工作機械の振動特性に関する最適設計*

——再生型自励びりの最適化を支配する因子の解析——

吉 村 允 孝**

Optimum Structural Design with respect to Dynamic Characteristics of Machine Tools

——Parameters for Optimization of Regenerative Chatter——

Masataka YOSHIMURA

The parameters were analyzed which decided the optimization on designing the machine tools having the minimum chance of regenerative chatter by means of the computer program system. These parameters are the modal flexibility and the logarithmic decrement, and their influences on dynamic characteristics are completely different. The macroscopic analysis is needed to carry out the optimization. First of all, the ratio of the modal flexibilities to the static compliance at the cutting point should be analyzed, which indicates the balance of the receptances among all resonance modes, in order to detect the resonance modes having the possibility of the regenerative chatter, and these values should be optimized. After it is understood that the values of the modal flexibilities and the ratios to the static compliance are reasonable, the optimization with respect to the damping characteristics should be carried out. The instability of the regenerative chatter is judged, to be exact, by the maximum real negative part of the compliance on the vector loci. Therefore, the parameters to move vector loci along the real axis on the polar coordinate were investigated. It was denoted that the distribution of the modal flexibility through all frequency range was very important.

1. 緒 言

工作機械構造物の振動特性を解析するために、種々の電子計算機プログラムが開発¹⁾されているが、このようなプログラムを使って振動特性の改善および最適化設計を行うには、単に数理的な手法を適用するのではなく、問題とする特性を解析し、その上でどのようなパラメータに着目し、そしてどのような順序で最適化設計を進めるべきかの考察が重要である。本研究は切削加工における重切削能力の限界となる再生型自励びりに関して、重切削能力を最大ならしめるための機械構造上の動力学的なパラメータを解析し、よりびびりを生じにくい工作機械を設計することに関する最適化設計を実行する場合の理論的な根拠を与えることを目的とする。まず、再生型自励びりに関する最適化設計を行う上での基本的な概念を述べ、それに基づいて最適化設計を支配するパラメータの解析を行う。最初に基本となるパラメータを解析し、次にさらに厳密なパラメータとして周波数応答のベクトル軌跡を複素座標平面の実軸上を移動させる因子の解析を行う。

表1に本論文で使用する重要な記号を示す。

2. 再生型自励びりに関する最適化設計の基本概念

図1は、工作機械の機能を概念的に表したモデルを示している。A点が工具側の切削点、B点が工作物側の切削点であり、AB間に切削力方向に作用する変動力に対するAB間の切削面に垂直な方向の相対変位のリセプタンスの周波数応答が、たとえば図2のように得られたとする。ここで横軸が振動数、縦軸がリセプタンスを表している。いま、このうちのある m 次のモードに着目し、その周波数応答を極座標上のベクトル線図に表したのが図3である。再生型自励びりの安定限界は、リセプタ

表1 記 号

$(f_{s,c})_m, f_m$:	切削点での m 次モードのモーダルフレキシビリティ
$(f_{s,c})_{st}$:	切削点での静的コンプライアンス
ω_m :	m 次モードの固有角振動数
δ_{Am} :	m 次モードのシステム全体の対数減衰率
ζ_j :	j 次モードの減衰比
V_{Am} :	m 次モードのシステム全体の復元エネルギーの最大値
D_{Am} :	m 次モードのシステム全体の1サイクル当たりの減衰エネルギー

* 原稿受付 昭和50年11月21日。昭和50年度精機学会春季大会学術講演会(昭和50年4月4日)にて発表。

** 正 会 員 京都大学工学部(京都市左京区吉田本町)

図1 工作機械の機能を概念的に示したモデル

図2 AB間の周波数応答の仮想例

図3 m 次固有モードにおけるリセプタンス周波数応答のベクトル表示

ンスをベクトル表示した場合の最大負実部の大きさ P_m の最大のもので決定される²⁾。一般に機械構造物は無限自由度系であり、従って無限の数の固有振動数をもっている。よってそれらがすべて再生型自励びびりに関与する可能性をもっている。いま問題とする m 次モードの P_m が、それら無限にあるモード中最大であったとすると、 m 次モードの共振周波数付近で再生型自励びびりが生ずる。そこで P_m を何らかの方法で小さくした場合、それ以外のいずれかのモードにおける最大負実部が m 次モードに代わって最大となり、再生型自励びびりはそのモードの共振周波数付近で生ずることになる。

各固有モードにおいて振動系を構成する要素としては、機械構造内のすべての要素を考えなければならない。ゆえに、再生型自励びびりに関する最適化を行うに、

- (I) ある要素だけに着目するのではなく、振動系を構成するシステム全体を見わたした解析
- (II) すべての振動数範囲、すなわちすべての固有モードを考慮した解析

の2点が解析を進める上での基本となる。

また一方、最適化のための基本的な流れとしては、

- (III) マクロな視点より出発し、次第によりミクロな視点へ向かう最適化の進行

が必要であり、この手順に従えば、システム全体の最適化を真に得ることができる。次節においては上記の(I), (II), (III)を基として、最適化に際して考慮すべきパラメータについて解析する。

3. 最適化設計を支配するパラメータの解析

以上の概念にのっとり再生型自励びびりに関する最適化設計を行うには、まず問題とする振動特性としての物理的な現象を解析し、それより着目すべきパラメータとその性質を明らかにする必要がある。以下に最適化設計

を支配するパラメータの解析を行う。

3.1 基本となるパラメータの解析

図2に示す周波数応答において、ある m 次のモードに着目する。この m 次モード付近のリセプタンス $(X_c/F_e)_m$ は、他の固有モード次数の影響を無視すれば、式(1)のように定まる³⁾。

$$\left(\frac{X_c}{F_e}\right)_m = \pi \sin \beta \frac{X_{em} X_{cm}}{D_{Am}} = \pi \sin \beta \frac{(f_{e,c})_m}{\delta_{Am}} \quad (1)$$

ここで、 β は切削点での相対加振力 F_{em} と相対変位 X_{cm} の間の位相差、 X_{em} は切削力方向の相対変位、 X_{cm} は切削面に垂直方向の相対変位、そして D_{Am} はその変位状態でのシステム全体が1サイクル当たり消散する減衰エネルギーである。この $X_{em} X_{cm} / D_{Am}$ は、さらに式(1)の右式に示すようにモーダルフレキシビリティ $(f_{e,c})_m$ と対数減衰率 δ_{Am} の二つのパラメータによって表すことができる。ここにモーダルフレキシビリティ $(f_{e,c})_m$ の定義は次のようである。

$$(f_{e,c})_m = \frac{X_{em} X_{cm}}{2V_{Am}} \quad (2)$$

V_{Am} は同じ変位状態でのシステム全体のもつ最大復元エネルギーである。この二つのパラメータが振動特性上物理的にどのような性質をもっているかを考察し、さらにリセプタンスの値がこの二つのパラメータにより決定される様子を示す。

a) モーダルフレキシビリティ

このモーダルフレキシビリティの値は、機械構造の骨組、質量と剛性の3次元空間での分布、および切削力と切削面に垂直な方向による各固有モードに関する方向係数によって変化する一つの設計変数で、設計図面の段階でほぼ決定できるものであり、一度設計が決まると機械の製造後には本質的な修正はほとんどできないと考えられる。また、この値は減衰を考慮しなくても近似的に求めることができる。さらに式(2)のモーダルフレキシビ

リティ $(f_{e,c})_m$ には、次の式 (3) と式 (4) に示す重要な関係が成り立つ。

$$(f_{e,c})_{st} = \sum_{m=1}^{\infty} (f_{e,c})_m \quad (3)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} (f_{e,c})_m / (f_{e,c})_{st} = 1.0 \quad (4)$$

すなわち、各次のモーダルフレキシビリティ $(f_{e,c})_m$ をすべて足し合わせると静的コンプライアンス $(f_{e,c})_{st}$ に一致し、各次の $(f_{e,c})_m / (f_{e,c})_{st}$ の値は、共振モード間のモーダルフレキシビリティの大小のバランスを示している。このモーダルフレキシビリティ $(f_{e,c})_m$ は以後 f_m と表す。

ここで、このモーダルフレキシビリティの静コンプライアンスに対する関係が一般の振動システムにおいて成り立つことを証明する。一般に機械システムは無数の自由度をもつが、まず簡単のためにある機械システムが N 自由度をもっているとする。このとき N 自由度システムは N 個の座標によって表現できるため、この N 個の座標の変位ベクトルを $\{X\}$ とする。そしてその座標での外力のベクトルを $\{F\}$ とし、このシステムの質量マトリクスを $[M]$ 、剛性マトリクスを $[K]$ 、そして減衰マトリクスを $[C]$ とすると、この振動システムに振動数 ω の正弦波外力 $\{F\}e^{i\omega t}$ が加わったときの運動方程式は、

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{F\}e^{i\omega t} \quad (5)$$

と表せる。この式 (5) の $\{X\}$ に $\{X\}e^{i\omega t}$ を代入すれば、

$$-\omega^2[M]\{X\} + i\omega[C]\{X\} + [K]\{X\} = \{F\} \quad (6)$$

であり、この式 (6) を満足する任意の変位ベクトル $\{X\}$ は、各次の 1 次独立な固有モードの固有変位ベクトル $\{X_m\}$ の 1 次結合で表されることより、 b_m を係数として次のように書ける。

$$\{X\} = \sum_{m=1}^N b_m \{X_m\} \quad (7)$$

また各固有モードの自由振動の関係より式 (6) の $\{X\}$ に $\{X_m\}$ を代入して

$$-\omega_m^2[M]\{X_m\} + i\omega_m[C]\{X_m\} + [K]\{X_m\} = 0 \quad (8)$$

が得られる。そこで式 (7) を式 (6) に代入し、次の式 (9) とする。

$$\sum_{m=1}^N [b_m(-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K])\{X_m\}] = \{F\} \quad (9)$$

この式 (9) の各項に $\{X_m\}^t$ なる転置ベクトルをかける。そのとき、次の式 (10) に示す減衰を含む振動システムについては近似的に（正確には、比例減衰の場合に）成り立つ直交関係と式 (11) の各固有モードにおけるエネルギーの関係を用いると、係数 b_m が式 (12) のように求まる。

$$\begin{cases} \{X_m\}^t[K]\{X_n\} = 0 \\ \{X_m\}^t[M]\{X_n\} = 0 \\ \{X_m\}^t[C]\{X_n\} = 0 \end{cases} \quad m \neq n \quad (10)$$

ここで $\{X_m\}^t[C]\{X_n\} = 0$ は $\{X_m\}^t[K]\{X_n\} = 0$ 、 $\{X_m\}^t[M]\{X_n\} = 0$ と式 (8) の関係より得られる。

$$\frac{1}{2}\omega_m^2\{X_m\}^t[M]\{X_m\} = \frac{1}{2}\{X_m\}^t[K]\{X_m\} \quad (11)$$

$$b_m = \frac{\{X_m\}^t\{F\}}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2\right]\{X_m\}^t[K]\{X_m\} + i\omega\{X_m\}^t[C]\{X_m\}} \quad (12)$$

ここで、 m 次モードの復元エネルギー V_{Am} と 1 サイクル当たりの減衰エネルギー D_{Am} は

$$\{X_m\}^t[K]\{X_m\} = 2V_{Am} \quad (13)$$

$$\pi\omega_m\{X_m\}^t[C]\{X_m\} = D_{Am} \quad (14)$$

と求まる。また減衰比 ζ_m は $\zeta_m = D_{Am}/(4\pi V_{Am})$ で表される。さらに、いまこの振動システムにおいて一つの座標 i で加振する場合を考え、式 (12) の $\{F\}$ ベクトルのうちその座標 i での力を F_e 、そして $\{X_m\}^t$ ベクトルのうちその座標 i の変位を X_{em} とすると、式 (12) は以上の置換えを行って

$$b_m = \frac{X_{em}F_e/(2V_{Am})}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2\right] + 2i\frac{\omega}{\omega_m}\zeta_m} \quad (15)$$

となる。この式 (15) を式 (7) に代入すれば任意ベクトル $\{X\}$ は、

$$\{X\} = \sum_{m=1}^N \frac{[X_{em}F_e/(2V_{Am})]\{X_m\}}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2\right] + 2i\frac{\omega}{\omega_m}\zeta_m} \quad (16)$$

として求まる。次に一つの座標 j の変位を測定する場合を考え、 $\{X\}$ ベクトルのうちその座標の変位を X_c 、そして $\{X_m\}^t$ のうちその座標の変位を X_{cm} とすると、式 (16) は次の式 (17) のように書き換えられる。

$$\frac{X_c}{F_e} = \sum_{m=1}^N \frac{X_{em}X_{cm}/(2V_{Am})}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2\right] + 2i\frac{\omega}{\omega_m}\zeta_m} \quad (17)$$

この式 (17) の右辺の分子 $X_{em}X_{cm}/(2V_{Am})$ は、式 (2) のモーダルフレキシビリティの定義そのものであり、これを f_m と置き換えると

$$\frac{X_c}{F_e} = \sum_{m=1}^N \frac{f_m}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2\right] + 2i\frac{\omega}{\omega_m}\zeta_m} \quad (18)$$

これより、座標 i に振動数 ω の正弦波加振力 F_e で加振した場合の座標 j の変位 X_c の間のリセプタンス (X_c/F_e) は式 (18) で表せる。そしてこの式に $\omega=0$ を代入して、座

標 i での静的な外力 F_e に対する座標 j の変位 X_e の間の静的なコンプライアンス $(f_{e,c})_{st}$ は、次の式 (19) として定まる。

$$(f_{e,c})_{st} = \sum_{m=1}^N f_m \quad (19)$$

この式 (19) は N 自由度システムにおける各次のモーダルフレキシビリティと静的コンプライアンスの関係を示しているが、 N 自由度を無限自由度系に拡張すれば当然式 (3) の関係が成り立つ。

また式 (18) を無限自由度系に適用すれば、次の式 (20) となる。

$$\frac{X_e}{F_e} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 + 2i \frac{\omega}{\omega_m} \zeta_m} \quad (20)$$

式 (3) と式 (4) は、固有モード間の関係を示しており、これらの式に従えば、すべての共振モードを考慮するという再生型自励びりに対する最適化のための解析の基本 (II) を実行することができると考えられる。

b) 対数減衰率

一方、対数減衰率は減衰能を示す一つの表示法であり、一つの固有モードにおける正弦波加振状態で、機械システムにおける種々の減衰機構により消散される 1 周期当たりの減衰エネルギーの和に対する系全体の最大復元エネルギーの比として、次式で表せる。

$$\delta_{Am} = \frac{D_{Am}}{2V_{Am}} \quad (21)$$

減衰の発生機構を考えると、材料内部での変動応力の大きさおよび結合面に加わる力の大きさによって減衰能が異なり⁴⁾、機械システム全体としての対数減衰率も大きく変化すると考えられる。さらに、結合部における減衰等においては、機械の製作にともなう接触表面状態のばらつきが必然的に存在し、対数減衰率そのものの値はある変動範囲をもつ。また、モーダルフレキシビリティの場合は機械の製作後においては、大改造を行う以外はほとんど修正ができないが、対数減衰率の値は各結合部の締付力、予圧、または適当なダンパを付けることによって比較的容易に修正することが可能である。

いま、ある m 次の固有モードにおいて、 N 個のサブシステム（結合部も一つのサブシステムとみる）より構成されるシステム全体の対数減衰率 δ_{Am} は、

$$\delta_{Am} = \sum_{i=1}^N \delta_{im} \mu_{im} \quad (22)$$

として表せる。ここで、 δ_{im} は i 番目のサブシステムの対数減衰率で、そのサブシステムの 1 サイクル当たりの

減衰エネルギー D_{im} とそのサブシステムでのその変位状態における最大復元エネルギー V_{im} の比として次の式 (23) で表せ、システム全体について定義された対数減衰率に対比される値である。

$$\delta_{im} = \frac{D_{im}}{2V_{im}} \quad (23)$$

そして、 μ_{im} はシステム全体のもつ最大復元エネルギー V_{Am} とそのサブシステムでの最大復元エネルギー V_{im} の比として次の式 (24) で表される値である。

$$\mu_{im} = \frac{V_{im}}{V_{Am}} \quad (24)$$

そこで、この固有モードにおいて対数減衰率の最も大きいサブシステムを u とし、その値を δ_{um} 、対数減衰率の最も小さいサブシステムを l 、その値を δ_{lm} 、そしてサブシステム u と l を除くサブシステムに等価な対数減衰率を δ_{lm} 、その部分の最大復元エネルギーを V_{lm} とすると、式 (22) の関係より次式が成り立つ。

$$\delta_{lm} \frac{V_{lm}}{V_{Am}} + \delta_{lm} \frac{V_{lm}}{V_{Am}} + \delta_{um} \frac{V_{um}}{V_{Am}} = \delta_{Am} \quad (25)$$

ここで、

$$\delta_{lm} \leq \delta_{lm} \leq \delta_{um} \quad (26)$$

の関係と式 (25) より、次式を誘導することができる。

$$\begin{aligned} \delta_{lm} &< \delta_{lm} + \frac{V_{um}}{V_{Am}} (\delta_{um} - \delta_{lm}) \leq \delta_{Am} \\ &\leq \delta_{um} - \frac{V_{lm}}{V_{Am}} (\delta_{um} - \delta_{lm}) < \delta_{um} \end{aligned} \quad (27)$$

通常の機械構造においては、材料の内部減衰よりは結合部における減衰能の方がはるかに大きい⁵⁾。したがってサブシステム l は結合部をもたない部材自身であり、サブシステム u は高減衰能をもつ結合部等である。この式 (27) より、機械システム全体の対数減衰率の下限界は要素自身の下限界より大きく、上限界は要素での上限界よりは小さいことがわかる。すなわち、機械全体のシステムとしての対数減衰率の下限界と上限界の幅は、機械要素自身の幅よりは必ず小さいことがいえ、対数減衰率の値の存在範囲は限られたものである。

さらに、対数減衰率 ($\delta_{Am} \approx 2\pi\zeta_m$) は各固有モード自身に固有の値であって、式 (20) から洞察されるように、一般にはモーダルフレキシビリティとは異なり固有モード相互間の明確な関係をもたない。したがって最適化設計としてまずある固有モードの対数減衰率に着目すると、他の固有モード間の関連を考慮できず、さらにある特定の部材または要素の最適化ということになり、大局的な視点から最適化を始めるという基本概念に反することにな

図4 各次固有モードのリセプタンス決定の説明図

る。

c) リセプタンスの最大値

再生型自励びりの安定限界は、正確にはリセプタンスをベクトル軌跡上に表示した場合の最大負実部の大きさによって決定されるが、ベクトル軌跡が実軸上を大きく移動しないかぎり最大負実部の最も大きい固有モードとリセプタンスの最大値をもつ固有モードとは一致する。よってこの場合リセプタンスの最大値を設計変更により小さくすることは最大負実部を小さくすることに対応することになる。

図4は、各次の固有モードにおけるリセプタンスが、モーダルフレキシビリティ f_m と対数減衰率 δ_{Am} の二つのパラメータにより決定される様子を表している。縦軸の実線がモーダルフレキシビリティ、横軸の破線が対数減衰率の逆数で、これらが囲む長方形の面積が、各次のモードのリセプタンスの最大値（式(1)において $\beta = \pi/2$ としたときの値）を π で割った値に相当する。また、対数減衰率が実際の機械構造においてかなりのばらつきと変動をもつことを考えれば、それらには下限界と上限界を想定することができる。

そこで、工作機械の再生型自励びりを生じにくい設計という点での最適設計を行うには、図4の長方形の面積が最大となる固有モードにおいて、その面積が小さくなるように設計変更することである。つまり、その固有モードのモーダルフレキシビリティを小さくし、かつ対数減衰率を大きくすることに対応する。しかし最適設計の基本概念を実行するには、そのパラメータがもつ特性の上から、まずモーダルフレキシビリティに着目した最適化設計を行うことが必要である。これにより第1段

階としての最適化設計を行うことができる。それには、最も大きなモーダルフレキシビリティをもつ固有モードのそれを下げ、これを繰返して静コンプライアンスが多くの固有モードのモーダルフレキシビリティに均等に分配されるように設計変更することである。

3.2 ベクトル軌跡を正実部もしくは負実部方向へ移動させるパラメータの解析

工作機械の再生型自励びりの安定性は式(1)のリセプタンスの最大値の大小でほぼ見当がつくが、正確には周波数応答のベクトル軌跡の最大負実部の大きさによって決まる。よって他の固有モードの影響によりベクトル軌跡が複素座標平面の実軸上を移動する場合、その移動量は最大負実部の大きさの変化量に対応し、再生型自励びりの安定性に大きな影響を及ぼす。したがって、3.1節で述べた基本のパラメータを基に、このベクトル軌跡が実軸上を移動する場合の解析を行う必要がある。これによりさらに厳密な最適化設計のためのパラメータの評価ができる。なお、無限自由度をもつ構造物における各モード次数の周波数応答のベクトル軌跡が複素座標平面上を移動するとき、(イ)正または負実軸方向にのみ移動、(ロ)実軸方向だけでなく虚軸方向にも移動、の二つの場合がある。

a) 正または負実軸方向にのみ移動の場合

m 次共振振動数付近のある振動数 ω における切削力方向の加振力 F_e と切削面に垂直な方向の相対変位 X_c に関するリセプタンス (X_c/F_e) は、他の固有モードによる影響をも含めて式(20)のように表せる。この式(20)は複素数ゆえ、

$$\left(\frac{X_c}{F_e}\right) = \left(\frac{X_c}{F_e}\right)_R + i \left(\frac{X_c}{F_e}\right)_I \quad (28)$$

のごとく実部 $(X_c/F_e)_R$ と虚部 $(X_c/F_e)_I$ に分けると、

$$\left(\frac{X_c}{F_e}\right)_R = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f_j \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_j}\right)^2\right]}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_j}\right)^2\right]^2 + \left[2\left(\frac{\omega}{\omega_j}\right)\zeta_j\right]^2} \quad (29)$$

$$\left(\frac{X_c}{F_e}\right)_I = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{-2f_j\zeta_j\left(\frac{\omega}{\omega_j}\right)}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_j}\right)^2\right]^2 + 2\left[2\left(\frac{\omega}{\omega_j}\right)\zeta_j\right]^2} \quad (30)$$

となる。ここでベクトル軌跡の実軸方向への移動を考えるには、このうち実部成分を表す式(29)に着目すればよいが、 m 次モードのベクトル軌跡の虚軸方向の大きさの最大値はこのベクトル軌跡の直径を表している。したがって図3のベクトル軌跡の直径 R_m は式(30)のリセプタンスの虚部を示す式に $\omega = \omega_m$ を代入して

$$R_m \doteq f_m / (2\zeta_m) \doteq \pi f_m / \delta_m \quad (31)$$

と表せる。そこで、このベクトル軌跡が他の固有モードの影響を受けて実軸上を移動する量を解析するために式(29)に着目する。いま ω は ω_m 付近の振動数であることより、 ω_{m-1} 以下の p 次の共振振動数 ω_p では、 ω_p が ω と十分に離れていれば、

$$1 - \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2 \doteq -\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2, \quad \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2 \gg 4\zeta_p^2$$

と近似できることより、式(29)の右辺においてモード次数 p の1から $m-1$ までの総和 G_m' は式(32)と表せる。

$$G_m' \doteq -\frac{1}{\omega^2} \sum_{p=1}^{m-1} f_p \omega_p^2 \quad (32)$$

一方、 ω_{m+1} 以上の q 次の共振振動数では ω_q が ω と十分に離れていれば、 $1 - (\omega/\omega_q)^2 \doteq 1$ 、 $4(\omega/\omega_q)^2 \zeta_p^2 \doteq 0$ と近似できる。したがって式(29)の右辺において、モード次数が $m+1$ から ∞ までの総和 G_m'' は式(33)となる。

$$G_m'' \doteq \sum_{q=m+1}^{\infty} f_q \quad (33)$$

以上の解析より m 次モード付近のレセプタンスの実部を示す式(29)は、 m 次モードを1自由度系とみなしたときのレセプタンスの実部を $(X_c/F_c)_{mR}$ として、次の式(34)のように近似できることになる。

$$\left(\frac{X_c}{F_c}\right)_R \doteq G_m' + \left(\frac{X_c}{F_c}\right)_{mR} + G_m'' \quad (34)$$

これより m 次モード自身を1自由度系とみなしたときのベクトル軌跡を負実部方向へ移動させるのは $m-1$ 次以下の固有モードによる影響であり、その大きさは G_m' である。一方、正実部方向へ移動させるのは $m+1$ 次以上の固有モードの影響で、その大きさは G_m'' である。結局両者より正実部方向への移動量 G_m は次の式(35)となる。

$$G_m = G_m' + G_m'' = -\frac{1}{\omega^2} \sum_{p=1}^{m-1} f_p \omega_p^2 + \sum_{q=m+1}^{\infty} f_q \quad (35)$$

ここで式(3)の関係をもちいて、式(36)と表せる。

$$G_m = (f_{e,c})_{st} - \sum_{q=1}^m f_q - \frac{1}{\omega^2} \sum_{p=1}^{m-1} f_p \omega_p^2 \quad (36)$$

したがって問題とする固有モード以外の他の固有モードに起因するベクトル軌跡の実軸上の移動量は、他の固有モードの共振振動数がその固有モードの共振振動数から十分に離れていれば、静コンプライアンス、各固有モードのモーダルフレキシビリティおよび共振振動数の間の式(35)または式(36)の関係によって決定され、減衰の値には無関係である。

次に、最大負実部の大きさを P_m とすれば次の式(37)と

なる。

$$\begin{aligned} P_m &= \frac{R_m}{2} - G_m - g_m \\ &= f_m \left(\frac{\pi}{2\delta_m} + 1 \right) + \sum_{i=1}^{m-1} f_i \left[1 + \left(\frac{\omega_i}{\omega} \right)^2 \right] - (f_{e,c})_{st} - g_m \\ &= f_m \left(\frac{\pi}{2\delta_m} - \tau \right) + \sum_{i=1}^{m-1} f_i \left(\frac{\omega_i}{\omega} \right)^2 - \sum_{j=1}^{\infty} f_{m+j} \end{aligned} \quad (37)$$

ここに $\tau = g_m/f_m$ であり、 g_m は m 次モード自身を1自由度系としたときのベクトル軌跡が、虚軸上に中心をもつ直径 R_m の円で近似できる軌跡から実軸上を移動する量である。この式(37)より、 m 次モードの最大負実部の大きさ P_m が小さいためには、その固有モードのモーダルフレキシビリティ f_m が小さく対数減衰率 δ_m が大きく、かつ $m+1$ 次以上のモーダルフレキシビリティの和が大きく、そして $m-1$ 次以前の固有モードのモーダルフレキシビリティが小さいか、あるいは大きい固有モードが存在してもその固有モードの共振振動数が m 次モードの共振振動数から十分に離れていることが必要である。また式(37)に従い $m+1$ 次以上の振動特性がわからなくても、 m 次モードまでの振動特性により、無限自由度振動系の m 次モードの最大負実部の大きさ P_m を求めることができる。

また、再生型自励びりに関する最適化設計を行うに問題となる大きなモーダルフレキシビリティをもつ m 次の固有モードのベクトル軌跡をびりに対して安定側の正実部方向に移動させるには、正実部方向への移動をもたらすのは $m+1$ 次以上の固有モードのモーダルフレキシビリティの和であることより、概念的には静コンプライアンスをできるだけ多くの固有モードのモーダルフレキシビリティに均等に分布させるという3.1節で述べた第1段階の最適化と一致する。そして式(37)に着目することにより第2段階としての最適化設計を行える。

b) 実軸方向だけでなく虚軸方向にも移動の場合

これは、共振振動数が接近した二つ以上の固有モードをそれぞれ単純1自由度モデルとみなしたとき、各固有モードのレセプタンスの虚軸方向成分をもつ振動数範囲が重なるときで、実軸上を大きく移動するのはレセプタンスの小さい方のモード(ゆえa)の場合ほど重要でない。したがってここでは詳しい解析は省略する。

4. 結 言

再生型自励びりを生じにくい工作機械を設計する上での、その最適化を支配する因子についての解析を行い、これより次のような結論を得た。

(1) 最適化を支配する大きなパラメータは、モーダルフレキシビリティと減衰能を示す対数減衰率であ

る。

- (2) モーダルフレキシビリティは静的コンプライアンスと関連して各固有モード間の関係をもっており、設計の段階で明確に定めるべき値である。ゆえに最適化設計を行うには、まずモーダルフレキシビリティの値に着目する必要がある。これより第1段階としての最適化設計を行える。
- (3) 一方、減衰能を示す対数減衰率は、各固有モード自身の値であって、モーダルフレキシビリティのように明確な固有モード間の関係をもたない上に、現実には非線形かつ多少の不確定な性質をもつ。したがって最適化設計を支配する因子として、モーダルフレキシビリティより劣位にある。
- (4) 再生型自励びびりに対して問題となるベクトル軌跡の実軸上の移動量は、各次のモードでのモーダルフレキシビリティの配分と各次の共振振動数の値で定まり、減衰には基本的には無関係である。またこの解析により第2段階としての最適化設計を行える。

本研究で提案したパラメータとその特性に着目すれば、再生型自励びびりに対する改造設計ならびに最適設

計を行うことができると考える。

本研究の遂行にあたり、京都大学教授奥島啓博士の全面的なご支援を賜った。また、京都大学助教授星鉄太郎博士のご指導を受けて行ったものであることを記し、感謝の意を表すものである。

文 献

- 1) 例えば、吉村允孝：動剛性合成法による機械構造物の静特性および動特性のCAD——工作機械の動特性解析法の研究（第3報）、精密機械、41, 11 (1975) 1060.
- 2) H. E. Merritt: Theory of Self-excited Machine Tool Chatter, Trans. ASME, J. Engg. Ind., Ser. B, 87, 4, (1965) 447.
- 3) M. Yoshimura & T. Hoshi: Computer Approach to Dynamically Optimum Design of Machine Tool Structures, Proc. 12th Int. MTDR Conf., (1972) 439.
- 4) 吉村允孝、浦川和夫：ボルト結合部モデルの剛性および減衰能の測定と電子計算機プログラムによるシミュレーション、精密機械、42, 6 (1976) 562.
- 5) 例えば、M. Polacek: Damping and Dampers, Machine Tool Structures, Pergamon Press, Oxford, (1970) 283.

—表紙写真説明—

FSP-70V 食いフライス盤

1500 mm/min の高速食いで生産性を一挙に3倍に上げます

■特 長

1. 高速食い加工による大巾時間短縮
 - ハイレスポンスな送りサーボモータの開発
 - ハイドロスタティック案内面の採用
2. 食い加工精度アップ
 - 新開発によるトレーサヘッドの装着
 - 食いオプションの開発
 - 高い機械剛性
3. 手仕上加工の大幅減少
 - 高精度食い加工
 - 新しい切削技術のコンサルタント
 - 特殊工具の使用
4. 操作性アップによる高稼働率
 - コラム・移動ベッド型構造の採用
 - チップコンベア装備
 - 適正食いオプションの開発
5. 金型加工システムの確立
 - NC装置との併用
 - 測定機および当社開発の各種のソフトウェアシステムの駆使

■主な仕様

テーブル作業面積：700×2,250 mm
 主軸端からテーブル上面までの距離：100～750 mm
 主軸の直径：105 mm
 主軸回転数：50～3,000 rpm（無段）
 送り速度 早送り：10,000 mm/min
 切削送り：10～1,500 mm/min
 テーブル最大積載重量：4,000 kg
 食い運動範囲（X×Y×Z）：1,050×700×650 mm
 主軸とスタイラスの最大距離：1,100 mm
 主軸駆動電動機：D. C. 15 kW

新日本工機株式会社

本社 大阪市東区北久宝寺町2丁目44番地 ☎ 06(261)3131(代) 広島出張所 ☎ 0822(21)8556(代)
 機械営業本部・東京支社 東京都中央区日本橋2-1-10 新潟出張所 ☎ 0252(43)1369(代)
 柳屋ビル9階 ☎ 03(272)0371(代) 信太山工場 ☎ 0722(71)1201(代)
 名古屋支店 ☎ 052(571)6401(代) 岬工場 ☎ 07249(2)2111(代)
 九州支店 ☎ 093(541)0338(代)