接触域における砥石弾性に関する一考察*

——研削砥石の機械的性質に関する研究（第2報）——

樋口 誠 宏** 矢野 章 成** 田 中 行 雄**

One Aspect of Grinding Wheel Elasticity in the Contact Zone

——Study on the Mechanical Properties of Grinding Wheel (2nd Report)——

Masahiro HIGUCHI, Akishige YANO, Yukio TANAKA

Grinding wheel elasticity should be considered as one of factors which restrict the cutting edge space or the undeformed chip thickness in the wheel-work contact zone. In this paper, the elastic deformation of wheel and the projecting grain density in the contact zone are analyzed, assuming a relatively simple model of wheel based upon the stiffness of grain mounted on spring and the distribution density of grain on the wheel surface. Some experimental results are shown to verify the validity of the analysis.

1. 緒 論

研削を一つの切削作用と考えるとき、弾性支持砥粒切れ刃による微小量切削がその特徴となっている。したがって、砥石の工具としての機械的性質も強度のみならず、その弾性を考えあわせなければ、研削性能に対して持つ意義も薄らいでくる。すなわち、研削で重要な砥石と工作物の接触域における切れ刃数と切りくず厚さ、びり振動を規制する接触剛性、また切残し量などにかかわる砥粒の弾性変位挙動について考えねばならない。

ところが砥石は本来不均一な多孔性構造を持つので、上述の砥石の弾性挙動を本質的に解析することは非常に難しい。そのため、Krug¹⁾、Brown²⁾、津和³⁾、Okamura⁴⁾、Snoeys⁵⁾らの研究に見られるように、砥石を適切にモデル化することによって解析しているのが現状のようである。

そこで本研究においても、砥石作業面の弾性支持砥粒の三次元的分布とその剛性を基にして砥石をモデル化し、接触域における砥粒の弾性挙動を比較的単純な解法によって明らかにしようとするものである。本報ではその第一段階として、砥石と工作物の静的な接触状態の場合について考え、接触域の作用砥粒密度と砥石の弾性変形量(砥粒の最大弾性後退量)を解析した。また本解法の妥当性を検討するために、実験結果と比較して考察した。

2. 解 析

接触域における砥粒の弾性挙動の解析を行う上で次の假定をした。

- (1) 2.1項で詳述するように、砥粒支持系は非線形ばねの特性を持つものとする。
- (2) 各砥粒間には干渉がなく、砥粒は独立に垂直方向にのみ弾性後退するものとする。
- (3) 無負荷時の砥粒の三次元的分布は4.1項の実験結果より指数分布であるとする。
- (4) 砥石が工作物に接触するとき、弾性後退する砥粒の先端は新しい曲率の円筒面上にそろえるものとする。

表1 記 号

u_g	砥石構成モデルの弾性後退量
E_V	砥石構成モデルの弾性係数
ν_V	砥石構成モデルのポアソン比
d_V	砥石構成モデルの直径
d_g	砥粒の直径
V_b	結合剤率
V_g	砥粒率
P_n	砥石構成モデルに作用する荷重
ϵ_d	工作物の塑性変形量
P_m	工作物の平均降伏応力
$\eta_c(H)$	砥石表面から H の深さまでの単位長さあたりの累積砥粒数
η_0	ドレッシングを施した砥石表面の単位長さあたりの砥粒数
κ	$\eta_c(H)$ の増加を示す比例定数
ξ	ドレッシングによる砥粒の脱落係数 ⁹⁾
N	接触域に作用する砥粒数
$2X_{eq}$	接触弧の長さ
D	砥石の直径
D_{eq}	変形後の接触域における砥石の直径
y_{κ}	砥石の弾性変形量（接触域での砥粒の最大弾性後退量 u_{gmax} ）

* 原稿受付 昭和51年9月6日。昭和51年度精機学会関西支部定期学術講演会(昭和51年7月2日)および第25回CIRP総会(昭和50年8月26日)にて発表。

** 正 会 員 関西大学工学部(吹田市千里山東3-10-1)

なお解析に使用した記号の意味を表1に示す。

2.1 弾性支持された砥粒と工作物の接触

砥粒の弾性変位挙動は, Nakayama⁶⁾によると Hertz の球体に関する接触理論式に類似したべき関数で表されると言われている (一部 4.2 項で実測)。そこで筆者らの砥石構成モデル間の弾性接触時の変形挙動も, Nakayama の指摘する次式の Hertz の結果によって近似されるものとして, 砥粒支持系の剛性を求める。

$$u_g = \left\{ 9\pi^2 \cdot \frac{K_V^2 \cdot P_n^2}{d_V} \right\}^{1/3} \quad (1)$$

ただし,

$$K_V = \frac{1 - \nu_V^2}{\pi \cdot E_V}, \quad d_V = \left(1 + \frac{V_b}{V_g} \right)^{1/3} \cdot d_g$$

なお砥粒要素と結合剤要素から成る複合体の砥石構成モデル (図1 (b) の type II) に式 (1) を適用するとき, モデルは単一の要素から成るものとする。すなわち, 支持剛性の最大値 (type I, 砥粒どうしの接触) と最小値 (type III, 結合剤どうしの接触) だけを計算するものとする。

また砥粒1個あたりの支持系のばね定数 K を式 (1) の微分係数で表すとすれば, 次式のようになる。

$$K \left(\equiv \frac{dP_n}{du_g} \cdot \frac{1}{d_V} \right) = K_0 \cdot u_g^{-1/2} \quad (2)$$

ただし,

$$K_0 = 0.159 \cdot \frac{1}{K_V} \cdot \frac{1}{d_V^{1/2}}$$

ここで, K_0 は砥石構成モデルの弾性と直径により決まる定数で, これらが大きな組合せほど支持剛性は大きくなる。

次に砥石構成モデルと工作物の接触について考える。

いま砥石構成モデルが工作物に比べて剛体に近いとすれば, 両者の接触による工作物の変形を松井⁷⁾と同様に図1 (c) のように考えることができる。このとき工作物の塑性変形量 t_d と砥石構成モデルの弾性後退量 u_g の関係は, 式 (3) (図2) で示される。

$$\frac{t_d}{d_V} = 0.5 - \left\{ 0.25 - \frac{0.106}{\pi K_V \cdot P_m} \cdot \left(\frac{u_g}{d_V} \right)^{3/2} \right\}^{1/2} \quad (3)$$

図より砥粒支持系の剛性が低く, しかも工作物の平均降伏応力 P_m が大きいほど, t_d に対して u_g が大きくなる。

2.2 接触域の作用砥粒密度

砥石と工作物の接触域において作用する砥粒の数を考える場合問題となるのは, 無負荷時の砥石作業面に存在

図1 接触域の砥石構成モデルの弾性挙動に関する解析基礎モデル

図2 砥石構成モデルの弾性後退量と工作物の塑性変形量の関係

する砥粒の三次元的な分布密度である。これに関しては多くの実験結果が報告されているが⁸⁾, 以下の解析を簡単にするため, ここでは次式で表されるものとする。

$$\eta_c(H) = \eta_0 (e^{\kappa H} - 1) \quad (4)$$

ただし,

$$\eta_0 = 1.50 \frac{V_g + V_b}{d_V} \cdot \xi$$

いま砥石と工作物の接触状態を図3のように考える。

一般に, $D/2 \gg 2X_{eq}$ なることから, 砥石半径方向 (H 方向) を図の y 方向にとれば, 任意の砥石深さ $y - y_0$ の微小部分 $dx \cdot dy$ に存在する砥粒数 dn は次式で与えられる。

$$dn = \{ \eta_c(y - y_0 + dy) - \eta_c(y - y_0) \} dx \quad (5)$$

また式 (4) より, dn は近似的に次式のように表される。

$$dn \approx \kappa \eta_0 \{ 1 + \kappa(y - y_0) \} dx dy \quad (6)$$

したがって砥石が y_K だけ弾性変形するとき (ここでは y_K は接触域に存在する砥粒の最大弾性後退量 u_{gmax} を示す), 接触域の作用砥粒密度 (単位長さあたりの作用砥粒数) $N/2X_{eq}$ は次式 (図4) で表される。

$$\frac{N}{2X_{eq}} = \frac{2}{3} \cdot \kappa^2 \eta_0 \cdot \left(\frac{2}{5} y_K^2 + \frac{1}{\kappa} y_K \right) \quad (7)$$

なお仮定 (4) で述べた接触域で弾性後退した砥粒の先端がそろそろ新しい円筒面の曲率 $1/D_{eq}$ は次式で表される。

$$\frac{1}{D_{eq}} \doteq \frac{1}{D \left(1 + \frac{y_K}{t_d} \right)} \quad (8)$$

図より砥石が変形するほど $N/2X_{eq}$ は高くなる。そし

図3 砥石と工作物の接触モデル

κ : 35 mm⁻¹ (WA 46), 55 mm⁻¹ (WA 60),
 140 mm⁻¹ (WA 100)

図4 接触域の作用砥粒密度

て同一粒度の砥石では砥粒率の大なる砥石ほど、また砥石構成3要素の容積比率が同一の砥石では砥粒径の小さな砥石ほど $N/2X_{eq}$ は高くなることがわかる。

2.3 接触域の砥石の弾性変形

有効なる砥石作業面積は切れ刃面積率に見られるように全体の数%程度であるので、均質な材料の場合に比べて著しく変形する範囲は、砥石表面から砥粒径の10倍の深さまでと言われている¹⁾。それゆえ接触域における砥石の局部的弾性変形が支配的であるとの観点から、これを求めることを考える。ここで解析は、式(2)で示すばね定数 K を持つばねで支持された砥粒が式(4)のごとく砥石外周部に分布する砥石モデル(図3)を用いて行う。

任意の砥石深さ $y - y_0$ の微小部分 $dx dy$ に存在する砥

κ : 35 mm⁻¹ (WA 46), 55 mm⁻¹ (WA 60), 140 mm⁻¹ (WA 100),
 y_k : 30 μm, E_V : 6.7 × 10³ kg/mm² (結合剤), ν_V : 0.2 (結合剤)

図5 接触域の垂直力の分布

κ : 35 mm⁻¹ (WA 46), 55 mm⁻¹ (WA 60), 140 mm⁻¹ (WA 100),
 D : 200 mm, E_V : 6.7 × 10³ kg/mm² (結合剤), ν_V : 0.2 (結合剤)

図6 砥石の弾性変形

粒は $y_1 - y (=u_g)$ だけ弾性後退するので、その力学的なつりあいは

$$df_n = \frac{2}{3} K_0 (y_1 - y)^{3/2} \cdot \kappa \eta_0 \{1 + \kappa (y - y_0)\} dx dy \quad (9)$$

となる。ゆえに接触域での垂直力の分布は式(10)(図5)で与えられ、また垂直力 F_n は式(11)(図6)で与えられる。

$$\frac{dF_n}{dx} = \frac{4}{15} K_0 \kappa^2 \eta_0 \left\{ \frac{2}{7} \left(1 - \frac{x^2}{X_{eq}^2}\right)^{7/2} \cdot y_k^{7/2} + \frac{1}{\kappa} \left(1 - \frac{x^2}{X_{eq}^2}\right)^{5/2} \cdot y_k^{5/2} \right\} \quad (10)$$

$$F_n = \frac{\pi}{12} K_0 \kappa^2 \eta_0 \left(\frac{1}{4} y_k^{7/2} + \frac{1}{\kappa} y_k^{5/2} \right) X_{eq} \quad (11)$$

ただし、

$$X_{eq} \doteq \{D(t_d + y_k)\}^{1/2}$$

両図より砥石構成3要素の容積比率が同一の砥石では砥粒径の小さな砥石ほど、また同一粒度の砥石では砥粒率の大なる砥石ほど図4で示した接触域の $N/2X_{eq}$ が

κ : 35 mm⁻¹ (WA46), 55 mm⁻¹ (WA60), 140 mm⁻¹ (WA100), E : 2.2×10^4 kg/mm² (工作物), 4.0×10^4 kg/mm² (砥粒), 3.18×10^8 kg/mm² (砥石), 6.7×10^8 kg/mm² (結合剤), ν : 0.3 (工作物), 0.15 (砥粒), 0.2 (砥石), 0.2 (結合剤)

図7 弾性変形量の計算値の比較

高くなり、弾性変形しにくくなる。すなわち接触域の y_k には粒度が特に大きな影響を及ぼすことがわかる。

図7に従来の研究結果との比較を示す。BrownやKrugらが砥石をフックの法則に従う等方均質な弾性体であるとみなしたモデル化であるのに対して、Snoeysや筆者らは三次元的に分布した弾性支持砥粒の変位挙動を基にしたモデル化である。図より後者のようなモデル化を行った方が F_n に対する y_k の増加割合が小さく、また F_n の小さな範囲での変形が大きいことが認められる。

3. 実験方法

3.1 砥粒の三次元的分布

本解析において基本となる砥石作業面の砥粒の三次元的な分布状態は式(4)で近似したが、砥石深さに対する砥粒密度の増加の程度を示す比例定数 κ は実測によらざるを得ない。そこで触針法によって砥石表層部分の断面曲線から、その測定を行った。

3.2 砥粒支持系の剛性

正野崎と同様な方法¹⁰⁾で砥石外周部に無作為に露出させた砥粒に工作物片 (SCM-1, 仕上面粗さ 1 μm 以下) を静荷重にて押付け、砥粒の弾性後退量を実測した。

3.3 砥石の弾性変形量と接触域の作用砥粒密度

研削系の剛性が $K_{sy} = 0.86$ μm/kg である平面研削盤上に設置した工作物の表面に、砥石を B なる接触幅でころが

表2 供試砥石の諸元

V_g	V_b	V_p	研削砥石
0.40	0.13	0.47	WA 46-G(12)-V
0.43	0.12	0.45	WA 46-I(10)-V WA 60-I(10)-V WA 100-J(10)-V
0.48	0.12	0.40	WA 46-L(7)-V

り接触させて、変形量 $y_k = Z - K_{sy} \cdot f_n$ を測定した。このとき砥石軸の移動量 Z は工作物につけた勾配によって求め、 Z に対する $f_n (= B \cdot F_n)$ は弾性リング型動力計によって検出した。なお y_k の測定に及ぼす砥粒切れ刃による工作物の変形の影響は垂直力と作用砥粒密度の増加がほぼ平衡していること、また焼入れ硬化した工作物 (53 Rc) を使用することなどの諸点から、ここでは無視した。

次にくらがり接触後、工作物表面に残った圧痕群の顕微鏡写真から点算法¹¹⁾によって作用砥粒密度を実測した。

以上の各実験に用いた砥石の諸元を表2に、またこれらの砥石に施した目直し条件 (切込み×送り×回数) は、50 μm × 0.1 mm/rev × 1 pass であった。

4. 実験結果および考察

4.1 砥粒の三次元的分布

図8(a)に砥石深さ H における単位長さあたりの累積砥粒数 $\eta_c(H)$ を示すが、式(4)の指数関数による近似が可能であることがわかる。また砥石深さ H に対する砥粒密度 $\eta_c(H)$ の増加の程度を表す比例定数 κ を図(b)に示

図8 砥粒の三次元分布密度

図9 砥粒の弾性後退量

図10 砥石の弾性変形量 (1)

図11 砥石の弾性変形量 (2)

す。これによると κ 値は砥石構成3要素の容積比率にかかわらずほぼ一定であり、粒度に依存して変化することがわかる。なお本報の計算に用いた値はすべて図(b)によるものである。

4.2 砥粒支持系の剛性

図9に砥石表面の砥粒の弾性後退量の実測値を式(1)の計算値とともに示す。図の実測値 u_g は砥石軸の移動量 Z とそのときの工作物の圧痕深さ t_d の各最頻値の差として求めたものである。図より実測値は砥石構成3要素の容積比率にかかわらず、ほぼ0.7乗に比例して増加し、式(1)と同じ傾向にある。

4.3 砥石の弾性変形量と接触域の作用砥粒密度

図10に砥石の弾性変形量の一例を示す。砥石の弾性変形は、直接工作物と接触する砥石作業面の砥粒の弾性後退と、それより内部の変形から成ると考えられる。ここで前者の変形が優位とするならば、式(11)やSnoeysの結果が示すように、変形量は弾性支持砥粒の剛性とその三次元的分布密度に依存する。これに対して、後者の変形が優位とするならば、BrownやKrugが示すように、変形量は砥石の弾性係数に依存するものと思われる。

さて図より、垂直力 $F_n < 4 \text{ kg/mm}$ では実測の変形量は筆者らの計算値と、また $F_n > 4 \text{ kg/mm}$ ではKrugの計算値と定性的傾向がよく一致することが認められる。

すなわち垂直力の小さな範囲では、接触域の作用砥粒の弾性後退が砥石変形の主なる原因であり、また垂直力の大きな範囲では、砥石全体の変形が主なる原因であると考えられる。

図11に粒度と砥石構成3要素の容積比率の異なる砥石の弾性変形量を示すが、その傾向は図10と変わらない。

次に図12に粒度と砥石構成3要素の容積比率の異なる砥石の接触域における作用砥粒密度の変化を示す。図より明らかに垂直力の増大によって作用砥粒密度が高くなり、計算値と定性的に一致しているのがわかる。

以上の結果より、垂直力の小さな範囲では、砥粒の弾性後退による作用砥粒密度の変化が砥石の弾性変形挙動に大きく寄与することが認められる。それゆえ、この点に立脚した筆者らの解析が有益であり、これによって接触域における変形量と作用砥粒密度の推定を可能にすることができたと考える。

5. 結 論

砥石の弾性変形量と接触域の作用砥粒密度を、砥石のモデル化によって解析する一近似解法を考えた。そして解析結果と実験結果の比較から以下の結論を得た。

- (1) 砥石作業面に存在する弾性支持砥粒の剛性とその三次元的分布密度を基にして、砥石の弾性変形量、

図 12 接触域の作用砥粒密度

接触域の作用砥粒密度および垂直力の間で成立する次の近似式を得た。

$$\frac{N}{2X_{eq}} = \frac{2}{3} \kappa^2 \eta_0 \left(\frac{2}{5} y_K^2 + \frac{1}{\kappa} y_K \right)$$

$$F_n = \frac{\pi}{12} K_0 \kappa^2 \eta_0 \left(\frac{1}{4} y_K^{7/2} + \frac{1}{\kappa} y_K^{5/2} \right) X_{eq}$$

(2) 砥石の粒度が特に関与する砥石作業面の砥粒の三

次的分布密度は、砥石の弾性変形量や接触域の作用砥粒密度に大きな影響力を持つ。

(3) 上記の解析結果によって、垂直力の小さな範囲の実験結果が定性的によく説明された。

本研究を行うにあたり、関西大学工学部・田中義信教授にご指導いただきましたことを感謝いたします。

文 献

- 1) H. Krug u. G. Honcia : Die elastische Verformung bei Schleifwerkzeugen, Werkstattstechnik, 54, Ht. 2, (1964) 53.
- 2) R. H. Brown, K. Saito & M. C. Shaw : Local Elastic Deflections in Grinding, Ann. CIRP, 19, (1971) 105.
- 3) 津和秀夫, 山田弘文, 河村末久 : 平面研削における接触弧の長さの時間的変化, 精密機械, 41, 4 (1975) 358.
- 4) K. Okamura & T. Nakajima : Elastic Properties of Grinding Wheel, Mem. Fac. Engg. Kyoto Univ., 31, (1969) 490.
- 5) R. Snoeys & I. C. Wang : Analysis of the Static and Dynamic Stiffness of the Grinding Wheel Surface, 9th Int. MTDR Conf., Manchester, (1968) 1133.
- 6) K. Nakayama, J. Brecker & M. C. Shaw : Grinding Wheel Elasticity, Trans. ASME, 93, 2, (1971) 613.
- 7) 松井正己 : 正面研削に関する研究, 精密機械, 40, 11 (1974) 57.
- 8) 松井正己 : 砥粒の切削機構, 機械の研究, 23, 12 (1971) 1.
- 9) 竹中規雄, 笹谷重康 : 研削作用に関する研究, 第2報, 日本機械学会論文集, 26, 163 (1960) 403.
- 10) 正野崎友信, 重松日出見 : 研削中の砥粒に及ぼす研削液の作用, 精密機械, 28, 9 (1962) 532.
- 11) 鈴木憲二, 高橋邦夫 : 研削砥石のドレッシングの研究 (第1報), 精密機械, 30, 3 (1964) 246.

精密工学系大学院の研究テーマの調査結果

会誌編集委員会では昭和50年5月に続いてこの3月に精密工学系大学院(含学部)の昭和52年度における研究テーマについてアンケートをお願いしました。

今回から誌面の許す限り順次に回答を掲載する予定です。

アンケートにご協力いただいた大学の関係者の方々にこの欄をかりてお礼申し上げます。

頭書のMは修士課程を、テーマのあとのかっこ中の人名は指導教官名を示す。

岐阜大学

- M 平行平板列を過ぎる流れと発生音 (松井辰弥)
- M 剥離と再付着
- M 衝撃的に運動を開始した円柱まわりの流れ
- M 正面フライス削り機構に関する研究 (小栗幹男)
- M バイトのたわみに関するびり振動の発生機構に関する実験的研究 (丸井悦男)
- M 電気自動車の軌道追従制御における安定問題の研究 (大川善邦)
- M テーバ油圧管路系の動特性 (武藤高義)

- M 複合油圧管路系の共振現象
- M 倒立予混合火災に関する研究 (河村長司)
- M 燃料噴流火災の火災基部構造に関する研究
- M 有限要素法による一様外圧を受ける球殻の座屈解析 (佐藤芳久)
- M 殻の動的応力解析
- M 液圧バルジ成形における素板の変形および破断挙動 (後藤 学)
- M 金属薄板の塑性異方性の変形に伴う変化に関する研究
- M 有限要素法による剛塑性体の大変形解析

静岡大学

- M Faraday 定数の研究 (II) (増井敏郎)
- M 比較感度の研究 (I)
- M 液浸法を利用した体積測定用特殊電極に関する研究 (新井智一)
- M 4 節リンク機構の振動に関する研究 (森田信義)
- M すきまのある回転対偶を有するリンク機構の動力学的研究
- M 歯車の誤差に関する研究 (松田 孝)
- M 高速カム機構の動力学的研究
- M 自然双眼立体視の視野あかるさ依存性 (高崎 宏)