研究

衝撃引張りによる塑性波の伝ば (第3報)*

—レオロジー模型に基づく一つの構成方程式による解析—

千 田 豊 満**

Propagation of Longitudinal Plastic Waves Produced by Tensile Impact (3rd Report)

—Analysis by a Proposed Constitutive Equation Based on the Rheological Model—

Toyomitsu SENDA

An elastic-plastic-viscoplastic rheological model is proposed to explain the longitudinal plastic waves. This model is composed of five elements and describes an instantaneous and a non-instantaneous plastic response. The calculated values according to the equation derived from this model are compared with the experimental results already reported and those from the elastic-viscoplastic rheological model which are equal to those from the Malvern type constitutive equation. The influences of an instantaneous and a non-instantaneous plastic response on the calculated values, strain-time curve, dynamic stress-strain curve and particle velocity-time curve, are discussed. The main results obtained are as follows:

- (1) The calculated values from the present model agree with the experimental results better than those from the elastic-viscoplastic rheological model.
- (2) With the increase of a non-instantaneous plastic response, dynamic stress becomes higher and the velocity of small strain becomes higher and that of large strain becomes lower.
- (3) With the distance from the impact end, the change of dynamic stress from the proposed model becomes smaller than that from the elastic-viscoplastic rheological model.

1. 緒 言

筆者は回転円板形式の衝撃引張試験機を試作し、半無限長と考えられるアルミニウムと銅のリボン片に衝撃負荷を加え、塑性ひずみ波の伝ばの状態を観察した。そして、既に提案されている構成方程式を用い数値計算を施し、得られた結果と観察結果を比較検討し、第1,2報¹⁾²⁾で報告した。

本報では構成方程式を求める場合、塑性域における材料の動的特性が変形速度に依存する部分と依存しない部分から成り立つと仮定する。更に弾性変形は速度に依存しないと仮定し、動的特性を弾・塑・粘塑性5要素レオロジー模型で近似する。そして、このレオロジー模型のレオロジー方程式を材料の構成方程式とする。

次に、この構成方程式を用い、塑性ひずみ波の伝ばの数値解析解を求め、第1報¹⁾で報告した実験結果と比較検討する。また、弾・粘塑性4要素レオロジー模型がMalvern型構成方程式³⁾と同じ意味を持つことを第2報で指摘したが、この弾・粘塑性4要素模型を用いた場合の数値解とも比較検討する。その結果、完全ではないが、

5要素模型に基づく数値解がより良好に実験結果を説明することができるので、新しい構成方程式として提案する。そして、この構成方程式の力学的意味に検討を加える。

2. レオロジー模型

材料の動的特性を表すレオロジー模型は既に多くの研究者⁴⁾によって議論されてきたし、筆者も第2報²⁾で議論した。本報では、図1(a)に示す弾・塑・粘塑性5要素レオロジー模型を提案し、その持つ特徴を明らかにし、

図1 レオロジー模型

* 原稿受付 昭和51年7月26日。第25回塑性加工連合講演会(昭和49年11月14日)にて発表。

** 正会員 愛媛大学工学部(松山市文京町3番)

図2 模型の静的応力-ひずみ関係と各要素の値との関係及び模型の動的応力-ひずみ関係の説明図

実験結果と比較検討する。また、図1(b)は前報で Malvern 型構成方程式と同じ意味を持つことを指摘した弾・粘塑性4要素レオロジー模型を示す。図1の各要素の持つ力学的意味は前報²⁾と同一である。AM間で材料の塑性変形を、MA'間で弾性変形を表し、固体摩擦 σ_y の値は材料の降伏応力を意味する。図(a)において、ばね E_a と流体摩擦 η は塑性領域で変形が速度に依存する粘塑性成分を、つまり負荷がかかった場合に瞬間的にひずみが生じるのではなく、時間の経過とともに徐々にひずみが生じ、負荷に応じた一定のひずみに達する性質を表し、このような材料の特性を非瞬間塑性応答と呼ぶ。

ばね E_b は塑性領域で変形が速度に依存しない塑性成分を、つまり負荷がかかった場合に瞬間的に負荷の大きさに応じたひずみを生じる性質を表し、瞬間塑性応答と呼ぶ。また、これらの模型の静的挙動は対象とする材料の静的応力-ひずみ関係を表さねばならない。本報では材料の静的応力-ひずみ関係を直線硬化弾性と仮定するので、負荷が十分静にかかった場合には流体摩擦は抵抗を示さず、(b)においてはばね E_p が、(a)においてはばね E_a とばね E_b で塑性加工硬化係数を表す。従って、これらの要素の値には次式が成立しなければならない。

$$\frac{1}{E_p} = \frac{1}{E_a} + \frac{1}{E_b} \quad (1)$$

以上の考察をもとに、これらの模型の各要素の値と模型の静的応力-ひずみ関係との間の関係を図2に太実線で示す。

また、図1(a)の模型に瞬間的に外力 σ' が作用した場合、図2において $\overline{B'C'}$ のひずみが弾性応答としてMA

図3 アルミニウムの静的応力-ひずみ関係とその2直線での近似

表1 アルミニウムの静的応力-ひずみ関係をもとに決定した要素の値とその他の計算条件

模 型 の 種 類	5 要 素 模 型		4 要素模型	
前ひずみ量 (％)	5	10	5	10
加工硬化係数 E_p (kg/mm ²)	38	16	38	16
降伏応力 δ_y (kg/mm ²)	7.6	9.24	7.6	9.24
密度 ρ (kg・s ² /mm ⁴)	2.75×10 ⁻¹⁰			
縦弾性係数 E (kg/mm ²)	7 000			
立上がり時間 (μs)	500	450		
衝撃速度 (m/s)	15			
粘性係数 η (kg・s/mm ²)	0.02	1	0.003 5	0.02
E_a と E_b の 値 (kg/mm ²)	E_a	E_b	E_a	E_b
	50.667	152	26.667	40
	76	76		
	152	50.667		

で、 $\overline{A'B'}$ のひずみが瞬間塑性応答としてM'Mで生じ、以後時間の経過とともに非瞬間性応答として $\overline{AM'}$ でひずみが $\overline{A'P'}$ に沿って生じ、最終的に $\overline{P'C'}$ のひずみが生じる。結局、図1(a)の模型の動的応力は図2のAYとPYに囲まれる領域を占める。一方、(b)の模型では、(a)の場合と同じ考察から、その動的応力は図2のBYとPYで囲まれる領域を占める。

3. 数値計算、初期条件と境界条件

図1(a)のレオロジー方程式は

$\sigma \leq \sigma_y$ のとき

$$\sigma = E \cdot \epsilon \quad (2)$$

$\sigma > \sigma_y$ のとき

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial x} = \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{E_b} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{E}{\eta} \frac{E_a}{E_p} \frac{1}{E + E_p} \times \left[\sigma - \left(\frac{E \cdot E_p}{E + E_p} \epsilon + \frac{E}{E + E_p} \sigma_y \right) \right] \quad (3)$$

と表される。ここで、 ε はひずみ、 σ は応力、 t は時間、 E, E_p, E_a, E_b, η と σ_y はそれぞれの要素の値を示す。

また、運動方程式と連続方程式は

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial v}{\partial t} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (5)$$

と表される。ここで、 x は衝撃端面からの距離、 ρ は密度、 v は粒子速度を示す。結局、式(2),(3)を材料の構成方程式として用い、偏微分方程式系(2),(3),(4),(5)を解けば、弾塑性ひずみ波の伝ばの状態を解析することができる。式(2),(3),(4),(5)系は本質的には前報²⁾と同じ方法で数値解析する。

計算は前ひずみ 5% と 10% のアルミニウム¹⁾を対象として行う。その静的応力-ひずみ関係を図 3 に示すように 2 直線で近似し、模型の要素の値を決定し、表 1 にそれらの値を示す。粘性係数 η の値は材料の静的な関係から求めることができず、種々の値を仮定し、計算を施した。しかし、 η の値が図 1 (a) の模型の解に及ぼす影響はほぼ (b) の模型の解に及ぼす影響と同じであったので、本報では表 1 の値に対する解析解についてだけ考察を進める。また、ばね定数 E_a と E_b の値も材料の静的な関係から求めることができず、種々な値に対して計算を施した。本報ではそれらの中から表 1 に示す値に対する数値解析の結果について検討し、ばね定数 E_a と E_b の値が結果に及ぼす影響を、つまり瞬間塑性応答と非瞬間塑性応答の大きさの違いが結果に及ぼす影響を明らかにする。衝撃端面での粒子速度が境界条件として必要であるが、本実験では実測できていないため、一定の立上がり時間で回転円板で与えた衝撃速度に直線的に達し、以後この速度が保たれると仮定した。また、この仮定した立上がり時間も表 1 に示す。なお、数値計算の際の時間刻みは $2 \mu s$ とした。

(a) ひずみ-時間関係

(b) 応力-ひずみ関係

(c) 粒子速度-時間関係

実線: $E_a=152 \text{ kg/mm}^2$, $E_b=50.667 \text{ kg/mm}^2$, 破線: $E_a=78 \text{ kg/mm}^2$, $E_b=78 \text{ kg/mm}^2$, 点線: $E_a=50.667 \text{ kg/mm}^2$, $E_b=152 \text{ kg/mm}^2$
他の条件はすべて共通である。 $\eta=0.02 \text{ kg}\cdot\text{s/mm}^2$, 立上がり時間: $500 \mu s$

図 4 5 要素模型の E_a と E_b が計算結果に及ぼす影響

(a) ひずみ-時間関係

(b) 応力-ひずみ関係

(c) 粒子速度-ひずみ関係

実験条件

材料: 前ひずみ 5% のアルミニウム, 衝撃速度: 15 m/s

計算条件

5 要素模型 $E_a = 76 \text{ kg/mm}^2$, $E_b = 76 \text{ kg/mm}^2$, $\eta = 0.02 \text{ kg} \cdot \text{s/mm}^2$, 立上がり時間: $500 \mu\text{s}$

4 要素模型 $E_b = 38 \text{ kg/mm}^2$, $\eta = 0.0035 \text{ kg} \cdot \text{s/mm}^2$, 立上がり時間: $450 \mu\text{s}$

図 5 5 要素模型と 4 要素模型に基づく計算結果の比較

4. 結果および考察

4.1 瞬間塑性応答と非瞬間塑性応答の大きさの違いが計算結果に及ぼす影響

一般に衝撃実験によって得られる結果は筆者ら⁷⁾, 中川ら⁸⁾や Bell⁹⁾ などのようにひずみ-時間関係か Bianchi¹⁰⁾ のように粒子速度-時間関係である。また, 力学的に興味が持たれるのは動的応力-ひずみ関係と考えられる。そこで, 本報では瞬間塑性応答と非瞬間塑性応答の大きさの違いがこれらの関係の計算結果に及ぼす影響を明らかにする。

図 4 (a), (b), (c) は前ひずみ 5% のアルミニウムを対象として, それぞれ式 (1) の関係を満たしながら, ばね定数 E_a と E_b を色々と変化した場合のひずみ-時間関係, 動的応力-ひずみ関係と粒子速度-時間関係を示す。ところで, ばね定数 E_b の値を大きくすると, 図 2 の YA の傾斜が大きくなり, 瞬間塑性応答により生じるひずみ $A'B'$ が小さくなる。つまり, E_b の値を大きくすることは瞬間塑性応答を小さく評価することになる。図 4 (a) から明らかなごとく, E_b の値が小さくなるにしたがい, つまり瞬間塑性応答を大きく評価するにしたがい, 小さいひずみは遅く, 大きいひずみは速く伝わる。また, 衝撃端面から一定の距離の点に着目すると, E_b の値の減少とともに, 小さいひずみはより早く生じ, 大きいひずみはより遅く生じ, つまり変形はより早く生じ, 長時間にわたり徐々に進行するようになる。そして, いずれの条件でも一定の最終ひずみに達し, 変形は終了する。図 4 (b) では, E_b の値が小さくなるにしたがい, つまり瞬間塑性応答を大きく評価するにしたがい, 図 2 で AY で示される動的応力の上限値は小さくなり, 変形中の動的応力も小さくなる。また, 粒子速度-時間関係に及ぼす影響は, 図 4 (c) から明らかなごとく, ひずみ-時間関係に及ぼす影響ほど顕著でないが, ほぼ同じ傾向を示す。

4.2 実験結果と図 1 (a), (b) の模型に基づく計算結果との比較

図5(a)は前ひずみ5%のアルミニウムのひずみ-時間関係の実験結果を実線で、弾・塑・粘塑性5要素レオロジー模型に基づく計算結果を破線で示す。また、点線で弾・粘塑性4要素模型に基づく計算結果を示す。実験結果ではひずみ波形は立上がった後にだだらと一定の最終ひずみに達し、この最終ひずみの値は衝撃端面からの距離の増加とともに減少している。一方、両者の計算結果でもひずみ波形は立上がった後にだだらと一定の最終ひずみに達している。そして、この立上がりの初めの部分では両者の計算結果はともに実験結果と比較的良好に一致し、また、立上がりの終わりの部分では4要素模型よりも5要素模型に基づく結果のほうが良好に一致している。しかし両者の計算結果では、一定の最終ひずみの値は衝撃端面からの距離が変化

しても一定の値となり、実験結果と異なっている。衝撃端面における粒子速度が一定速度に達した後に減少すると仮定すると、両者の計算結果で一定の最終ひずみの値は端面からの距離とともに減少する。しかし、装置の回転円板の衝撃前後の速度を測定した結果、速度の減少はわずかなものであり、一定の最終ひずみの値に関する実験結果と計算結果の相違は端面の境界条件に基づくものでなく¹¹⁾、両者の模型の不完全さに基づくものと考えられる。図1(a)の弾・塑・粘塑性5要素レオロジー模型に基づく計算結果は一定の最終ひずみの値の減少を説明できないが、Malvern型構成方程式と同じ意味を持つ図1(b)の4要素模型に基づく結果よりも良好に実験結果を説明することができる。

両者の模型に基づく動的応力-ひずみ関係を図5(b)に示す。図1(a)の5要素模型に基づく結果を図1(b)の4要素模型の結果と比較すると、端面に近いところでは、小さいひずみの領域で低い応力を示し、大きいひずみの領域で高い応力を示す。また、端面からの距離が変化しても動的応力の違いが少なく、この傾向は小さいひずみの領域で顕著である。図5(c)は両者の模型に基づく粒子速度-時間関係を示す。

次に、前ひずみ10%のアルミニウムに対する両者の模型に基づくひずみ-時間関係の計算結果を、実験結果とともに図6に示す。図1(a)の5要素模型に基づく計算結果は、一定の最終ひずみの値に関しては前ひずみ5%のアルミニウムの場合と同じように実験結果と一致していないが、ひずみ波形の立上がり部分では実験結果と

実験条件

材料: 前ひずみ10%のアルミニウム, 衝撃速度: 15 m/s

計算条件

5要素模型 $E_a = 26.667 \text{ kg/mm}^2$, $E_b = 40 \text{ kg/mm}^2$, $\eta = 1 \text{ kg}\cdot\text{s/mm}^2$,
立上がり時間: 450 μs

4要素模型 $E = 16 \text{ kg/mm}^2$, $\eta = 0.02 \text{ kg}\cdot\text{s/mm}^2$, 立上がり時間: 450 μs

図6 ひずみ-時間関係 (実験結果, 5要素模型と4要素模型に基づく計算結果との比較)

比較的良好に一致している。なお、図6の5要素模型に基づく計算結果では一定の最終ひずみの値が端面からの距離とともに減少しているようにみえるが、計算時間を更に延長すると、すべての位置で同じ大きさの一定の最終ひずみに達している。また、図1(b)の4要素模型に基づく計算結果では、小さいひずみは実験結果よりも早く生じ、中程度のひずみは逆に遅く生じ、また実験結果では一定の最終ひずみに達しているにもかかわらず、ひずみは生じ続けている。このような傾向は、Malvern型構成方程式を用いた計算結果では程度の差はあれ一般的なもののようである¹²⁾。前ひずみ10%のアルミニウムの動的特性を、図1(a)の弾・塑・粘塑性レオロジー模型は良好に近似すると考えられる。

図5(a)および図6から明らかなごとく、図1(a)の5要素模型は前ひずみが増加しても実験結果を比較的良好に説明することができるが、Malvern型構成方程式と同じ意味を持つ図1(b)の4要素模型は前ひずみが増加すると実験結果を説明することができない。一方、式(3)を構成方程式として用いても、特性曲線は応力、ひずみや粒子速度によらず一定の直線であり、数値計算の手間は少し増加するに過ぎない。従って、材料の動的特性を近似する構成方程式としては、図1(a)のレオロジー模型に基づく式(2),(3)がすぐれていると考えられる。

5. 結 言

材料の動的特性を表すレオロジー模型として、塑性変形が変形速度に依存する部分と依存しない部分から成り

立つと仮定し、弾・塑・粘塑性 5 要素レオロジー模型を新たに考え、それをもとに塑性ひずみ波の伝ば現象を解析し、実験結果と比較検討し、次の結論を得た。

- (1) この 5 要素模型を用いると Malvern 型構成方程式と同じ意味を持つ 4 要素模型を用いるよりも良好に実験結果を説明することができた。それ故、材料の動的特性を表す構成方程式としてこの 5 要素模型のレオロジー方程式を提案する。
- (2) 5 要素模型に基づく計算結果を 4 要素模型に基づく計算結果と比較すると、小さいひずみの領域では低い動的応力を、大きいひずみの領域では高い応力を予測する。
- (3) 5 要素模型で瞬間塑性応答を小さく評価するにしたがい、動的応力は高くなった。また、小さいひずみは早く生じ、大きいひずみは遅く生じた。
- (4) いずれの模型を用いても、一定の最終ひずみの値が端面からの距離とともに減少する現象を説明できなかった。

終わりに、本研究を遂行するに当たり種々有益な御助言を賜りました大阪大学工学部中川憲治教授、岸田敬三助教授と愛媛大学工学部横山隆助手に心から感謝致します。

参 考 文 献

- 1) 郡 利矩, 千田豊満ほか: 衝撃引張りによる塑性波の伝ば——前ひずみの影響, 精密機械, **38**, 8 (1972) 652.
- 2) 郡 利矩, 千田豊満ほか: 衝撃引張りによる塑性波の伝ば——ひずみ速度依存性理論の検討, 精密機械, **38**, 12 (1972) 1049.
- 3) L. Malvern: The Propagation of Longitudinal Waves of Plastic Deformation in a Bar of Material Exhibiting a Strain-rate Effect, J. Appl. Mech., Trans. ASME, **73**, (1951) 203.
- 4) N. Cristescu: Dynamic Plasticity, North-Holland, Amsterdam, (1967) 135.
- 5) 山田嘉昭: 塑性力学, 日刊工業新聞社 (1965) 175.
- 6) 文献 4), p. 119.
- 7) 郡 利矩, 千田豊満ほか: 衝撃引張りによる塑性波の伝ば (アルミニウムおよび銅リボン片の場合), 日本機械学会論文集, **39**, 323 (1973) 2051.
- 8) K. Nakagawa, K. Kishida et al.: Plastic Deformation of Pure Iron at High Rates, 1975 Joint JSME-ASME Appl. Mech. Western Conf., (1975) 247.
- 9) J. Bell: The Physics of Large Deformation of Crystalline Solids, Springer-Verlag, New York, (1968) 21.
- 10) G. Bianchi: Some Experimental and Theoretical Studies on the Propagation of Longitudinal Plastic Waves in a Strain-rate-dependent Material, IUTAM Symp., (1963) 101.
- 11) 千田豊満, 庄原善照: 衝撃引張りによる塑性波の伝ば, 日本機械学会関西支部第 235 回講演会講演論文集 (1976) 34.
- 12) A. Banerjee & L. Malvern: Computation of Incremental Torsional Plastic Waves with Rate-dependent Model, Int. J. Solids Structures, **11**, (1975) 347.