変動主軸回転数下の切削系の安定解析*

稲村 豊四郎** 佐田 登志夫**

Stability Analysis of Cutting under Varying Spindle Speed

Toyoshiro INAMURA, Toshio SATA

The stability of cutting system with periodically varying spindle speed is analyzed by means of functional analysis. The dynamic characteristics of both the machine tool structure and cutting process are considered as the linear operators in Hilbert space and the stability problem of the cutting system is solved as an Eigen value problem of these operators. It is proved that two kinds of beat type vibration exist under the stability limit of the system. The amplitude of these beats changes by the same and twice period as that of the spindle speed variation, respectively. The analytical results show that the maximum amplitude of both types of vibration decrease when the frequency of spindle speed variation increases or when the amplitude of spindle speed variation decreases. The analytical results also show that the stability limit of the system rises up when the amplitude of spindle speed variation increases but it is independent of the frequency of spindle speed variation. Finally the stability of the cutting system containing external random vibration is analyzed by using these results and the results show good agreement with the experimental results.

1. 緒 言

再生型びり振動は、切削過程、工作機械構造および時間おくれの3要素から成る閉ループ振動系が不安定状態になったとき発生する¹⁾。したがってこのびり振動の発生を抑制するためには、系に含まれる各要素の動特性を何らかの方法で補償し、振動系が不安定になるのを防止すればよい。ところで従来のびり振動対策^{2)~5)}では、この振動系を構成する3要素のうちの工作機械構造と切削過程とを補償改善することのみ関心が払われてきた。しかしびり振動系を構成するもう一つの要素である時間おくれ特性についても、ここで何らかの改良策が考えられてよい。一例としてこの時間おくれを時間的に変動させる方法、すなわち工作機械の主軸回転数を加工中絶えず変動させる方法が考えられる⁶⁾。しかしこの方法がどの程度びり振動の抑制法として有効であるかを詳しく検討するためには、主軸回転数変動状態での切削系の安定解析が行われなければならない。ただしこのような系の理論的な安定解析には従来のベクトル軌跡による方法が適用できないため、その取扱いは新しい手法が必要となる。

本研究では、主軸回転数が周期的に変動する場合の旋

削系の安定問題を関数解析的立場から解析し、実験結果と比較する。旋削系のパラメータとしては回転数変動幅および回転数変動周波数を選ぶ。本研究ではこれらパラメータと旋削系の安定限界、安定限界におけるびり振動波形および外乱が存在する場合の旋削系の外乱拡大率との関係を調べる。解析により得られた結果は、回転数変動状態における旋削実験結果と極めて良く対応する。また解析結果と実験結果とは、ともに再生型びり振動の抑制方法としてこの方法が有効であることを示している。

2. 解 析 理 論

2.1 振動系の方程式

もっとも簡単な場合として切削過程を二次元切削、機械構造を一自由度二次系とすれば、再生型自励びり振動系は次の連立微分方程式によって記述される。

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{f}}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x}(t) + 2\zeta\omega_n \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) + \omega_n^2 \mathbf{x}(t) & (1) \\ \dot{\mathbf{f}}(t) = K[\mathbf{x}'(t - \varphi(t)) - \mathbf{x}'(t)], \mathbf{x}'(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{n}(t) & (2) \end{cases}$$

ここで式(1)が機械系の動特性に、式(2)が切削過程の動特性に対応する。また $\mathbf{f}(t)$: 切削抵抗背分力の変動成分、 $\mathbf{x}(t)$: 切削抵抗 $\mathbf{f}(t)$ による機械系のたわみ、 ζ : 機械系の減衰係数、 ω_n : 機械系の固有角振動数、 K : 切削幅に比例する正定数(以下これを切削剛性係数と呼ぶ)、 $\mathbf{n}(t)$: 切削過程を通して振動系に入る外乱、 $\mathbf{x}'(t)$: 外乱が付加されたときの工具-被削材間相対変位、 $\varphi(t)$: 時間おくれ関数(被削材1回転に要する時間)である。本

* 原稿受付 昭和51年1月19日。昭和50年度精機学会春季大会学術講演会(昭和50年4月4日)にて発表。

** 学生会員 東京大学工学部(東京都文京区本郷7-3-1)

*** 正会員 東京大学工学部

図1 再生型びり振動機構のブロック線図

報では時間おくれ関数 $\varphi(t)$ を振幅 $2A$ の周期関数

$$\varphi(t) = T + A \sin(\omega_0 t + \delta) \quad (3)$$

とする。ここで T , A はそれぞれ定数, ω_0 は主軸回転数変動の角周波数である。定数 T , A は平均主軸回転数 N (rpm), 回転数変動幅 $2\Delta N$ (rpm) と次の関係にある。

$$T = \left(\frac{60}{N}\right) / \left[1 - \left(\frac{\Delta N}{N}\right)^2\right]$$

$$A = \left(\frac{60}{N}\right) \cdot \left(\frac{\Delta N}{N}\right) / \left[1 - \left(\frac{\Delta N}{N}\right)^2\right]$$

2.2 固有値問題としての定式化

最初に振動系の安定限界 K_0 および安定限界における振動波形 $x(t)$ を求める問題を考える。そこで外乱を無視して $n(t) = 0$, $x'(t) = x(t)$ とする。方程式 (1), (2) を

$$\begin{cases} \dot{f}(t) = (T_1 x)(t) \\ f(t) = K(T_2 x)(t) \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \dot{f}(t) = K(T_2 x)(t) \\ (T_1^{-1} f)(t) = x(t) \end{cases} \quad (5)$$

とする。ここで T_1 は機械系のスティフネス, T_2 は単位切削剛性係数に関する切削過程のスティフネスに相当する線形写像である⁷⁾⁸⁾。式 (4) の写像 T_1 の逆写像 T_1^{-1} を

$$(T_1^{-1} f)(t) = x(t) \quad (6)$$

によって定義し, さらに T_1^{-1} , T_2 の合成写像 L_t を $L_t = T_1^{-1} T_2$, また $\lambda = 1/K$ として式 (5), (6) より

$$(L_t x)(t) = \lambda x(t), \quad \lambda > 0 \quad (7)$$

が導かれる。以上の関係を図示したものが図1である。いま振動系の安定限界を振動波形 $x(t)$ の最大振幅が正の有限な値をとる状態と定義する。一般にこの性質をもつ解は方程式 (7) の固有関数と呼ばれる。固有関数 $x(t)$ の周期を $2\pi/\omega$ と仮定すれば $x(t)$ は $\omega > 0$ するとき $L_2[-\pi/\omega, \pi/\omega]$ に属し*, 境界条件 $x(-\pi/\omega) = x(\pi/\omega)$ をみたす。一般にこの条件をみたす関数の集合は可分なヒルベルト空間 D_ω をなすから, 問題は方程式 (7) の最大実数固有値 (すなわち最小の実数値 K_0) およびそれに属する固有関数を相当するヒルベルト空間 D_ω で求めることに帰着される。ただし固有関数の未知周期 $2\pi/\omega$ は主

軸回転数変動の周期 $2\pi/\omega_0$ の整数倍になるはずであるから, 変数 ω のとり得る値は $\omega = \omega_0/m$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) である。

2.3 作用素の行列表現

解 $x(t)$ の周期を $2\pi/\omega$ とする。いま $D_\omega \ni g$ とし, g の D_ω におけるフーリエ級数展開を

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \xi_k \exp(\sqrt{-1} k \omega t) \quad (8)$$

とすれば, 式 (8) の展開係数 ξ_k を要素とする数ベクトル (ξ_k) の張る空間 D_ω' は D_ω と同型である。したがって関数空間 D_ω における作用素 L_t は具体的な数ベクトル空間 D_ω' での線形変換として行列により表現される。2.2 節の議論にそって L_t の行列表現 $L_t = (h_{n,m})$ をもとめれば

$$\begin{aligned} h_{n,m} = & (\omega/2\pi) \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} [\exp(\sqrt{-1} m \omega(t - \varphi(t))) \\ & - \exp(\sqrt{-1} m \omega t)] \exp(-\sqrt{-1} n \omega t) dt \\ & / [-(n\omega)^2 + 2\zeta_n \omega_n(n\omega) \sqrt{-1} + \omega_n^2] \end{aligned} \quad (9)$$

が得られる⁹⁾。

2.4 作用素のスペクトル分解による解の探索

作用素 L_t およびその共役作用素 L_t^* はともにヒルベルト空間 D_ω' の上で定義され

$$L_t(1) = (L_t + L_t^*)/2, \quad L_t(2) = (L_t - L_t^*)/2\sqrt{-1} \quad (10)$$

とすれば $L_t(1)^* = L_t(1)$, $L_t(2)^* = L_t(2)$ より $L_t(1)$, $L_t(2)$ はともにヒルベルト空間 D_ω' での完全連続な自己共役作用素となる。そこで $L_t(1)$, $L_t(2)$ はスペクトル分解

$$L_t(1) = \sum_j \lambda_{1j} P_{1j}, \quad L_t(2) = \sum_j \lambda_{2j} P_{2j}$$

をもつ。ただし λ_{1j} , λ_{2j} はそれぞれ $L_t(1)$, $L_t(2)$ の j 番目の固有値 (実数) であり, P_{1j} , P_{2j} は λ_{1j} , λ_{2j} に属する固有空間への射影作用素である。さらに

$$L_t = L_t(1) + \sqrt{-1} \cdot L_t(2)$$

なる関係が成立するから, 式 (7) は

$$L_t x = \sum_j (\lambda_{1j} P_{1j} + \sqrt{-1} \lambda_{2j} P_{2j}) x = \lambda x \quad (11)$$

となる。式 (11) から, 作用素 L_t の実数固有値 λ は, $\lambda_{2j} = 0$ に対応する λ_{1j} であることがわかる。振動系の安定限界 K_0 はこの λ_{1j} のなかで最大のもの λ_{1n} の逆数 $K_0 = 1/\lambda_{1n}$ によってあたえられる。ただしヒルベルト空間 D_ω' は自己共役 ($D_\omega'^* = D_\omega'$) かつ $\lambda_{1j}^* = \lambda_{1j}$, $\lambda_{2j}^* = \lambda_{2j}$ であるから, 上の条件をみたす λ_{1j} は, λ_{1n} および $\lambda_{1n}^* (= \lambda_{1n})$ の対になって存在する。したがって振動系の安定限界における振動波形 $x(t)$ は c_1, c_2 を複素定数として

$$\begin{aligned} x(t) = & c_1 e_{1n}(t) + c_1^* e_{1n}^*(t) + c_2 e_{2n}(t) + c_2^* e_{2n}^*(t) \\ = & 2R_e[c_1 e_{1n}(t)] + 2R_e[c_2 e_{2n}(t)] \end{aligned} \quad (12)$$

* 区間 $[a, b]$ でルベグの意味で2乗可積分, すなわち $\int_a^b |x(t)|^2 dt < \infty$ なる関数 $x(t)$ の全体を記号 $L_2[a, b]$ で表す。本論文では積分がとくにルベグの意味である必要はない。

であたえられる。ただし $e_{1n}(t)$, $e_{2n}(t)$ はそれぞれ固有値 λ_{1n} , λ_{2n} に属する関数空間 D_ω での固有関数である。

2.5 外乱の工具-被削材間相対変位への影響

図 1 において, 外乱 $n(t)$ と工具-被削材間の相対変位 $x'(t) = x(t) + n(t)$ との関係を検討する。ただし振動系の安定限界 $K_0 (= 1/\lambda_{1n})$ および安定限界における振動波形 $x(t)$ は既知であり, 振動波形 $x(t)$ は有限の周期 $2\pi/\omega$ をもつものとする。また外乱 $n(t)$ は平均値 0, 分散 σ^2 の無限帯域白色雑音とする。いま外乱 $n(t)$ に対し, その $-\pi/\omega \leq t \leq \pi/\omega$ の部分を切り取ったものを $n_\omega(t)$ とすれば, $n_\omega(t)$ はヒルベルト空間 D_ω に属する*。そこで振動系の方程式の D_ω での表現は図 1 から

$$(\lambda I - L_t)x = L_t n_\omega \quad (13)$$

となる。いま L_t のグリーン作用素 $L_t(\lambda) = (\lambda I - L_t)^{-1}$ を式 (13) の両辺に左からかけ, さらに $L_t(\lambda)$ のスペクトル分解を用いれば,

$$x = \sum_j \frac{P_j}{\lambda - \sigma_j} L_t n_\omega = \sum_j \frac{\lambda_j}{\lambda - \lambda_j} P_j n_\omega \quad (14)$$

を得る。ただし λ_j は L_t の j 番目の固有値, P_j は λ_j に属する固有空間への射影作用素である。そこで工具-被削材間の相対変位 $x(t) + n_\omega(t)$ は

$$\begin{aligned} (x + n_\omega)(t) &= \sum_j \frac{\lambda_j}{\lambda - \lambda_j} (P_j n_\omega)(t) + \sum_j (P_j n_\omega)(t) \\ &= \sum_j \frac{1}{1 - (\lambda_j/\lambda)} \cdot (P_j n_\omega)(t) \end{aligned} \quad (15)$$

となる。ここで外乱 $n_\omega(t)$ のフーリエ展開係数 $\{c_m\}$ は平均値 0, 分散 σ^2 なる正規分布をなす¹⁰⁾。そこで展開係数 $\{c_m\}$ の大きさの確率的な意味での最大値を $|c_m| = |c| = 2\sigma(\text{Prob}[|c_m| > 2\sigma] = 0.046)$ として (15) 式に代入し, 式 (15) 右辺における主要項, すなわち振動系の安定限界 $K_0 (= 1/\lambda_{1n})$ に属する固有空間への射影成分の項 ($P_1 n_\omega(t)$) のみを考えることにすれば,

$$(x + n_\omega)(t) \doteq \frac{1}{1 - (\lambda_{1n}/\lambda)} P_1 \left[2R_c \left[c \sum_{m=1}^{\infty} \exp(\sqrt{-1} mot) \right] \right] \quad (16)$$

式 (16) から, 不規則波形 $x(t) + n_\omega(t)$ の最大振幅は, 例えば係数 c を純虚数にとって $c = 2\sigma\sqrt{-1}$ とすれば

$$\begin{aligned} |(x + n_\omega)(t)|_{\max} &\doteq (4\sigma) \left[\frac{1}{1 - (K/K_0)} \right] |P_1 \sum_{m=1}^{\infty} \sin(mot)|_{\max} \end{aligned} \quad (17)$$

となる。式 (17) から, 工具-被削材間の相対変位の最大振幅を決定するものは, 不規則外乱 $n_\omega(t)$ の最大振幅 4σ

(σ はいわゆるノイズの実効値である), あたえられた切削剛性係数 K の, びびり限界における切削剛性係数 K_0 に対する比 K/K_0 , および基準外乱 $[\sum_m \sin(mot)]$ から生成されるびびり振動波形の最大振幅 $|P_1 \sum_m \sin(mot)|_{\max}$ であることがわかる。これから逆に振幅 $|x + n_\omega|$ の外乱拡大率に対する制限 $|x + n_\omega|/(4\sigma) \leq \mu_0$ をみたす切削剛性係数 K は, 式 (17) を K について解いて

$$K \leq K_0 \left[1 - \frac{1}{\mu_0} |x_n(t)|_{\max} \right], \quad 0 \leq K \leq K_0 \quad (18)$$

となる。ただし $x_n(t) = P_1 \sum_m \sin(mot)$ である。

2.6 摂動法による解法

前節までの解析にもとづいて固有値問題, 式 (7) の近似解を $L'_\omega = D'_\omega$ と仮定して具体的にもとめる。いま式 (10) によって定義される作用素 $L_{t(1)}$, $L_{t(2)}$ の数ベクトル空間 D'_ω の上の表現を次のように分解する。

$$L_{t(1)} = L_{t(1)}^0 + L'_{t(1)}, \quad L_{t(2)} = L_{t(2)}^0 + L'_{t(2)} \quad (19)$$

ただし $L_{t(1)}^0$ は $L_{t(1)}$ の対角要素以外をすべて 0 としたもので, 逆に $L'_{t(1)}$ は $L_{t(1)}$ の対角要素を 0 としたもので, $L_{t(2)}$ に関しても同様である。いま主軸回転数変動の幅が平均主軸回転数に比較して相対的に小さければ, $L'_{t(1)}$, $L'_{t(2)}$ をそれぞれ $L_{t(1)}^0$, $L_{t(2)}^0$ に対する摂動作用素とみなすことができる。ところで摂動論⁷⁾⁸⁾ によれば, 無摂動作用素 $L_{t(1)}^0$, $L_{t(2)}^0$ の j 番目の固有値を λ_{1j}^0 , λ_{2j}^0 , 固有ベクトルを e_{1j}^0 , e_{2j}^0 とすれば, 求める作用素 $L_{t(1)}$, $L_{t(2)}$ の対応する固有値 λ_{1j} , λ_{2j} および固有ベクトル e_{1j} , e_{2j} の第一近似は次の式であたえられる。

$$\lambda_{1j} = \lambda_{1j}^0 + p_{i,j}, \quad \lambda_{2j} = \lambda_{2j}^0 + q_{i,j} \quad (20)$$

$$e_{1j} = e_{1j}^0 + \sum_{i \neq j} \frac{p_{i,j}}{\lambda_{1j}^0 - \lambda_{1i}^0} e_{1i}^0, \quad e_{2j} = e_{2j}^0 + \sum_{i \neq j} \frac{q_{i,j}}{\lambda_{2j}^0 - \lambda_{2i}^0} e_{2i}^0 \quad (21)$$

ただし $p_{i,j}$, $q_{i,j}$ はそれぞれ行列 $L'_{t(1)}$, $L'_{t(2)}$ の (i, j) 成分である。したがって振動系の安定限界の第一近似は, 行列 $L_{t(2)}$ の対角要素 $\lambda_{2j}^0 = 0$ に対応する行列 $L_{t(1)}$ の対角要素 λ_{1j}^0 のなかで値の最大のものを $\lambda_{1n}^0 = \max_j [\lambda_{1j}^0]$ の逆数となる。また安定限界における振動波形 $x(t)$ は式 (21) における無摂動固有ベクトル e_{1j}^0 , $e_{2j}^0 \in D'_\omega$ の対応する D_ω での関数表現が $\cos(j\omega t)$ および $\sin(j\omega t)$ であること, および式 (12) から

$$\begin{aligned} x(t) &= 2R_c \left[c_1 \left\{ \cos(n\omega t) + \sum_{i \neq n} \frac{p_{i,n}}{\lambda_{1n}^0 - \lambda_{1i}^0} \cos(i\omega t) \right\} \right] \\ &\quad + 2R_c \left[c_2 \left\{ \sin(n\omega t) + \sum_{i \neq n} \frac{q_{i,n}}{\lambda_{2n}^0 - \lambda_{2i}^0} \sin(i\omega t) \right\} \right] \end{aligned}$$

* $\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} |n_\omega(t)|^2 dt = (2\pi/\omega) E[n_\omega^2(t)] = (2\pi/\omega) \sigma^2 < \infty$,
 $E\left[n_\omega\left(-\frac{\pi}{\omega}\right)\right] = E\left[n_\omega\left(\frac{\pi}{\omega}\right)\right]$ という意味である。ただし $E[\cdot]$ は期待値を表す。

機械系固有振動数: 263 Hz, 機械系減衰係数: 0.01, 平均主軸回転数: 600 rpm, 回転数変動幅: 100 rpm, 回転数変動周波数: 0.1 Hz (周期 10 秒)

図 2 振動波形の実測結果と理論計算結果との比較

$$\begin{aligned}
 &= 2R_e(c_1) \left[\cos(n\omega t) + \sum_{i \neq n} \frac{R_e(p_{i,n})}{\lambda_{1n}^0 - \lambda_{1i}^0} \cos(i\omega t) \right] \\
 &\quad - 2I_m(c_1) \left[\sum_{i > 0} \frac{I_m(p_{i,n})}{\lambda_{1n}^0 - \lambda_{1i}^0} \cos(i\omega t) \right] \\
 &\quad + 2R_e(c_2) \left[\sin(n\omega t) + \sum_{i \neq n} \frac{R_e(q_{i,n})}{\lambda_{2n}^0 - \lambda_{2i}^0} \sin(i\omega t) \right] \\
 &\quad - 2I_m(c_2) \left[\sum_{i > 0} \frac{I_m(q_{i,n})}{\lambda_{2n}^0 - \lambda_{2i}^0} \sin(i\omega t) \right] \quad (22)
 \end{aligned}$$

となる。式 (22) は 4 個の任意定数 $R_e(c_1)$, $I_m(c_1)$, $R_e(c_2)$, $I_m(c_2)$ を含んでいるが、実際に独立な定数は 3 個しかない。それは式 (12) における解 $x(t)$ のノルムに対する条件

$$\left. \begin{aligned} 2(|c_1|^2 + |c_2|^2) &= E^2 \\ E: \text{あたえられた } x(t) \text{ のノルム} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

から必然的に c_1 , c_2 の複素平面上での直交条件

$$R_e(c_1)R_e(c_2) + I_m(c_1)I_m(c_2) = 0 \quad (24)$$

が導かれるからである。一方この任意定数を微分方程式 (1), (2) の立場から考えると、式 (1), (2) の解を一意に決定するためには $x(t) \equiv 0$ ($t < t_0$) を条件として、 $x(t_0)$, $\dot{x}(t_0)$ および $t - \varphi(t) = t_0$ なる $t = t'$ における主軸回転数変動の関数 $\varphi(t')$ の位相 δ の 3 種類の初期値を決定しなければならない。式 (22) が 3 個の独立な任意定数を含んでいるのはこの事実に対応する。

3. 解析結果の検討

3.1 振動波形の実測例と計算結果との比較

構造用炭素鋼 (S 45 C) の近似二次元切削における主軸回転数変動時の振動波形の実測例を図 2 左側 (a), (b) に示す⁹⁾。実験に使用した旋盤は交流モータにカップリングによる可変速装置をとりつけたもので、SCR スピード

図 3 切削系の安定限界と主軸回転数変動の周波数との関係 (機械系の動特性は図 2 と同一)

コントローラを介して無段変速が可能である。主軸回転数の変動指令は発振器の出力をコントローラに入力する方式をとった。同図は固有振動数 263 Hz, 減衰係数 0.01 の機械系に対し、切込み 0.4 mm, 送り 0.04 mm/rev, 平均主軸回転数 600 rpm, 回転数変動幅 100 rpm, 回転数変動周波数 0.1 Hz (周期 10 秒) としたときの心押し台における変位信号である。図に見られるように、同一の切削条件でも主軸回転数変動の周期の 1/2 の周期 5 秒で比較的小さい振幅変化を繰返すなり波形の場合 (a) と、回転数変動の周期と同期した大きな振幅の変化を示すなり波形の場合 (b) とがある。

一方、理論解析における式 (22) で、 $R_e(c_1) = I_m(c_1) = 0$, $R_e(c_1) = 1/2$, $I_m(c_1) = 0$ として解 $x(t)$ の振幅変化を数値計算した例を図 2 (c) に、 $R_e(c_1) = I_m(c_1) = 0$, $R_e(c_2) = 0$, $I_m(c_2) = 1/2$ とした同様の例を図 2 (d) に示す。図からわかるように、(a) と (c), (b) と (d) は両タイプの振幅比も含めて極めてよく対応している。また振動波形のタイプを決定する因子は、2.6 節に述べた主軸回転数変動の波形 $\varphi(t)$ の位相 δ であることも理論的に導かれる。

3.2 主軸回転数変動の周波数と振動系の安定限界および振動振幅との関係

機械系の固有振動数を 263 Hz, 減衰係数 0.01, 平均主軸回転数 600 rpm, 回転数変動幅 100 rpm としたときの振動系の安定限界と回転数変動の周波数との関係を図 3 に示す。図からわかるように、2.2 節で定義した振動系の安定限界は回転数変動の周波数に依存せず一定であり、 $\omega_0 = 0$ のところで不連続になっている。また図の場合、安定限界は一定主軸回転数 ($\omega_0 = 0$) の場合の約 5 倍であるが、一般に安定限界は主軸回転数を変動させることにより常に向上することが知られている⁹⁾。

◀ 図4
切削系の安定限界における振動
波形の最大振幅と主軸回転数変
動の周波数との関係（機械系の
動特性は図2と同一）

切削系の安定限界と主軸回転数
変動幅との関係（機械系の動特
性は図2と同一）

次に図3の安定限界における振動波形の最大振幅と主軸回転数変動の周波数との関係を図2と同様に(c), (d)両タイプについて図4に示す。但し式(2)の計算に用いた条件は図2および3と同一である。図から(c), (d)の両タイプの波形ともに、回転数変動の周波数が低下するにつれて波形の平均パワー（式(3)のノルム E の2乗値で、振動系に与えた初期条件によって定まる）は一定であるにもかかわらず、急激に最大振幅が増加していくようすがわかる。また $\omega_0=0$ （一定回転数）では最大振幅が無限大となり、2.2節の定義によれば振動系が不安定であることになるが、これは図3における $\omega_0 \neq 0$ での安定限界が $\omega_0=0$ に対しては不安定であることに対応する。

3.3 主軸回転数変動幅と振動系の安定限界 および振動振幅との関係

主軸回転数変動幅と振動系の安定限界との関係を図5に示す。但し平均主軸回転数 600 rpm, 回転数変動の周波数 0.1 Hz, 他の条件は図2, 3と同様である。図から、振動系の安定限界は主軸回転数の変動幅が増加するにつれてしだいに上昇していくことがわかる。

次に回転数変動幅と、図2(c)タイプの波形の最大振幅との関係を平均パワー一定として式(2)をもとに数値計算し図6に示す。計算条件は図5と同一である。図のように、回転数変動幅が増加していくと、最大振幅は波状的に変化し、全体としてはしだいに増加する傾向のあることがわかる。

3.4 主軸回転数変動の周波数 および変動幅と振動系の外乱拡大率との関係

定められた外乱拡大率 μ_0 に対応する 限界切削剛性係数 K と主軸回転数変動の周波数との関係を実験結果とともに図7に示す。図中の●, ○, ○は切削実験中に心押

図5▶

図6 切削系の安定限界における振動振幅の最大値と主軸回転数変動幅との関係（機械系の動特性は図2と同一）

図7 外乱を含む切削系の工具-被削材間相対変位と主軸回転数変動の周波数との関係（機械系の動特性は図2と同一）

し台で検出された最大振動振幅を表す。○は振幅 10 μm 以下, ●は 10~20 μm , ●は 20 μm 以上に対応する。実験および解析に用いた条件は図3, 4と同一である。また切削実験中に機械系を加振して人為的に外乱をあたえ

図8 外乱を含む切削系の工具-被削材間相対変位と主軸回転数変動幅との関係(機械系の動特性は図2と同一)

ることはしていない。一方、解析結果は、許容外乱拡大率 $\mu_0=30$ として、すでに求められた振動系の安定限界 K_0 と安定限界における(c)タイプの振動波形 $x(t)$ とを式(18)に代入して求めた。但し図では定回転数での安定限界を切込み 1.5 mm とし、この値によって得られた許容限界値 K を切込みに換算してある。図から、実験結果と解析結果とがこの場合良く対応すること、また実験に使用した切削系が本来 $0.5 \mu\text{m}$ 程度の外乱を含んでいることがわかる。但し図で注意しなければならないのは、主軸回転数変動の周波数が低下していくと、一定主軸回転数になる手前で一旦許容限界切込みが 0 になる点である。これは図4からわかるように、この附近での振動振幅 $|x(t)|$ がきわめて大きいため、式(19)において $1 < |x|_{\max}/\mu_0$ になってしまうからである。一般に切削系には必ず外乱が混入するから、変動周波数がきわめて低い場合には主軸回転数を変動させることによって逆効果を招くことがこの結果からわかる。しかし回転数変動の周波数を高くしていけば、外乱の存在する切削系についても定回転数の場合に比較して振動抑止効果がしだいに顕著になることは図に示すとおりである。

同様に外乱拡大率 $\mu_0=30$ に対応する限界切込みと主軸回転数変動幅との関係を図8に示す。計算および実験に用いた条件は図5,6と同一である。この図についても実験結果と解析結果との一致は良好である。また外乱が存在する場合の振動抑制効果は、回転数変動幅を増すにつれてしだいに現れてくることがわかる。

4. 結 論

本研究では、主軸回転数が周期的に変動する場合の切削系の安定解析を関数解析的な立場から行い、以下の結論を得た。

(1) 主軸回転数変動下の切削系の安定解析理論とし

て、関数解析の手法は有力な武器である。解析によれば、切削系の安定限界は回転数変動幅が大なるほど上昇するが、回転数変動の周波数には無関係である。

(2) 切削系の安定限界における振動波形には二つのタイプがある。両タイプの波形ともに主軸回転数変動の周波数が低下すると急激に振幅が増大する。また回転数変動幅の増加に対して振動振幅は波状的な変化を示し、全体としてはしだいに増加する傾向がある。

(3) 切削系に外乱が存在する場合、工具-被削材間相対変位の最大振幅を決定する因子は、外乱の実効値、あたえられた切削幅(切込み量)のびびり限界切削幅(切込み量)に対する比および切削系の安定限界における振動波形の最大振幅の3種類である。

(4) 外乱の存在する一般の切削系に対して、系の外乱拡大率を所要の値以下に抑える切削幅(切込み量)を以上の諸結果から求めることができる。解析によれば、このような切削幅(切込み量)は回転数変動幅が大なるほど、また変動周波数が高いほど増加する。実験結果はこの事実ときわめて良く対応する。

参 考 文 献

- 1) H.E. Merritt: Theory of Self-excited Machine Tool Chatter, Trans. ASME, J. Engg. Ind., Ser. B, 87, 4, (1965) 447.
- 2) R. Bell and A. De Pennington: The Design of Active Damping for Electrohydraulic Cylinder Feed Drives, Proc. 9th Int. MTD R Conf., (1968) 1309.
- 3) 竹村 正ほか: フィードバック補償による工作機械のびびり振動防止, 昭和47年度精機学会 春季大会学術講演会前刷(1972) 241.
- 4) 森脇俊道: 切削力の直接補償によるびびり振動の防止, 昭和47年度 精機学会春季大会 学術講演会前刷(1972) 61.
- 5) T.R. Comstock, F.S. Tse and J.R. Lemon: Application of Controlled Mechanical Impedance for Reducing Machine Tool Vibrations, Trans. ASME, B, (1969) 1057.
- 6) Th. Stöferle u. H. Grab: Vermeiden von Ratterschwingungen, Werkstatt u. Betrieb, 105, 10, (1972) 727.
- 7) 堀 淳一: 物理数学 1, 共立出版(1969).
- 8) 宮武 修, 加藤祐輔: 固有値問題, 槇書店(1971).
- 9) T. Inamura and T. Sata: Stability Analysis of Cutting under Varying Spindle Speed, J. Fac. Engg. Univ. Tokyo (B), XXXIII, I, (1975) 13.
- 10) 宮川 洋, 佐藤拓実, 茅 陽一: 不規則信号論と動特性推定, コロナ社(1969).
- 11) 竹村 正ほか: 主軸回転速度変動によるびびり振動の防止, 精密機械, 41, 5 (1975) 489.