最大実体原理の単純な例への統計的手法の応用*

吉 本 勇**

Application of Statistical Technique to the Simple Examples
for Maximum Material Principle

Isamu YOSHIMOTO

One of the most important concepts included in a new tolerancing system is the maximum material principle, which is specified in the international standard ISO 1101/II. In this paper a statistical technique is applied to the allocation of tolerance on the simple examples for the maximum material principle. In the first place, concerning the case (Case 1) where the one component with two pins fits to the other component with two holes and the case (Case 2) of the component having more than two holes, the maximum material principle, the zero positional tolerance and the relevant gaging are explained. Secondly the concept of functional diameter corresponding to the functional (virtual) pitch diameter of screw threads is introduced, and the distributions of the functional diameters in the above two cases are derived. Finally taking into account the above distributions, the allocation of the total tolerance to the hole diameter tolerance and the positional tolerance (or center distance tolerance for Case 1) is discussed.

1. 緒 言

設計製図を合理化するために、新しい公差指定方式が国際的に検討されている。そのような公差指定方式に含まれる最も重要な概念の一つは最大実体原理である。この原理は国際規格 ISO 1101/II¹⁾ に規定されている。

この原理が適用される、ある場合には、寸法公差、形状公差及び位置公差が一つの数値(全公差)でまとめて規制される。そのような場合に寸法公差、形状公差及び位置公差への全公差の配分はひじょうに重要な問題である。

この論文では最大実体原理に対する二つの単純な例における公差の配分に統計的手法を応用している。まず、ねじの総合有効径に対応する総合直径という概念を導入し、次に上記の例における総合直径の分布を導いている。最後に上記の分布を考慮に入れて、公差の配分を検討している。

2. 最大実体原理に対する二つの単純な例

ISO 1101/II の中に最大実体原理を説明するため次のような例が示されている。図 1 は 2 個のピンをもつ上の部品を 2 個の穴をもつ下の部品にはめあわせる場合の中心距離に対する公差指定の単純な例を示す。ピン及び穴

の直径は寸法公差をもち、2 個のピンの間及び 2 個の穴の間の中心距離も他の公差をもつ。

これら二つの部品は中心距離の公差及び寸法公差によって許される最悪の条件のもとでも組立可能である。図 2 は図 1 に示される上下の部品の極端な条件のもとでの組立を示す。図 2 に示されるようにピンのような外側形態が規定された最大寸法をもつか、穴のような内側形態が規定された最小寸法をもつ場合を最大実体条件と呼ぶ。

図 1 組立てられる二つの部品

図 2 二つの部品の極端な条件のもとでの組立

* 原稿受付 昭和 50 年 5 月 14 日。生産加工技術に関する国際会議(昭和 49 年 8 月 28 日)および昭和 50 年度精機学会春季大会学術講演会(昭和 50 年 4 月 5 日)にて発表。

** 正 会 員 東京工業大学(東京都目黒区大岡山 2-12-1)

図3 最大実体原理適用の第1例
(ケース1)

表1 穴径の実寸法 D_a と中心距離公差 T_L との関係 (ケース1)

D_a	T_L
10.0	0.0
10.1	0.1
10.2	0.2

図4 最大実体原理適用の第2例 (ケース2)

表2 穴径の実寸法 D_a と位置度公差 T_p との関係 (ケース2)

D_a	T_p
10.0	0.0
10.1	0.1
10.2	0.2

図5 図3で規定された製品に対する
ゲージ検査 (ケース1)

図6 総合直径 D_f (ケース1)

もし穴の直径が規定された最大寸法、すなわち 10.2 をもつならば、その中心距離は $60.0 - 10.2 = 49.8$ と $40.0 + 10.2 = 50.2$ の間に変化するという条件のもとでも組立可能である。これは、図面上の要求 ± 0.1 に比較して、 ± 0.2 の公差に相当する。

図1の指示では上述のような工作上的自由度の増加は許されない。このような自由度の増加は図3 (ケース1) に示すような中心距離公差の後に $\textcircled{M}$ という記号をつけることによって指示される。この指示は穴径の実寸法 D_a と中心距離の公差 T_L の間に表1に示すような関係があるということを意味する。上述のような工作上的自由度の増加が許されることとなる原理を最大実体原理と呼ぶ。

3個以上の穴をもつ部品の場合には位置度記号を用いると便利である。図4 (ケース2) は4個の穴をもつ部品を示す。図中の長方形のわくは理論的に正確な寸法を記述するのに用いられる基準となる寸法であることを示す。公差に関する指示は、位置度公差が最大実体条件でゼロであること及び全公差が 0.2 であることを意味する。穴径の実寸法 D_a と位置度公差 T_p の間の関係を表2に示す。

3. 総合直径の概念

図3で規定される部品に対する通り及び止りゲージを図5に示す。通りゲージの検査に合格するためには、図6に示す穴の総合直径 D_f が $D_0 = 10.00$ より大きくなければならない。この場合の総合直径 D_f は次式で計算される。

$D_f = (1/2)(D_1 + D_2) - |\Delta L|$ (ケース1) (1)

ただし D_1 及び D_2 は2個の穴の直径、 ΔL は中心距離の偏差である。

すなわち、 ΔL は次式で定義される。

$$\Delta L = L - L_0 \quad (2)$$

ただし L は実際の中心距離、 L_0 は基準の中心距離である。同様に ΔD_1 、 ΔD_2 及び ΔD_f はそれぞれ D_1 、 D_2 及び D_f の偏差である。

$$\Delta D_1 = D_1 - D_0, \Delta D_2 = D_2 - D_0, \Delta D_f = D_f - D_0 \quad (3)$$

式(1)及び(3)から、次の関係が得られる。

$$\Delta D_f = (1/2)(\Delta D_1 + \Delta D_2) - |\Delta L| \quad (\text{ケース1}) \quad (4)$$

図3に示す穴径の公差を T_D で表すとき、製品が図5に示されたゲージの検査に合格するという条件は次式で表される。

$$0 \leq \begin{cases} \Delta D_1 \\ \Delta D_2 \\ \Delta D_f \end{cases} \leq T_D \quad (5)$$

D_1 及び D_2 に対する公差を T_{Di} 、 L に対する許容域を $\pm T_L$ とすれば、 T_D を T_{Di} と T_L にどのように配分するかはひじょうに重要な問題である。上述の総合直径という概念はねじの総合有効径の概念と似ている。例えば、ねじの総合有効径は単独有効径からピッチ誤差及びフランク角誤差の有効径当量を引いた値に等しい。筆者²⁾はねじにおける有効径公差の配分について以前に統計的考察を行った。

図4に示す場合の総合直径は図7をもとにして、次式で与えられる。

$$D_f = D_a - 2\Delta \quad (\text{ケース2}) \quad (6)$$

図7 総合直径 D_f (ケース2) 図10 D の成分
(ケース2) 図11 ΔD_a 及び 2Δ の分布(ケース2) 図8 ΔD_i 及び ΔL の分布(ケース1)図9 $|\Delta L|$ の分布
(ケース1) 図12 ΔD_i 及び ΔD_f の分布(ケース1)

ただし D_a 及び Δ はそれぞれ穴径の実寸法及び穴の中心の真位置からの偏差である。図4に規定された最小穴径を D_0 とし、 $\Delta D_a = D_a - D_0$ 及び $\Delta D_f = D_f - D_0$ とすれば、式(6)は次のように変形される。

$$\Delta D_f = \Delta D_a - 2\Delta \quad (\text{ケース2}) \quad (7)$$

4. 総合直径の分布

公差の配分を検討するために、本章では総合直径の分布を取扱う。ケース1における $\Delta D_i (i=1, 2)$ 及び ΔL の分布を図8に示すように、それぞれ $N(\mu, \sigma^2)$ 及び $N(0, \sigma_1^2)$ 、そしてこれらの分布は互いに独立であると仮定する。 $N(\mu, \sigma^2)$ は平均 μ 、分散 σ^2 の正規分布を意味する。この図で $T_{Di}=6\sigma$ 及び $T_L=3\sigma_1$ はそれぞれ穴径公差及び中心距離の公差である。

正規分布の性質から $(1/2)(\Delta D_1 + \Delta D_2)$ の分布は $N(\mu, \sigma^2/2)$ であることがわかる。この量の確率密度関数 $f_1(x)$ は次のとおりである。

$$f_1(x) = [1/(\sqrt{\pi}\sigma)] \exp[-(x-\mu)^2/\sigma^2] \quad (8)$$

$|\Delta L|$ の分布は図9に示すとおりで、 $|\Delta L|$ の確率密度関数 $f_2(x)$ は次のとおりである。

$$f_2(x) = (\sqrt{2/\pi}/\sigma_1) \exp[-x^2/(2\sigma_1^2)] \quad (x \geq 0 \text{ のとき}), \\ 0 \quad (x < 0 \text{ のとき}) \quad (9)$$

$|\Delta L|$ の平均 μ_2 及び分散 σ_2^2 は次式で計算される。

$$\mu_2 = \sqrt{2/\pi} \sigma_1, \quad \sigma_2^2 = [1 - (2/\pi)] \sigma_1^2 \quad (10)$$

式(4)から ΔD_f の平均 μ_f 、分散 σ_f^2 及び確率密度関数 $g_1(y)$ は次式で与えられる。

$$\mu_f = \mu - \mu_2, \quad \sigma_f^2 = (\sigma^2/2) + \sigma_2^2 \quad (11)$$

$$g_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x+y) f_2(x) dx = (2/\sigma_3) \phi[(y-\mu)/\sigma_3] \\ \times \Phi[-\sqrt{2}\sigma_1(y-\mu)/(\sigma\sigma_3)] \quad (\text{ケース1}) \quad (12)$$

ただし $\sigma_3 = \sqrt{(\sigma^2/2) + \sigma_1^2}$ 、 $\phi(z) = (1/\sqrt{2\pi}) \exp(-z^2/2)$ 、

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \phi(z) dz \quad (13)$$

ケース2に対して、 Δ の成分を図10に示すように、 X 及び Y とし、 X 及び Y の分布を $N(0, \sigma_4^2)$ とすれば、 Δ の確率密度関数 $f_3(x)$ は次式で与えられる⁸⁾。

$$f_3(x) = (x/\sigma_4^2) \exp[-x^2/(2\sigma_4^2)] \quad (x \geq 0 \text{ のとき}), \\ 0 \quad (x < 0 \text{ のとき}) \quad (14)$$

式(7)及び ΔD_a の分布は $N(\mu, \sigma^2)$ であるという仮定から、 ΔD_f の確率密度 $g_2(y)$ を次のように導くことができる。

$$g_2(y) = [\sqrt{2\pi} \sigma/\sigma_5^2] \phi[\sigma\eta/(2\sigma_4)] [\phi(\eta) - \eta\Phi(-\eta)] \\ (\text{ケース2}) \quad (15)$$

ただし $\sigma_5 = \sqrt{\sigma^2 + 4\sigma_4^2}$ 、 $\eta = (2\sigma_4/\sigma)(y-\mu)/\sigma_5$ (16)

ΔD_a 及び 2Δ の分布を図11に示す。この図において T_{Da} 及び T_p はそれぞれ穴径公差及び位置度公差である。図11及び式(14)から、次の関係が導くことができる。

$$T_p = 6.88\sigma_4 \quad (17)$$

5. 公差の配分

この章で公差配分の数値例を示す。ケース1に対し、 $T_{Di}=T_L$ または $2\sigma=\sigma_1$ という場合を考えよう。式(10)~(13)から次の関係が得られる。

$$\mu_f = \mu - 1.60\sigma, \quad \sigma_f = 1.40\sigma, \quad \sigma_3 = 2.12\sigma \quad (18)$$

$$g_1(y) = (1.06\sigma)^{-1} \phi[(y-\mu)/(2.12\sigma)] \\ \times \Phi[-(y-\mu)/(0.75\sigma)] \quad (19)$$

これらの式を用いて求めた ΔD_i 及び ΔD_f の分布を図12に示す。

確率密度関数 $g_1(y)$ は、その左すその部分では、十分な精度で次式により近似することができる。

$$g_1(y) \approx (2/\sigma_3) \phi[(y-\mu)/\sigma_3] \quad (\text{左すその部分で}) \quad (20)$$

表3 T_{Di} と T_L に対する計算結果
(ケース1, $T_D=0.2$ mm)

σ_1/σ	T_L/T_{Di}	T_{Di}	T_L	$T_{Di}+T_L$
1	0.5	0.173	0.087	0.260
2	1	0.122	0.122	0.244
4	2	0.075	0.150	0.225

表4 T_{Da} と T_p に対する計算結果
(ケース2, $T_D=0.2$ mm)

σ_1/σ	T_p/T_{Da}	T_{Da}	T_p	$T_{Da}+T_p$
0.5	0.575	0.150	0.086	0.236
1	1.15	0.109	0.124	0.233
2	2.30	0.067	0.153	0.220

図13 公差の配分 (ケース1)

図14 ΔD_a 及び ΔD_f の分布 (ケース2)

図15 公差の配分 (ケース2及びケース1)

従って、次の関係を求めることができる。

$$\Pr(\Delta D_f \leq \mu - 3.20\sigma_3) = 0.00135 \quad (21)$$

式(21)と図12から、次式が導かれる。

$$\mu - 3.20\sigma_3 = 0, \quad \mu + 3\sigma = T_D \quad (22)$$

ただし T_D は図3に示される全公差である。式(22)を解くことにより、次の値が得られる。

$$\sigma = 0.102T_D \quad (23)$$

図3では $T_D = 0.2$ mm であるから、次の結果が得られる。

$$T_{Di} = T_L = 0.122 \text{ mm} \quad (24)$$

同様な計算から、表3及び図13を得ることができる。表3及び図13はケース1における全公差の穴径公差及び中心距離公差への統計的配分を示す。

ケース2に対して、 $\sigma_2 = \sigma(T_p/T_{Da} = 1.15)$ という場合の ΔD_a 及び ΔD_f の分布を図14に示す。 ΔD_f の分布の左すその部分で、式(15)の積分は十分な精度で次式により近似することができる。

$$\int_{-\infty}^z g_2(y) dy \approx (2\sigma_2/\sigma_3) \exp[-(y-\mu)^2/(2\sigma_3^2)] \quad (25)$$

(左すその部分で)

式(25)を用いればケース1と同様な計算を容易に行うことができる。そのような計算の結果を表4及び図15に示す。

図15において、太い線は図4(ケース2)で代表される3個以上の穴をもつ部品の場合に対応し、ケース1に対応する細い線を比較のために記入してある。

図15によれば、穴径公差と位置度公差(ケース1に対しては中心距離公差)の和はゼロ位置度公差指定における全公差より大きい。このような統計的手法は最大実体原理のもと複雑な例にも適用できるであろう。

6. 結 言

この研究をまとめれば、次のとおりである。

- (1) 2個のピンをもつ部品を2個の穴をもつ部品にはめあわせる場合(ケース1)及び3個以上の穴をもつ部品の場合(ケース2)に関して、最大実体条件、ゼロ位置度公差及びそれに対するゲージ検査を説明している。
- (2) ねじの総合有効径に対応する総合直径という概念を導入し、上記二つの場合における総合直径の分布を導いている。
- (3) 上記の分布を考慮に入れて、全公差を穴径公差と位置度公差(ケース1に対しては中心距離公差)へ配分する問題を検討している。
- (4) 上述のような統計的手法を適用すれば、穴径公差と位置度公差の和はゼロ位置度公差指定における全公差より大きい。

謝 辞

この研究に対し貴重な御教示を賜った ISO/TC 10/SC 5 国内委員会(主査: 佐藤豪教授)の主査ならびに委員の方々に感謝の意を表します。

文 献

- 1) ISO 1101/II, Technical Drawings—Tolerances of Form and of Position—Part II, Maximum Material Principle, (1974).
- 2) 吉本 勇: ねじの有効径公差とピッチ誤差・山の半角誤差との関係, 精密機械, 33, 10 (1967) 673.
- 3) G.W. Michalec: Precision Gearing—Theory and Practice, John-Wiley, (1966) 162.