その部分構造内の全節点の変位 $\{X_N\}$ との間の関係を示す部分だけを抜き出し、次の式(2)とする。

$$\{X_N\} = [R_s]\{F_j\} \quad (2)$$

ここに、 $[R_s]$ はリセプタンスマトリクスであり、振動数の関数である。この式(2)を変形して、この部分構造の外力が加わると想定される節点および他の部分構造との結合節点の力 $\{F_j\}$ と、その節点の変位 $\{X_j\}$ との間の式(3)の関係を求める。

$$\{F_j\} = [K_D]\{X_j\} \quad (3)$$

図2 柔結合の場合の合成の説明図

この動剛性マトリクス $[K_D]$ を、各部分構造について求めておき、次の段階においてすべての部分構造を合成し、機械構造全体の振動特性を解析する。その合成において合成を行う部分構造間で、これらの動剛性マトリクスを、下記の式(4)のマトリクス $[K_T]$ 上の対応する節点上に重ね加え合わせる。

$$\{F_T\} = [K_T]\{X_T\} \quad (4)$$

ここで、隣り合った部分構造間の合成に関しては、さき開発されたリセプタンス合成法におけると同様に、剛結合と柔結合の2種類の結合状態を考える。剛結合においては、上記の方法によって得られる式(4)の連立方程式をそのまま解けばよい。一方、柔結合においては、以下に述べる原理に従って計算を行う。

図2は、部分構造PとQがJ個の結合節点で、ばねとダンパによって結合されていることを示している。部分構造Pの結合端での一つの座標 x_P と、同方向の部分構造Qの結合端の座標 x_Q を想定し、ある一つの結合節点のある一つの座標方向に、ばね定数 k と粘性減衰係数 b を考える。このとき、 x_P および x_Q における力の大きさを F_P および F_Q と表すと、力 F_P および F_Q とその座標方向変位 $x_P = X_P e^{i\omega t}$ および $x_Q = X_Q e^{i\omega t}$ の間の関係が、次の式(5)のように求めることができる。

$$\begin{Bmatrix} F_P \\ F_Q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (k + i b \omega) & -(k + i b \omega) \\ -(k + i b \omega) & (k + i b \omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_P \\ X_Q \end{Bmatrix} = [K_J] \begin{Bmatrix} X_P \\ X_Q \end{Bmatrix} \quad (5)$$

このようにして、J個の結合節点間の各座標方向について求められた動剛性マトリクス $[K_J]$ を、式(4)に得られている動剛性マトリクス $[K_T]$ の相当する節点でのマトリクス上に、さらに重ね加え合わせる。

このようにして得られた式(4)の連立方程式を $\{X_T\}$ について解けば、この合成されたシステムを一つの部分構造とみなしたときの式(2)と同様の式を得る。この式(2)から式(4)の間の計算過程を必要な合成回数だけ繰返すと、最終的に下記の式(6)のような、外力が加わると想定される点の力 $\{F_E\}$ とその点の変位 $\{X_E\}$ の間のリセプタンス $[R_E]$ が得られる。

$$\{X_E\} = [R_E]\{F_E\} \quad (6)$$

このリセプタンス $[R_E]$ を問題とする振動数範囲内の多くの振動数に対して求めれば、機械構造物全体の周波数

図3 共振曲線の例

応答が得られる。そして、十分に低い振動数に対するリセプタンスを計算することにより、近似的に静特性を求めることができる。

こうして得られた周波数応答より、効率よく共振振動数を計算するためには、その共振振動数付近での応答を1自由度系の振動モデルのそれに近似し、以下に述べるようにして共振振動数を精度よく推定することができる。いま、図3に示すような共振曲線において、真の共振振動数が ω_m であるとする。一方その前後の、リセプタンス値が計算されている振動数を ω_1, ω_2 とし、そのときのリセプタンス値を R_1, R_2 とすれば、共振振動数 ω_m は、近似的に次の式(7)によって求められる。

$$\omega_m = \sqrt{\frac{a\omega_2^2 + \omega_1^2}{a+1}} \quad (7)$$

ここで、 $a = |R_2/R_1|$ である。この方法を用いて共振振動数を求めることにより、比較的少ない数の振動数に対するリセプタンスを計算することによって、共振振動数を効率よく求めることができる。

次に、この共振振動数に対するモード形を求める。このために各共振振動数において、周波数応答を求めたときの式(2)から式(4)の解析の過程の逆の過程の計算を行い、各部分構造における式(2)の $\{X_N\}$ を求める。これを構造全体にわたってプロットすれば、モード形が得られる。つまり、合成後の式(2)に相当する式から結合端の変位 $\{X_J\}$ を求め、これを式(3)に相当する式に代入し、結合端の力 $\{F_J\}$ を求め、この $\{F_J\}$ を合成前の式(2)に相当する式に代入することによって $\{X_N\}$ が得られる。

次に、この $\{X_N\}$ より、最適化設計のために必要な、機械構造全体にわたるエネルギー分布を求める。各部分構造の最大復元エネルギー V_{sm} および最大慣性エネルギー T_{sm} は、次の式(8)および式(9)より計算する。

$$V_{sm} = \frac{1}{2} \{X_N\}^T [K] \{X_N\} \quad (8)$$

$$T_{sm} = \frac{1}{2} \omega_m^2 \{X_N\}^T [M] \{X_N\} \quad (9)$$

これら最大エネルギー値をすべての部分構造について総計することにより、構造物全体が持つ最大復元エネルギー V_{Am} および最大慣性エネルギー T_{Am} を求めることができる。いま、構造内で問題としている点の変位(工作機械においては、切削点での工具Aと品物Bの間の相対変位)を X_m とすれば、上記に求めたエネルギーの分布状態において、モードフレキシビリティは、

$$f_m = \frac{X_m^2}{2V_{Am}} \quad (10)$$

として定義され、またこの式に従ってその値を計算することができる。

以上述べた解析原理に従った電子計算機プログラムを開発し、これを用いることによって、機械構造全体の振動特性を計算するのが本研究の第1段階である。

3. 振動特性の最適化の原理

次に第2段階として、機械構造全体の振動特性の計算結果を用いて最適化設計を行う。最適化設計の原理は、すでに発表したリセプタンス合成法における最適化設計の原理と同様である⁶⁾。一例として、工作機械を対象とした場合の最適化の原理を簡単に述べる。

切削点での工具側の点Aと品物側の点Bの間に作用する切削力方向の相対加振力 F_e と、切削面に垂直な方向の相対変位 X_e に対する m 次の共振振動数 ω_m 付近のコンプライアンスは、次の式(11)で与えられる。

$$\left(\frac{X_e}{F_e}\right)_m = \sin \beta \cdot \cos \theta_m \cdot \cos \varphi_m \frac{\pi \cdot f_m}{\delta_{Am}} \quad (11)$$

ここに、 θ_m は切削力方向の加振力 F_e の方向と相対変位 X_m の主モード方向とのなす角度、 φ_m は切削面に垂直な方向のA点とB点の間の相対変位 X_e と X_m とのなす角度、そして β は、加振力 F_e と振動変位 X_e の間の時間的位相差を表す。さらに、 f_m は式(10)のモードフレキシビリティであり、 δ_{Am} はこの m 次共振におけるシステム全体の対数減衰率を示している。また、モードフレキシビリティ f_m のすべての共振振動次数 m に関する総和は、静的な切削力 F_{st} による切込み方向の相対変位 X_{st} に関する静的なコンプライアンス f_{st} に等しく、

$$f_{st} = \sum_{m=1}^{\infty} f_m \quad (12)$$

と書ける。

工作機械の再生型自励びりに対する最適設計を行うには、すべての共振モードについての式(11)のコンプライアンスの最大値を最小にすることである。そのためには、各次の共振モードで f_m を小さくし、さらに δ_{Am} を大きくすればよい。モードフレキシビリティ f_m は、電

図4 門型フライス盤縮尺模型の解析計算モデルの説明図

子計算機プログラムにより正確に、しかも容易に計算できる。そしてその値はモード次数により、また構造設計により大きく変化する値である。一方、対数減衰率は、理論的に正確な値を求めることは現在のところ不可能であり、また機械を製造した後にコントロールしやすい値である。よって、電子計算機プログラムによって最適化をする場合、まずモーダルフレキシビリティの最適化に着目して行うのが本研究で採用するやり方であって、その手順は次のごとくである。

(1) すべての共振モードに対して、工具と品物間の切削力方向の相対加振力と、切削面に垂直な方向の相対変位に関するモーダルフレキシビリティ f_m を式(10)により計算する。式(12)の関係より、ある有限の次数のモーダルフレキシビリティの和が静的なコンプライアンス f_{st} にほぼ近くなれば、それ以外の次数のモードは、再生型自励びりの安定性に関係ないと考えてよい。普通は、数次のモーダルフレキシビリティのみを計算すれば十分である。このモーダルフレキシビリティの計算により、その値が大きなモードが再生型自励びりの安定性に最も関係するモードとみなすことができる。

(2) その共振モードの復元エネルギー分布、慣性エネルギー分布から、どの部分構造の、どの要素にエネルギーが集中しているかを見つけ、システム内にエネルギーが一樣に分布するよう設計変更を行う。この(1)と(2)の過程を繰返すことにより、モーダルフレキシビリティに関する最適化設計を得ることができる。

図5 A点での共振曲線の計算値と実験値

(3) 次に、モーダルフレキシビリティの大きなモードにおいて、対数減衰率 δ_{Am} が大きくなるよう設計の最適化を行う。

4. 解析手法の適用例

図4は、この動剛性合成法による電子計算機プログラムを使って計算を行い、そして実験結果と比較し、さらに最適化設計を実施した門型フライス盤の縮尺模型である。これは鋼板を溶接して作られており、4つのゴムパッドの上に置かれている。この構造全体を9つの部分構造に分割し、スピンドルを3本のはり要素、ゴムパッドは4つのばね要素、他の部分構造を合計214枚の長方形平板要素でモデル化した。そして、解析の原理で述べた手法に従って、工具側の切削点に相当するA点と品物側の切削点に相当するB点の間の相対的な振動特性を求めた。図5には、加振実験ではA、Bいずれか一方の点の変位のみが容易に測定できるので、それと比較するために相対振動変位ではなく、工具側のA点のみのZ軸方向およびY軸方向の共振曲線の計算結果および実験結果を示している。ここに、実線が計算値、点線が実験値である。この結果からXZ平面内の共振振動数は、計算値が235 Hz、実験値が220 Hzであることがわかる。また、Y軸方向の共振振動数の計算値が252 Hzで、実験値が240 Hzであった。これらの共振モード以下の低次の共振モードは、AB間のモーダルフレキシビリティが小さく、重要なモードではないので、図5では省いている。

表1 AB間に相対的に作用する振動力による静的コンプライアンス
およびAB間のモーダルフレキシビリティの計算結果

	X 方 向		Y 方 向		Z 方 向	
	静的コンプライアンス およびモーダルフレキシビリティ ($\mu\text{m}/\text{kg}$)	静的コンプライアンスに対する比	静的コンプライアンス およびモーダルフレキシビリティ ($\mu\text{m}/\text{kg}$)	静的コンプライアンスに対する比	静的コンプライアンス およびモーダルフレキシビリティ ($\mu\text{m}/\text{kg}$)	静的コンプライアンスに対する比
静的コンプライアンス	0.210	1.0	0.192	1.0	0.115	1.0
共振振動数 235 Hz (実験値 220 Hz)	0.154	0.733	—	—	0.077 9	0.677
共振振動数 252 Hz (実験値 240 Hz)	—	—	0.117	0.609	—	—

図6 共振振動数 235 Hz のモード形の計算結果

図7 共振振動数 252 Hz のモード形の計算結果

表2 共振モードにおけるエネルギー分布の計算結果

	XZ平面内の 共振振動数 235 Hz		Y方向の 共振振動数 252 Hz	
	復元エネルギーの 分布割合	慣性エネルギーの 分布割合	復元エネルギーの 分布割合	慣性エネルギーの 分布割合
部分構造 1	0.000 255	0.042 6	0.009 77	0.065 2
部分構造 2	0.001 45	0.033 0	0.004 44	0.023 3
部分構造 3	0.001 13	0.039 3	0.003 17	0.020 3
部分構造 4	0.027 6	0.058 0	0.022 2	0.042 3
部分構造 5	0.027 6	0.058 0	0.021 9	0.040 6
部分構造 6	0.335	0.038 9	0.038 7	0.013 7
部分構造 7	0.326	0.028 7	0.294	0.018 2
部分構造 8	0.204	0.216	0.425	0.164
部分構造 9	0.028 6	0.485	0.139	0.612
ゴムパッド部	0.049 0	—	0.041 9	—
計	1.0	1.0	1.0	1.0

表1は、AB間に相対的に作用する振動力による相対的振動変位に関する各座標方向の静的なコンプライアンス、および共振振動数におけるAB間のモーダルフレキシビリティの計算結果を示している。ここで、X方向とZ方向の共振振動数は、同じ面内の振動のため、等しい値となっている。この表より、AB間のX方向の静的コンプライアンスは、 $0.210 \mu\text{m}/\text{kg}$ であり、また共振振動数 235 Hz (実験値 220 Hz) でのAB間のモーダルフレキシビリティは $0.154 \mu\text{m}/\text{kg}$ で、この一つの共振モードで静的コンプライアンスの73%余りを占めていて、ほかに無限に存在するはずの共振モードのモーダルフレキシビリティを加えても、静的なコンプライアンスの27%にしかならず、この座標方向では、この共振モードが最も再生型自励びりに対して不安定となりうると考えられる。また、Y方向については、共振振動数 252 Hz (実験値 240 Hz) で、静的コンプライアンスの60%余りを占めていて、同様にこの共振モードも、再生型自励びりに対して不安定となりうる。図6および図7は、これらの問題となるXZ平面内の共振振動数 235 Hz と Y方向の共振振動数 252 Hz のモード形の計算結果を示している。これらの共振振動数に相当する実際に測定したモード形の実験結果とよく対応がとれていた。表2は、これらの共振モードにおいて、各部分構造に蓄えられるエネルギー分布の比率の計算結果を示している。共振振動数 235 Hz においては、部分構造 6, 7, 8 において復元エネルギーが大きく分布しており、これらの部分構造の設計変更を要することがわかる。共振振動数 252 Hz では、部分構造 7 および 8 のベッド部のねじり変形による復元エネルギーの集中が生じていることがわかる。このような問題となる共振モードにおけるエネルギー分布の結果より、設計変更を必要とする部分構造を実際に改造した様子を図8に示す。そして、表3に、原設計と改造設計後の共振振動数の計算

結果とよく対応がとれていた。表2は、これらの共振モードにおいて、各部分構造に蓄えられるエネルギー分布の比率の計算結果を示している。共振振動数 235 Hz においては、部分構造 6, 7, 8 において復元エネルギーが大きく分布しており、これらの部分構造の設計変更を要することがわかる。共振振動数 252 Hz では、部分構造 7 および 8 のベッド部のねじり変形による復元エネルギーの集中が生じていることがわかる。このような問題となる共振モードにおけるエネルギー分布の結果より、設計変更を必要とする部分構造を実際に改造した様子を図8に示す。そして、表3に、原設計と改造設計後の共振振動数の計算

結果と実験結果および AB 間のモーダルフレキシビリティの計算結果を表している。改造設計 1 では、部分構造 7 と 8 の箱型構造にエンドプレートを付け、ベッドのねじり変形に対する補強を行っている。また、改造設計 2 では、改造設計 1 につけ加えて、部分構造 6 の中空の構造にエンドプレートを付け、さらに部分構造 7 と 8 のベッド部の上面と下面に補強板を溶接してはり付けた。これらの改造設計により、共振振動数が上昇し、モーダルフレキシビリティが低下しており、設計変更によって、振動特性が改善されていることがわかる。

5. 結 言

複雑な機械構造物の静特性および動特性を設計の段階で解析し、より振動を生じにくい機械構造を設計するために、動剛性合成法による電子計算機プログラムを開発した。この解析手法の概要と主な特徴は次のとおりである。

- (1) 機械構造全体を複数個の部分構造に分割し、これを順次合成して、機械構造全体の特性を求める。このために、計算機内で必要とされる記憶容量のほとんどは、部分構造の動剛性の結合端間の関係のみについて記憶するものだけでよく、記憶容量の節約が行われている。またすべての部分構造の計算において必要十分な計算精度が得られるよう、機械構造を部分構造に分割すれば、機械構造全体の計算精度を保証しうる。
- (2) 本手法においては、要素番号および節点番号は各部分構造についてそれぞれ独自に付けるので、構造全体にわたって通し番号で付ける通常の有限要素法の計算手法の場合に比べ、容易であり誤りも少ない。また、最適化設計を行う場合の設計変更を容易に行える。
- (3) 隣接する構造部分相互間の結合には剛結合または柔結合の計算を行うことができる。柔結合においては、ばねとダンパ要素により結合されている場合の計算ができるが、これは従来の有限要素法で行われてきた等価な減衰率を用いて行う比例減衰の仮定(減衰係数が剛性係数に比例するとする仮定)にた

表 3 改造設計後の共振振動数と AB 間のモーダルフレキシビリティの計算結果

	共振振動数と AB 間のモーダルフレキシビリティ			
	X 方 向		Y 方 向	
	共振振動数	モーダルフレキシビリティ ($\mu\text{m/kg}$)	共振振動数	モーダルフレキシビリティ ($\mu\text{m/kg}$)
原設計	235 Hz (実験値 220 Hz)	0.154	252 Hz (実験値 240 Hz)	0.117
改造設計 1	235 Hz (実験値 220 Hz)	0.154	308 Hz (実験値 290 Hz)	0.0814
改造設計 2	292 Hz (実験値 280 Hz)	0.0821	327 Hz (実験値 310 Hz)	0.0693

った減衰特性の計算に比して、現実の物理的モデルにより近い状況で減衰要素の効果をシミュレーションできる。

- (4) 本手法は上記のシミュレーション計算の結果を評価して、エネルギーバランス理論による最適化設計を行うために必要な判断資料を設計者に提示する機能をもっている。これにより、振動特性における CAD の本来の目的を容易に達し得る。

本研究の進行にあたり、京都大学教授・奥島啓式博士の全面的なご支援をたまわった。また、京都大学助教授・星鉄太郎博士のご指導を受けて行ったものであることを記し、感謝の意を表すものである。

文 献

- 1) A. Cowley: Co-operative Work in Computer Aided Design in the C.I.R.P., Ann. CIRP, **21**, 2 (1972) 257.
- 2) 佐田登志夫, 宮本 博, 高島信行ほか: 有限要素法による工作機械の動剛性の解析, 精密機械, **37**, 3 (1971) 218.
- 3) H. Sato et al.: Development of the Finite Element Method for Vibration Analysis of Machine Tool Structure and its Application, Proc. 14th Int. MTDR Conf., (1974).
- 4) 吉村允孝: 電子計算機による構造物の動特性解析法——工作機械の動特性解析法の研究(第 1 報), 精密機械, **36**, 3 (1970) 52.
- 5) M. Yoshimura: Dynamics of a Planer-type Machine Computed by Synthesis of Receptance Program System, Bull. Japan Soc. Prec. Engg., **5**, 4 (1971) 105.
- 6) M. Yoshimura & T. Hoshi: Computer Approach to Dynamically Optimum Design of Machine Tool Structures, Proc. 12th Int. MTDR Conf., (1972) 439.
- 7) T. Hoshi & M. Yoshimura: Initial Application of Dynamic Structural Analysis to CAD of Machine Tools, Proc. 14th Int. MTDR Conf., (1974).
- 8) T. Hoshi: Parameters of Mounting and Foundation Affecting the Structural Dynamics of Machine Tools, Mem. Fac. Engg., Kyoto Univ., **36**, Part 2 (April 1974) 105.
- 9) O.C. Zienkiewicz & Y.K. Cheung: The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, McGraw-Hill, London (1967).