研 究

工作機械構造の剛性解析システム (第1報)*

—静剛性および動剛性解析—

佐田 登志夫** 大久保 信行*** 竹内 芳美†

Computer System for Analysis of Machine Tool Structure (1st Report)

—Static and Dynamic Rigidity Analysis—

Toshio Sata, Nobuyuki Okubo, Yoshimi Takeuchi

A computer program to analyse the static and dynamic rigidity of a machine tool structure is developed by utilizing the finite element method, and it is applied to the real and models of machine tool structures. In the static analysis, a solution is obtained by the node reduction method using the Choleski decomposition method. In the dynamic analysis, the first approximate eigen values are obtained by the Jacobi method and then it is improved by the conjugate gradient method. It is confirmed that the computer program is applied to analysis of complicated structures such as machine tool with reasonable good accuracy and rather short computing time.

1. ま え が き

工作機械の加工精度は年々高いものとなり、このために実際の切削を行い、その精度低下の要因を調べる研究が行われた。これによると切削により生ずる切削力、熱によりコラム、主軸頭、スピンドルなどの工作機械構造が変形し、所要の工具動作ができないことがわかった。しかし、実験では特定の位置、加工条件でしか行えず、解析的な手法が要望された。最近の計算機による構造解析の発展により、初期には工作機械構造を単純なはりや集中した質量で表現する集中質量法、あるいは質量が均一に分布したはりの集合で表現するリセプタンス法¹⁾などが登場した。しかし、工作機械の構造は複雑で、この手法で解析することは困難である。ところがその後発達した有限要素法は、構造を広がりのある有限要素の集合として表現し、機械構造をよりよく近似できるための解析の精度が上がり、構造の細部の差異の影響まで検討できるなどの数々の利点²⁾が示された。またこの手法によれば工作機械構造を一度有限要素に分割すれば構造の基本的な特性、すなわち静、熱および動剛性を一挙に解析することができるという利点もある。このような利点を考え、昭和44年から有限要素法により工作機械構造を解析する計算機プログラムを作成し、これをいくつかのモデルと実機に適用し、実験結果とも比較を行い、その有

効性を確かめた。

有限要素法を用いた構造解析プログラムとしてはNASTRANをはじめとして各種のプログラムが開発されているが、本プログラムは工作機械構造解析専用プログラムとしては初めて作られたもので、他のプログラムと比べ解析の便を考慮したいくつかの特殊な機能をもつこと、また計算時間が著しく短いなどの特色をもっている。

そこで、本報告の第1報で有限要素法を工作機械構造の静剛性および動剛性解析に適用した場合について、第2報で熱剛性解析に適用した場合について、さらに第3報で工作機械構造の設計に応用する方法について述べる。

2. 有限要素法による工作機械構造の
静剛性および動剛性解析

工作機械構造は鋳造構造にしても溶接構造のものにしても、板要素とはり要素の組合せとしてその構造を表現できる場合がほとんどである。そこで、ここでは工作機械構造を薄板構造物としてモデル化し、各板を有限個の有限要素に分割し、それらの力学的性質によって静剛性および動剛性を解析する数学的手法について述べる。

2.1 静剛性解析の場合

工作機械構造は、その形状の各辺が直交している場合が多いので図1に示す長方形およびはり要素でモデル化する。有限要素法では一つの要素内の変位を節点の関数と仮定してこの節点に加わる外力と変形の関係を要素剛性マトリクスとして表す。そして系全体について節点の

* 原稿受付 昭和50年7月11日。北陸信越支部新潟地方講演会(昭和49年6月28日)にて発表。

** 正会員 東京大学工学部(東京都文京区本郷7-3-1)

*** 正会員 機械技術研究所(東京都杉並区井草4-12-1)

† 学生会員 東京大学工学部

図1 解析に用いられる有限要素

接続関係に従ってそのマトリクスを組み合わせることによってつりあい方程式を記述する。以下にこの剛性解析プログラムで用いられている手法について概略の説明をする²⁾。

図1の4節点をもつ長方形要素で、面内変形と面外変形は独立していると考え、まず面内変形、すなわち x, y 方向の変位 u, v は座標 x, y についてそれぞれ次のような変位関数をとるとする。

$$\left. \begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \\ v &= \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで、 $\alpha_1 \sim \alpha_8$ の一般化座標は4節点の x, y 方向の変位 ($u_i, v_i, u_j, v_j, u_k, v_k, u_l, v_l$) で表される。

図1に示す面外変形は、たわみ方向の変位 w 、 x 軸まわりの曲げ θ_x 、 y 軸まわりの曲げ θ_y があり、次の変位関数を用いている。

$$\left. \begin{aligned} w &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 x^2 + \beta_5 xy + \beta_6 y^2 \\ &\quad + \beta_7 x^3 + \beta_8 x^2 y + \beta_9 xy^2 + \beta_{10} y^3 + \beta_{11} x^3 y \\ &\quad + \beta_{12} xy^3 \\ \theta_x &= \frac{\partial w}{\partial y} \\ \theta_y &= -\frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここで一般化座標 $\beta_1 \sim \beta_{12}$ は4節点の面外変位 $\{\delta\}^0$ によって表される。

これらの変位関数により、一つの要素剛性マトリクスが得られる。このマトリクスは 24×24 の大きさで図1中の Z 軸まわりの曲げ θ_z に対応する項は0としている。

はり要素に関しては両端の2節点を考え、材料力学の知識から板要素の場合と同様にして要素剛性マトリクス (12×12) が求められる。

これらの要素剛性マトリクスを全体座標系について座標変換し、節点の接続関係に従って

$$[K]\{X\} = \{F\} \quad (3)$$

としてつりあい方程式が記述できる。ここで $[K]$ は系全体の剛性マトリクス、 $\{X\}$ は全節点変位、 $\{F\}$ は節点に加わる外力である。

2.2 動剛性解析の場合

動剛性を解析する際には、系全体の剛性マトリクスに加え、質量および減衰マトリクスが必要である。しかし減衰については現在それを適正に表現する手法がなく、また一般に機械構造の減衰は小さく、固有振動数と振動モードには大きな変化をもたらさないなのでこの解析では省略する。

長方形板要素の場合には、節点に等価な慣性力が加わると考え要素質量マトリクスが求められる。すなわち式(1)および(2)の面内および面外変位の時間による2次微分と単位体積当たりの質量との積が慣性力に等しいことから計算できる。はり要素の場合には簡単のために、2節点に全質量を等分にして与えることにする。

これらの要素質量マトリクスを組立てることにより、系全体の自由振動つりあい方程式は

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} = \{0\} \quad (4)$$

として記述できる。ここで $[M]$ は系全体の質量マトリクスである。

3. 静剛性および動剛性解析プログラム

ここでは前に述べたつりあい方程式を解く数値解法と計算プログラムの構成について述べる。

工作機械構造を有限要素で近似しようとする多数の要素を必要とし、つりあい方程式の次数も非常に大きくなる。そのためには数値解法に工夫を要する。この解析には直接に逆マトリクスを求める直接法と、近似的な解を与え、これを改良するベクトル反復法とがある³⁾。計算機で処理する場合、前者は計算時間が少ないが、大きな記憶容量が必要であり、後者は記憶容量も少なく、またプログラムも簡単であるが、正解に近いベクトルを与えなければ計算時間がかかりかかる。したがって設計の際にできるだけ入力の手間を省かなければならないこと、また最近の計算機の記憶容量が非常に大きくなっていることを考慮し、この解析システムでは前者の直接法を用いている。

3.1 静剛性解析の場合

静的外力による変形を求めるためには式(3)での系全体の剛性マトリクスの逆行列を計算する。この手法としては Choleski 分解法を用いた。この手法によれば逆行

図2 静剛性解析計算プログラムのフローチャート

図3 静剛性解析数値計算例

列を求めたいマトリクスを $[A]$ とすると、まずこれを三角マトリクスに分解する。

$$[A] = [W]^T [W] \quad (5)$$

ここで $[W]$ は上三角マトリクスである。したがって、 $[A]$ の逆行列は

$$\begin{cases} [A]^{-1} = [U][U]^T \\ [U] = [W]^{-1} \end{cases} \quad (6)$$

として計算できる。

しかしこの手法でも一度に構造の全節点に対応する剛性マトリクスの逆行列を求めることは困難である。そこでまず工作機械構造をいくつかの構造要素、たとえば主軸頭、コラムなどに分解し、この構造要素内で他の要素との接続関係がない節点を消去する。そしておのおのの構造要素について縮小された構造要素剛性マトリクスを計算してこれらを組立て、ふたたび Choleski 分解法で逆行列を求める節点消去法を用いた⁹⁾。この方法によれば、いまある構造要素についての剛性マトリクスは次のように分解できる。

$$\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ij}^T & K_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_i \\ X_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix} \quad (7)$$

ここで添字 i は他の構造要素に接続している節点 (外部節点) に関するもの、 j は他の構造要素に接続していないもの (内部節点) である。式 (7) は二つの方程式に分解され、外部節点については不静定であるが、内部節点については静定で解くことができる。したがって式 (7) は

$$\begin{cases} [K_{ii}]' [X_i] = \{F_i\}' \\ \text{ただし } [K_{ii}]' = [K_{ii}] - [K_{ij}][K_{jj}]^{-1}[K_{ij}]^T \\ \{F_i\}' = \{F_i\} - [K_{ij}][K_{jj}]^{-1}\{F_j\} \\ \{X_j\} = -[K_{jj}]^{-1}[K_{ij}]^T [X_i] \end{cases} \quad (8)$$

として変形され、あたかも自由度が減少したかのような効果をもつ。

これらの手法を用いた静剛性解析計算機プログラムのフローチャートを図2に示す。この計算機プログラムには、入力として有限要素に関するデータ (幾何データ) たとえば要素の節点番号など、外力の大きさなどのデータ (技術データ) が必要である。前者は後で述べる動剛性あるいは熱剛性解析の場合でも共通で、その読み込みのルーチンとして YOMDAT が独立したものになっている。

なお、つりあい方程式の境界条件についてはその節点に等価なばねが接続していると考え、このばね定数を対応する剛性マトリクスの対角項に加えている。実際の工作機械構造は数点をレベリング、ブロックなどで支えているので、このばね定数を用いればよい。

次にこの計算機プログラムによる数値計算例を図3に示す。ここでは中空長方形柱に曲げおよびねじり荷重を加えた場合の変位を分割要素数を変えて計算し、弾性論による理論解と比較した結果を示す。図中の二点鎖線は理論値を示す。この結果によると曲げ変形に関しては分割した要素数が少なくてもよい近似が得られている。し

図4 動剛性解析計算プログラムのフローチャート

る。そこでここでは、まず節点消去法を利用した Jacobi 法によって固有ベクトルの近似値を求め、それを初期値として共役傾斜法によって解を改善する方法を用いた。これにはまず静剛性解析の場合と同様に各構造要素において外部節点だけの縮小された剛性および質量マトリクスを求める。すなわち式(8)により内部節点と外部節点の関係を利用し

$$\begin{aligned} [M_{ii}]' &= [M_{ii}] - [M_{ij}][K_{jj}]^{-1}[K_{ij}^T] \\ &\quad - [K_{ij}][K_{jj}]^{-1}([M_{ij}^T] \\ &\quad - [M_{jj}][K_{jj}]^{-1}[K_{ij}^T]) \end{aligned} \quad (9)$$

として外部節点についてだけの質量マトリクスが求まる。これは近似的に外部節点だけで振動モードを表現しようとする方法である⁴⁾。

これらの手法による計算機プログラムのフローチャートを図4に示す。最後のルーチン ENERGY では各構造要素の運動およびひずみエネルギーを計算する部分で、設計の際に利用するものである。

このプログラムによる薄板の振動解析結果と理論値との比較を図5に示す。図中の実線は理論値を示す。ただし、数値計算では図中の○印の節点を残して計算を行った。かっこの中の数値は Jacobi 法によって求めた固有振動数で、その振動モードを初期値として共役傾斜法により1回改善した固有振動数を示す。この結果では1回だ

かしねじり変形の場合には多少精度が落ちる。これは板が直交している部分で面内および面外変形が組合わさる際に変位関数に違いがあり、解の適合条件が満たされていないためである。このような場合にも適合条件を満たす変位関数の試みも行われているが、まだ一般化されていず、今後の問題である。

3.2 動剛性解析の場合

この解析システムではつりあい方程式を固有値問題とし、その固有振動数と振動モードを求めている。この場合も方程式が大きくなり通常の手法で解くことは困難である。

要素分割 振動モードと固有振動数 (Hz)	849 (851)	837 (921)	839 (926)
1次曲げ 解析解 3638 (2949)			
1次ねじり 3638 (2949)			
2次曲げ 5266 (5991)			
2次ねじり 11870 (11544)			

() 初期モードによる固有振動数

図5 動剛性解析数値計算例

け共役傾斜法を用いることにより十分理論値に近い値が得られていることがわかる。また分割要素数が増えるに従って正解に収束していることもよくわかる。

4. 解析プログラムの工作機械構造への応用

ここでは前述の計算機プログラムにより門型ジグ中ぐり盤構造の静剛性および動剛性解析を行った結果について述べる。

この構造は板厚 6 mm のプラスチック板をのり付けして組立てられた実機の縮小モデルである。図6にその形状と寸法を示す。

この構造を解析するために長方形板要素により図7のような計算モデルを用いた。実物との違いはコラムに段差を付けていることと、ベッドのしきり板が一部省略されているだけである。このモデルは計算上、クロスビーム、左コラム、右コラム、主軸頭とクロスレールおよびベッドの5構成要素から成っているとした。図中にはまた各構造要素の内部にある補強用のしきり板を示している。

この主軸頭の図に示すスピンドル部にX方向に静的な

図6 ジグ中ぐり盤構造

図8 計算された静変形

図7 有限要素による計算モデル

図9 計算された静変位と実測値との比較

外力が1 kg 加わったときの変形を 図8, また Y, Z 方向にそれぞれ 1 kg を加えた時のコラム上部および主軸頭の計算された変位と実測値との比較を図9 に示す. 有限要素法によってこのような複雑な工作機械構造でも, よい定量的評価ができることがわかる.

次に動剛性解析については同じモデルで第1次から8次までの固有振動数と振動モードを求めた. そのときの第1次と第2次の計算結果を図10 (a), (b) に示す. この結果から振動モードについてはよい一致が得られていた.

また第8次までの固有振動数の計算値と実測値と比較し 図11 に示す. ただし計算された振動モードでも 実測されないものもあった. 固有振動数についてもよい一致が

図10 計算された固有振動数と振動モード

得られていることがわかる. 図12 は前に述べたルーチン ENERGY によって求めた各振動モードにおける各構造要素のひずみおよび運動エネルギーの分布図である. こ

図 11 固有振動数の計算値と実測値との比較

図 12 各構造要素のエネルギー分布

の図から振動モードの特徴をさらによく理解できる。図中第1次, 2次, 5次のロッキングモードの場合にはひずみおよび運動エネルギーが一樣に分散していることがわかる。

これらの計算に要した時間は, 東京大学大型計算機センターの HITAC 8800/8700 (320 KW) を使用した場合, 静剛性で約 10 min, 動剛性で約 25 min かかった。

このように本解析プログラムは有限要素法を利用しているので, これまで公表されている集中質量法やリセプタンス法では記述が困難な構造も精度よく経済的に解析できる。また他の有限要素法による解析プログラムと比較して, 各振動モードにおける各構造要素のひずみおよび運動エネルギーが計算できるので, その振動モードに大きく関与する構造要素が分かるのが特長である。さらに, 構造要素ごとの節点消去法を用いているので, 入力の際に節点番号の順序などに制約がなく, データ作成に誤りが少ない。

5. 結 論

工作機械構造の静および動剛性を解析するために有限要素法を利用した計算機プログラムを作成し, 実際の工作機械構造およびモデルに適用した結果, 次の結論が得られた。

- (1) 静剛性解析の場合には Choleski 分解法を利用した節点消去法, 動剛性解析の場合には, 節点消去法によりマトリクスを縮小し, Jacobi 法によって固有値問題として解き, さらに共役傾斜法によってつりあい方程式を解いた。この手法により工作機械構造のような複雑な形状でも精度よく, しかも比較的短い計算時間で解析できた。
- (2) 工作機械構造の静剛性および動剛性について解析を行い, 実験と比較した結果, 十分実用的に有効な精度の解析結果が得られることを確かめた。

最後にこの研究の実施にあたり, プラスチックモデルの実験は機械技術研究所の安井課長, 計算機の使用の一部は日本ユニバックの柳生, 高山両部長のご好意によるものであり, 心より謝意を表します。

文 献

- 1) 吉村允孝: 電子計算機による構造物の動特性解析法——工作機械の動特性解析法の研究 (第1報), 精密機械, **36**, 3 (1970) 52.
- 2) O.C. ツィエンキーヴィッツほか (吉識監訳): マトリクス有限要素法, 培風館 (1970) 98.
- 3) 戸川隼人: マトリクスの数値計算, オーム社 (1971).
- 4) 河島佑男: 動的応答解析, 日本鋼構造協会編, 培風館 (1972) 90.