コンピュータディスプレイによる自由曲面 の一設計方式 (第1報)*

——B-spline 曲線に基づくカーブフィッティング——

山 口 富 士 夫**

A Design Method of Free Form Surfaces by a Computer Display (1st Report)

——A Curve Fitting Method Based on the B-spline Curve——

Fujio YAMAGUCHI

The paper presents a new curve fitting method especially suitable for a CRT graphic display. The method makes it possible to have a sketched curve represented in a mathematical form amenable to subsequent computer processing. The basic algorithm of the method is very fast. By making the best use of the characteristic the method enables the operator to find a well-fitted curve interactively by changing a "pass-point" of the generated curve continually on the CRT scope. After a few cycles of the perturbation a suitable result is obtained with a small number of curve segments. The curve generated is one of B-spline varieties. The paper describes the new curve fitting algorithm after mentioning an outline of the B-spline curve.

1. 緒 言

自由曲面形状の設計製作においては、①形状情報の表現及び伝達の困難さ、②モデル製作には熟練した技能を要する、③容積、表面積などの解析計算、またはNCプログラミング等、形状に関する処理、解析が困難という問題点が存在する。

最近、上記の問題点を克服する目的で自由形状を数学的に記述し、設計製作に関連する処理をコンピュータと直結したグラフィックディスプレイを使って行うという試みが発表されている¹⁻³⁾が、これらのシステムでは、形状データの入力、形状の制御においてかなり‘めんどう’な手続きを人が行うことが必要で実用的段階には至っていないと思われる。

筆者は、コンピュータによる自由曲面の設計方式について検討を加え、①設計の基本方式、②曲面データ創成方式、③曲面形状制御方式において従来のやり方とは異なる新しい方式を提案する。

第1報では、本設計方式でまず最初に行う、紙上に描かれたスケッチ曲線の数式化について新しい方式を提案する。一般に、与えられた点列を通る曲率まで連続な曲線を発生するためには、点数に相当する元数の連立方程

式を解く必要があるので、点数が増加すると非常に演算時間を要する。筆者は、コンピュータ処理上まったく乗除算を要しない極めて簡単な計算によって、与えられた点列を通る B-spline 曲線を発生する基本漸化式を誘導し、点列が閉じている場合にも開いている場合にも適用できる簡単なアルゴリズムを開発した。曲線のフィッティングにおいては、どの点を通過点とするかが重要で、その選択のいかんによって曲線形状が変化する。ここに提案するアルゴリズムは、極めて高速であるので、リフレッシュ型 CRT を用いて、連続的に通過点を変更することが可能となり（従来の方式⁴⁾⁹⁾ではほとんど不可能）、最少の曲線セグメント数で、すぐれたフィッティングを達成することが相当容易化した。さらに基本漸化式は、シフト演算と和差演算のみであるからハードウェア化が容易である。

以下には、本設計方式で採用した B-spline という曲線について概略の解説を加えたのち、カーブフィッティングの基本漸化式を誘導し、その適用形式について述べる。

2. 自由曲線式——B-spline 曲線

コンピュータの援助により形状処理を行うため、自由形状の曲線を数学的に表現しようとする提案が Coons⁴⁾、穂坂⁵⁾、Bézier⁶⁾、Riesenfeld⁷⁾らによりなされているが、曲線式が設計に対し有効に用いるためには、大きく分けて、次の2条件を具備していることが必要である。

(1) 所望の形状を正確に表現でき、形状制御が容易で、

* 原稿受付 昭和50年6月5日。昭和50年度精機学会春季大会学術講演会（昭和50年4月6日）にて発表。

** 正 会 員 (財)機械振興協会技術研究所(東久留米市八幡町1-1-12)

図1 B-spline 曲線と特性ポリゴン

そのための計算がコンピュータ処理に適している。

(2) 特別な数学的知識を持たない人が、容易に直観的操作ができる形式にまとまっている。

これらの条件より、Riesenfeld の提案する B-spline 曲線が優れていると思われる。以下にその概略を解説する。

2.1 B-spline 曲線の誘導

ここでは文献⁷⁾とは別の方法で B-spline 曲線の一つを誘導する。

順序づけられた $n+2$ 個の位置ベクトル $V_0, V_1, \dots, V_{n+1}$ が与えられた場合 (図1), 連続した4個の点を順次一組としてできる $n-1$ 個の1次結合,

$$\begin{aligned} C_i(t) = & E_0(t)V_i + E_1(t)V_{i+1} + E_2(t)V_{i+2} \\ & + E_3(t)V_{i+3} \end{aligned} \quad (1)$$

$$i=0, 1, \dots, n-2, \quad 0 \leq t \leq 1$$

について、隣り合う1次結合が2次の導関数ベクトルまで連続であること, すなわち

$$\left. \begin{aligned} C_i(1) &= C_{i+1}(0), \quad C_i'(1) = C_{i+1}'(0), \\ C_i''(1) &= C_{i+1}''(0) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

が, $V_i, V_{i+1}, V_{i+2}, V_{i+3}$ のいかんにかかわらず成立するための条件は (3), (4), (5) が成立することである。

$$\left. \begin{aligned} E_0(1) &= E_3(0) = 0, \quad E_1(1) = E_0(0), \\ E_2(1) &= E_1(0), \quad E_3(1) = E_2(0) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} E_0'(1) &= E_3'(0) = 0, \quad E_1'(1) = E_0'(0), \\ E_2'(1) &= E_1'(0), \quad E_3'(1) = E_2'(0) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} E_0''(1) &= E_3''(0) = 0, \quad E_1''(1) = E_0''(0), \\ E_2''(1) &= E_1''(0), \quad E_3''(1) = E_2''(0) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

さらに, $V_i = V_{i+1} = V_{i+2} = V_{i+3}$ なら $C_i(t) \equiv V_i$ とする条件,

$$E_0(t) + E_1(t) + E_2(t) + E_3(t) \equiv 1 \quad (6)$$

を付与すると, $E_0(t), E_1(t), E_2(t), E_3(t)$ は, その関数形として3次の多項式を仮定した場合, 次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} E_0(t) &= -\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{6} \\ E_1(t) &= \frac{1}{2}t^3 - t^2 + \frac{2}{3} \end{aligned} \right\}$$

図2 C^2 級の B-spline basis 関数

図3 B-spline の凸領域 (斜線部分) と Bézier 曲線の凸領域 (破線で囲まれる部分)

$$\left. \begin{aligned} E_2(t) &= -\frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{6} \\ E_3(t) &= \frac{1}{6}t^3 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式 (7) によりその係数が表される1次結合 $C_i(t)$ は, t が0から1まで変化すると一つの曲線セグメントを表し, それらは接続点で曲率まで等しくなるように接続された曲線で, これは B-spline 曲線と呼ばれるものの一形式である¹⁰⁾. 式 (7) の関数は basis 関数と呼ばれる。

2.2 B-spline 曲線の性質

basis 関数のグラフを図2に示す。図からわかるように, basis 関数 $E_i(t)$ ($i=0 \sim 3$) は常に正またはゼロであり, かつ式 (6) に示すようにその和は常に1である。従って, 式 (1) で表される B-spline 曲線は4点による凸結合 (convex combination) であることがわかる。この凸結合領域の一例を図3に示す。Bézier の曲線⁶⁾が, すべての点によるグローバルな凸結合 (図3参照) であるのに対し, B-spline 曲線はローカルな点群による凸結合である点が対照的である。このため B-spline 曲線は, 与えられた点によるポリゴン形状に対し, Bézier の曲線より

図4 B-spline 曲線セグメントの始点，終点における位置ベクトル，接線ベクトル，2次導関数ベクトルの幾何学的関係

も，より忠実である．さらに文献⁷⁾に示されているように，B-spline 曲線は variation diminishing という性質を有するため，ポリゴン形状と高々同数しか変曲点を持たないし，またポリゴンがループを有しない限り，曲線にループは存在しないという形状制御しやすい特徴があり，これは設計を行う場合に好都合である．

次に，B-spline 曲線セグメントの始点，終点の位置ベクトル，接線ベクトルおよび2次導関数ベクトルとポリゴン頂点との間の幾何学的関係について述べる(図4)．線分 $\overrightarrow{V_{i+1}V_i}$ ， $\overrightarrow{V_{i+1}V_{i+2}}$ を2辺とする平行四辺形を作りその第四頂点を V_R とする．式(1)，(7)による簡単な計算から，曲線セグメントの始点 $C_i(0)$ は，対角線 $\overrightarrow{V_{i+1}V_R}$ 上， $\overrightarrow{V_{i+1}V_i}$ から $1/6$ の点であり，その点での接線ベクトルは $\overrightarrow{V_iV_{i+2}}$ の $1/2$ ，また2次導関数ベクトルは $\overrightarrow{V_{i+1}V_R}$ である．曲線セグメントの終点の位置ベクトル，接線ベクトルおよび2次導関数ベクトルについても同様な関係が存在する(図4参照)．

以上より，本章で述べた B-spline 曲線の性質をまとめると次のようになる．

- (1) 一般に，ポリゴン頂点の位置に無関係に，曲線の連続性 (C^2 級) は保持される．
- (2) 曲線セグメントは，ローカルな頂点のみにより定義されるので，局所の変更が可能である．
- (3) 曲線形状は，ポリゴン形状に対しきわめて忠実であり，予測が可能である．
- (4) 連続した4個の頂点が一直線上に並んだ場合，B-spline 曲線は直線に縮退し，また頂点の特殊な配置により，せん点 (cusp) が表現できる．すなわち表現力が優れている(第2報参照)．

3. スケッチ曲線の数式化

3.1 漸化式の誘導

図1において，曲線セグメントの接点 $P_i (i=1, 2, \dots, n)$ が与えられた場合に $V_i (i=0, 1, \dots, n+1)$ ，すなわち B-spline 曲線を求める問題を考える．曲線が図1のように閉じていない場合と，閉じている場合の二つのケースが考えられるが，いずれの場合においても，次の連立方程式，

$$\frac{1}{6}V_{i-1} + \frac{2}{3}V_i + \frac{1}{6}V_{i+1} = P_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

を解く必要がある．この連立方程式は条件数に対し未知数が二つだけ多いので，次のような条件設定をする．

$$(1) \text{ 閉じていない場合: } V_0 = V_1, V_{n+1} = V_n \quad (9)$$

$$(2) \text{ 閉じている場合: } V_{n+1} = V_1, V_n = V_0 \quad (10)$$

条件(9)は，閉じていない場合について対称な条件であり，また条件(10)は，曲線の始点と終点をなめらかに接続するためのもので，いずれも自然な条件設定である．

条件(9)，(10)を追加することにより，条件数と未知数が一致し連立方程式(8)を解くことができる．式(8)が Gauss-Seidel の収束条件を満足するので， V_i の k 回目の近似値を V_i^k の記法で表せば，式(11)が成立する．

$$\frac{1}{6}V_{i-1}^k + \frac{2}{3}V_i^k + \frac{1}{6}V_{i+1}^{k-1} = P_i \quad (11)$$

式(11)は次のように変形できる．すなわち，

$$V_i^k = P_i + \frac{1}{2} \left\{ P_i - \frac{1}{2}(V_{i-1}^{k-1} + V_{i+1}^{k-1}) \right\} \quad (12)$$

従って， V_i の k 回目と $k-1$ 回目の差を δ_i^k とすれば

$$\begin{aligned} \delta_i^k &= V_i^k - V_i^{k-1} \\ &= P_i - V_i^{k-1} + \frac{1}{2} \left\{ P_i - \frac{1}{2}(V_{i-1}^{k-1} + V_{i+1}^{k-1}) \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

初期値として， $V_i^0 = P_i$ とし，さらに式(12)，(13)において， $i=1$ の場合， V_0^k の代わりに V_0^{k-1} を用いるというアルゴリズムの本質には影響を与えない修正を施すことにより，きわめて簡単で高速，かつエレガントなアルゴリズムが得られる．

3.2 基本アルゴリズム (図5(a)，(b)参照)

- (1) 初期処理: $i=1, 2, \dots, n$ に対し， $P_i \rightarrow V_i$

そのあと， $V_1 \rightarrow V_0, V_n \rightarrow V_{n+1} (V_1 \rightarrow V_{n+1}, V_n \rightarrow V_0)$

- (2) 演算: $i=1, 2, \dots, n$ に対し，

$$\delta_i = P_i - V_i + \frac{1}{2} \left\{ P_i - \frac{1}{2}(V_{i-1} + V_{i+1}) \right\} \quad (14)$$

$\delta_i + V_i \rightarrow V_i$

そのあと， $V_1 \rightarrow V_0, V_n \rightarrow V_{n+1} (V_1 \rightarrow V_{n+1}, V_n \rightarrow V_0)$

図5 PテーブルとVテーブル

(3) 判定: $\max\{\delta_i\} > \delta_s$ なら (2) にもどる.

$\max\{\delta_i\} \leq \delta_s$ なら終了.

ここに δ_s は最初に設定された許容誤差, またカッコ内は閉じた場合の処理である.

点列が閉じている場合も, また閉じていない場合も, 式(14)の漸化式が適用でき, 従ってプログラムは極めて簡単で, 高速な演算が可能である. 得られる曲線は, C^2 級の連続性を有する B-spline 曲線であって, 設計に対して優れた特質を持つことは, 2章で述べた通りである. このアルゴリズムは, 極めて一般的なもの, 2次元の点列のフィッティングのみならず, 3次元, さらに n 次元の点列のフィッティングを可能とするものである.

3.3 基本アルゴリズムの特性

C^2 級の曲線を発生するカーブフィッティングのアルゴリズムとしては, 数値制御ソフトウェア APT の TABCYL⁸⁾や穂坂の方法⁹⁾が知られている. 図6は, 正弦波状の点列の頂点を垂直下方に移動した場合の発生曲線を TABCYL と, ここで提案する新方式のアルゴリズムについて比較したものであり, 表1はプログラムサイズと演算時間について両者を比較したものである.

図6から明らかなように, 点列の形状変化が大きい部分で発生曲線には乱れが見られるが, TABCYL では極端であり(図6(a)), さらに点列の形状変化が大きくなると, TABCYL の場合点列の基本形状の特徴が失われループが発生する(図6(b)). 新方式の場合図6(b)で, 4-5-6 および 8-9-10 の区間で多少の乱れが発生しているが, TABCYL に比較すると, その量は, はるかに少ない.

また演算時間については, 新方式は与えられる通過点数のみによって定まり, ほぼ linear に変化する. これに対し TABCYL では, 演算時間が点列の配置により極端な影響を受ける. TABCYL に対し有利な正弦波形状の

+印は指定された曲線通過点であり, 曲線セグメントの接続点でもある

図6 新方式と TABCYL の点列に対する忠実性の比較 (IBM 360 APT で, TABCYL の spline を指定してプロットに描かせた結果)

表1 新方式と TABCYL との特性比較

	プログラム サイズ	演算時間(1)(s) (正弦波状データ (300点))	演算時間(2)(s) (正弦波データ 中にワイルド データを含む (100点))
TABCYL*	5000語以上	30.02	446.3
新方式**	100語以下	0.46	0.15

* FACOM 270-30 (1語16ビット) にインプレメントされた2倍長データを扱うプログラムのデータ

** FACOM 270-30 にインプレメントされた2倍長データを扱うプログラムのデータ

点列の場合でも, 新方式は約65倍高速である. 新方式では, $1/2$ の乗算はシフト演算に置き換えられるため全く乗除算を必要とせず, かつ収束が高速であるため, このように大きな差が生ずる.

また, 2倍長データを扱う新方式のプログラムは約80語で可能であるが, 一語16ビットコンピュータで2倍長データの TABCYL は数K語を要する.

さらに, 計算式(14)をハードウェアで実行する場合, 単純な和差演算とシフト演算のみで処理が可能である点も新方式の特徴の一つである.

3.4 基本アルゴリズムの一適用形式

前項で指摘したように, 新方式のアルゴリズムでも図6(b)で, 区間4-5-6および8-9-10において, 発生曲線にわずかな乱れが観察される. これは, 与えられたスケッチ曲線に対し, 最もフィットする曲線の最適なセグメント数とセグメントの接続点があるはずであるのに, スケッチ曲線から得られた点をすべて接続点と定めてしまったことに起因する.

そこで, 前述の基本アルゴリズムがきわめて高速である性質を利用し, CRT上でダイナミックに通過点の変更を行い, 最少のセグメント数で最適なフィッティングを

図7 スケッチ曲線の点列による表示

図8 4つの曲線セグメントによるフィット

図9 8つの曲線セグメントによるフィット

図10 スケッチ曲線の数式化完了(9つの曲線セグメントによる)

行うための一つの適用形式について述べる。

- (1) 曲線の描かれた図をタブレット上に置き、スタイラスにより曲線上の点を適当な間隔で拾い出し、それらの点をCRT上に表示する(図7参照)。より厳密にフィットさせる場合にはより細かい間隔とする。
- (2) システムは、これらの点列によりスケッチ曲線の近似長さを計算し、その等分点の近傍の点を発生曲線の通過点として選び、カーブフィットして表示する。最初はシステムで定めた最低セグメント数で行う(図8)。一般に、この方法で決定される通過点は、最適なものではないがその近傍にあると考えてよい。
- (3) 次に人は、スタイラスにより通過点の変更を連続的に行うと(基本アルゴリズムが超高速のためこれが可能)、フィットされた曲線がダイナミックに変化する。この場合、スタイラスに最も近傍の点が通過点に選ばれる。
- (4) 通過点の変更を行っても、フィットが不十分である場合には、曲線セグメント数を一つずつ増加して、通過点の変更を行えば(図9)、容易に最少セグメント数で最適なフィットに到達する(図10)。通過点の増加方法は、文献11)を参照されたい。

3.5 他の適用形式

前項で述べた適用形式は、通過点の変更を人が行い得る場合(例えばリフレッシュ型CRTを用いる場合)に適している。自動製図機を用いる場合のように、通過点の変更を人に期待することが困難である場合には、次のように行う。すなわち、スケッチ曲線と発生曲線との各区間における最大偏差がほぼ等しくなるように通過点を制御して最適通過点を決定して、その偏差が定められた偏差以内になるまで、通過点数を増加して上述の通過点制

御を繰返せば、最少のセグメント数で最適のフィットを自動的に実現できる。

4. 結 論

- (1) B-spline 曲線によりカーブフィッティングする基本漸化式が新しく誘導され、閉じた点列にも、又開いた点列にも同様に適用できるようにアルゴリズム化がなされた。
- (2) このアルゴリズムは、コンピュータ処理上、まったく乗除算を必要としない簡単なものであるため、極めて高速で、かつプログラムは非常に小規模となる(3.3項参照)。
- (3) このアルゴリズムのハードウェア化は、シフト演算と和差演算のみで容易に行える。
- (4) このアルゴリズムを、本論文で提案された適用形式で用いることにより、最少の曲線セグメント数で、最適なフィッティングを行うことが容易になった。
- (5) 本方式で発生される曲線は、設計に好適な性質を有する(2.2項参照)。
- (6) 本論文で提案したカーブフィッティングの方式は、容易にサーフェスフィッティングに応用できる(第3報参照)。

終わりに臨み、本研究を遂行するにあたり終始激励をたまわりました機械振興協会技術研究所所長・朝永良夫博士、また貴重な助言を寄せられた東京大学宇宙航空研究所・穂坂衛教授に厚く感謝の意を表します。

また、五十嵐善一郎氏、小西和正氏には、データの作成およびプログラムデバッグの面で協力して頂きましたので感謝します。

参 考 文 献

- 1) A.P. Armit: Computer Systems for Interactive

- Design of Three Dimensional Shapes, Univ. Cambridge, (Nov. 1970).
- 2) A.G. Flutter: The Polysurf System, Prolamat, (1973).
 - 3) 木村靖夫, 小島俊雄: 曲面形状の設計システム, 昭和49年度精機学会秋季大会学術講演会前刷 (1974).
 - 4) S.A.Coons: Surfaces for Computer-Aided Design of Space Forms, MIT Project MAC, TR-41, (1967-6).
 - 5) 穂坂 衛: 曲線, 曲面の合成および平滑化理論, 情報処理, 10, 3 (1969) 5.
 - 6) P. Bézier: Numerical Control—Mathematics and Application, John Wiley, London, (1972).
 - 7) R. Riesenfeld: Application of B-spline approximation to Geometric Problems of Computer-aided Design, Univ. Utah, (March 1973).
 - 8) APT IV Computer System Manual, vol. 2—Subroutine Library, APT Long Range Program, IIT Research Inst.
 - 9) 穂坂 衛: コンピュータグラフィックス, 産業図書, (1974) 87~91.
 - 10) 山口富士夫: 自由曲面の設計, 精密機械, 43, 1 (1977) 49.
 - 11) 山口富士夫: 曲線設計におけるセグメント数増減法, 昭和51年度精機学会秋季大会学術講演会前刷 (1976).

——表紙写真説明——

パーソナルコンピュータ SX-350

SX-350 はデジタル測定器からの測定データをインターフェイスを介して、オンライン入力し、磁気カートリッジのプログラムに従って演算処理します。演算結果を本体内蔵のサーマルプリンターで下のプリント例のように作表・グラフ化しますので、測定時間を大幅に短縮します。

<SX-350 の主な特徴>

●見やすいプリントアウト

数字だけでなく、アルファベット、カナ文字、特殊記号もプリントでき、1行48桁を利用し、データの作表・グラフ化ができます。

●操作が簡単な磁気カートリッジ

磁気カートリッジにプログラム以外にデータもストアすることができます。安定性が高く、操作も簡単です。

●やさしいプログラム方式

プログラムは、本体のキーボードによって容易に作成でき、数種の関数を含み、演算は電卓を使う要領でどなたでもご使用いただけます。

プリント例

NO	2100	2101	2102	2103	2104
1	2100	5.155	5.200	-0.050	-0.044
2	2101	140.088	140.000	0.100	0.088
	2102	4.992	5.500		-0.507
3	2102	139.819	143.000	-0.150	-3.181 NG
	2103	59.480	57.000	0.150	2.480 NG
	2104	5.037	0.500	0.000	2.537 NG
4	2103	3.625	3.500		0.125
5	2104	54.701	52.000		2.701

<主なオプション>

- ・I/O タイプライター
- ・紙テープリーダパンチャー
- ・フロッピーディスク
- ・X-Y プロッター
- ・データインプットインターフェイス
- ・その他

ON LINE SX
パーソナルコンピュータ
SX-350
¥850,000 (基本タイプ)

自動測定の実用システムについてのお問い合わせは

Canon キヤノン販売株式会社 事務機営業本部

東京 東京都港区三田 3-11-28 ☎ (03) 455-9710 大阪 大阪市東区瓦町 5-39 大阪化学繊維会館 ☎ (06) 202-6761