誤差ベクトルによる歯車の歯面分離振動の 定量的推定について*

林 巖** 林 輝**

On the Estimation of an Amplitude of Tooth Separation of Gears
during Rotation using Vector Chart of Transmission Error

Iwao HAYASHI, Teru HAYASHI

It is studied a method that a transmission error of gears, which has the close relations to the noises and the vibrations of gears, is expanded into Fourier Series and represented with a vector chart in order to deal quantitatively both with the shape and with the amplitude of the error. In this report, using a dynamic vector chart which is obtained from adding the resonant characteristics of a simple pair of gears to the static vector chart, the method is studied with which an appearance of the separation of gear teeth during rotation and a maximum distance between these separating gear teeth are roughly estimated over a rotational speed range that the meshing frequency is much lower than the natural frequency of the pair of gears. And it is shown this method that the transmission error is represented with a vector chart is useful.

1. 緒 言

前報^{1)~4)}まで、歯車の振動や騒音に最も関係が深いと考えられるかみあい伝達誤差について、それをフーリエ級数に展開してベクトルの形で表し、形状をも含めて数値的に表現して評価する方法について検討をすすめてきた。本報ではさらに、歯車振動系のうちで最も簡単な一対の歯車を対象とし、その振動系の特性を加味した動的誤差ベクトルを導入することによって、歯車対のかみあい周波数が、その固有振動数より十分に低い(約1/8以下)範囲での、歯面分離振動の発生の有無、および発生する分離振動の大きさを、大まかに推定する方法について報告する。

2. 歯車対の振動系

歯車対の運動方程式は多くの書物に導かれているが、ここで簡単に求めておく。

図1に示す歯車対を考え、負荷トルクは一定とする。又、歯面の摩擦によるトルクの変動は無視し、摩擦による減衰のみ考え、等価粘性減衰として取扱う。まず、運動方程式は、

$$\left. \begin{aligned} J_1 \ddot{\theta}_1 &= T_1 - W_d \cdot r \\ J_2 \ddot{\theta}_2 &= W_d \cdot r_2 - T_2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

* 原稿受付 昭和51年7月12日。精機学会昭和51年度関西地方定期学術講演会(昭和51年7月2日)にて発表。

** 正会員 東京工業大学精密工学研究所(横浜市緑区長津田町4259)

$$W_d = k(x_1 - x_2 + \varepsilon_{st}) + C_{eq}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2 + \dot{\varepsilon}_{st})$$

となる。ただし、 J_1, J_2 : 小歯車、大歯車の慣性モーメント、 θ_1, θ_2 : 小歯車、大歯車の回転角、 T_1, T_2 : 入力トルク、出力トルク、 r_1, r_2 : 小歯車、大歯車の基礎円半径、 x_1, x_2 : 小歯車、大歯車の作用線上変位、 W_d : 歯の動荷重、 k : 歯のばね定数、 C_{eq} : 歯面の等価粘性減衰係数、 ε_{st} : 静的かみあい伝達誤差。歯車対の固有振動数の約1/8以下に相当する範囲で、式(1)を取扱うこととし、歯のばね定数 k はピッチ点での値で代用し、一定とする。式(1)を作用線上の運動方程式になおすために、歯車対の等価質量 M を、 $M = (1/M_1 + 1/M_2)^{-1}$ 、 $M_1 = J_1/r_1^2$ 、 $M_2 = J_2/r_2^2$ とおき、歯車の相対変位 $X' (= x_2 - x_1)$ についてとけば、

$$M \ddot{X}' + C_{eq} \dot{X}' + k X' = -W + k \varepsilon_{st} + C_{eq} \dot{\varepsilon}_{st} \quad (2)$$

ただし、 $W = T_1/r_1 = T_2/r_2$

となる。ここで強制項の第3項は小さいので(対象とする回転数範囲で)省略すると、

$$\ddot{X} + 2\zeta \omega_n \dot{X} + \omega_n^2 X = \omega_n^2 \varepsilon_{st} \quad (3)$$

図1 歯車の振動系

となる。ただし、 $X=X'+X_0$ 、 $X_0=W/k$ ：負荷トルクによる静たわみ、 $\omega_n=\sqrt{k/M}$ ：歯車対の固有角振動数、 $\zeta=C_{eq}/2\sqrt{Mk}$ ：歯面の等価粘性減衰比。式(3)は、歯面が接触している状態での運動方程式で、歯面が分離した状態では次のようになる。

$$\ddot{X} = -\omega_n^2 X_0 \quad (4)$$

歯面分離の限界条件； $X - \varepsilon_{st} > X_0$ 。

3. 動的誤差ベクトル

歯車のかみあい伝達誤差は、一般に周期関数であるから、式(3)の強制項中の ε_{st} をフーリエ級数に展開し、

$$\varepsilon_{st} = \sum_n C_n \sin(n\theta + A_n) \quad (5)$$

ただし、 $\theta = \omega t$ 、 $A_1 = 0$

と表せる。本報では、特に1歯ごとのかみあい伝達誤差が同形の場合を対象としており、この場合上式の ω は、歯車の回転数を R_{rpm} 、歯数を Z とすれば、

$$\omega = RZ\pi/30 \quad (6)$$

となる。式(5)で $\theta=0$ としてベクトルの形で表したものが、前報⁵⁾で報告した誤差ベクトルである。

さて、式(3)の解を得るため、まず n 次の成分のみにについて考えれば、よく知られている振動の解から、図2に示した振幅の倍率 λ_n と位相遅れ角 δ_n を用いて、解 X_n は次のようになる。

$$X_n = \lambda_n C_n \sin(n\theta + A_n - \delta_n) \quad (7)$$

ただし、

$$\lambda_n = \frac{1}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{n\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + \left(2\zeta\frac{n\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$\delta_n = \tan^{-1} \frac{2\zeta\frac{n\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{n\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

図2は歯車のかみあい伝達誤差の各成分のうち、高い次数成分ほど低い回転数で共振をおこさせるので、式(7)の倍率 λ_n と位相遅れ角 δ_n を、横軸の対数目盛を普通とは逆に示したものである。

式(3)の解 X は、 X_n の和、すなわち、

$$X = \sum_n \lambda_n C_n \sin(n\theta + A_n - \delta_n) \quad (8)$$

となる。これをベクトルで表せば、誤差ベクトル(静的)の各成分の長さを λ 倍し、時計回りに δ だけ回転させて重ねたものとなり、 y 軸への投影は、常に歯面が接触していると仮定した時の、歯車対の動的なかみあい伝達誤差を表す。このベクトルを動的誤差ベクトルと呼ぶこととする。

さて、かみあい伝達誤差の誤差スペクトルが得られた

(a) 位相特性

(b) 振幅特性

図2 歯車対の共振特性

ならば、図2と同一尺度の対数方眼紙上に、各成分の大きさ C_n と位相角 A_n をプロットし、共振次数の位置を図2の $n\omega/\omega_n=1$ の位置に一致させて重ねれば、容易にその時の $\lambda_n C_n$ と位相角 $(A_n - \delta_n)$ を読みとることができる。このようにして1-0型のかみあい伝達誤差の3次共振の場合について動的誤差ベクトルを求めたものを図3に示す。図3のようにある成分が共振していると、その成分のベクトルは、元の誤差ベクトルより90度遅れる。

4. 歯面分離振動の推定

4.1 歯面分離振動発生予測

常に歯面が接触していると仮定した時の、式(8)の動的なかみあい伝達誤差 X と、式(5)の静的なかみあい伝達誤差 ε_{st} を、式(4)中の歯面分離の限界条件式に代入すると、

$$\sum_n \lambda_n C_n \sin(n\theta + A_n - \delta_n) - \sum_n C_n \sin(n\theta + A_n) > X_0 \quad (9)$$

となる。式(9)の左辺は、図3中に示してあるベクトル

図3 1-0型かみあい伝達誤差の誤差ベクトルと動的誤差ベクトル（3次共振の例）

図4 誤差ベクトルと動的誤差ベクトルの位置関係

$\vec{66}$ の y 軸への投影に相当する。上式の n 次成分をとり出すと図4のようになり、式(9)の左辺に相当するベクトル $\vec{SR}$ の大きさは一定となり、誤差ベクトルと同じ角速度で、反時計方向に回転する。式(9)の左辺はこのような各次数成分のベクトルを連ねたものの y 軸への投影として求めることができ、次のように表せる。

$$\sum A_n C_n \sin(n\theta + \Delta_n - \eta_n) > X_0 \quad (10)$$

ただし、

$$A_n = \sqrt{1 + \lambda_n^2 - 2\lambda_n \cos \delta_n}$$

$$\eta_n = 180^\circ - \cos^{-1} \frac{1 - \lambda_n \cos \delta_n}{A_n}$$

図5は、 ζ を助変数として求めた A_n と η_n を示し、これを用いて動的誤差ベクトルと同じ手法で、差を表すベクトル（前述のベクトル $\vec{SR}$ を各成分について加えたもの）を求めることができる。

従って、上述の差を表すベクトルを原点まわりに回転させ、その先端の軌跡が、 $y = X_0$ なる静たわみの直線を越えるか否かによって、歯面分離振動の発生の有無を予測できる。

図6は、1-0型につき差を表すベクトルの軌跡を求め、

(a) 位相特性

(b) 振幅特性

図5 差を表すベクトルの共振特性

その最大になる付近の様子を示したものである。歯車諸元は表1に示すもので、歯車対の固有振動数は4748Hzとした。図では負荷トルクによる歯の静たわみ量が、かみあい伝達誤差の全振幅の1/12.5の場合を示してあるが、15次共振点（約900rpm）以上で、 $y = X_0$ の直線を越え、歯面分離を生ずると予測することができる。

なお、各共振時に、成分の大きさ $A_n C_n$ が、最大の次数成分の1/10以下の成分を省略した軌跡では、その最大の点を実線で記したほぼ正確な軌跡の最大点の $\pm 10\%$ の範囲内に十分に入っており、又1/5以下を省略した軌跡では、 $\pm 10\%$ の範囲を越える場合（例えば11次共振； -11.5% ）が生ずる。従って差を表すベクトルを求める場合、一番大きな成分の1/10以下の成分は省略しても、実用上さしつかえないと思われる。

4.2 歯面分離の大きさの推定

本節では、歯面分離振動が発生した場合、どの位、歯面が離れ、それが歯車軸に伝えられるか、推定する方法

図はベクトルの最大値 (●印はその第1次近似値で、 θ_1 はそのときの角度を示す) 付近の軌跡を示す

図6 1-0型かみあい伝達誤差の誤差ベクトルの軌跡の例

について検討する。

式(8)を θ につき1回微分すれば、歯面が常に接触していると仮定した時の、動のかみあい伝達誤差の速度が得られ、次式のようになる。

$$v_X = \sum n \lambda_n C_n \cos(n\theta + \Delta_n - \delta_n) \quad (11)$$

$$= \dot{X}/\omega$$

($\dot{X}$ は時間微分を示す)

式(8)と式(11)を対し、縦軸に X を単位として式(8)の大きさを、横軸に $\dot{X}/\omega$ を単位として式(11)の大きさをとって、軌跡を描いたものを図7に示す。

前節と同じく、 $X=X_0$ として静たわみ量を表す直線をひけば、軌跡との交点が、歯面分離振動の発生を示し、交点Pの横座標が、その時の大歯車と小歯車が分離する速度 v_0 を示す。

ここで、歯面分離状態での運動方程式(4)を、大歯車と小歯車の作用線上相対変位 X' について書きなおせば、

$$\ddot{X}' = -\omega_n^2 X_0 \quad (4')$$

となる。歯面分離が生じた瞬間を $t=0$ とすれば、その時の分離を始める速度 $\dot{X}' = \omega v_0$ (時間単位)であり、分離の大きさ $X=0$ であるから、積分して解を求めると、

$$\left. \begin{aligned} \dot{X}' &= -\omega_n^2 X_0 t + \omega v_0 \\ X' &= -\frac{1}{2} \omega_n^2 X_0 t^2 + \omega v_0 t \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

となる。 $\dot{X}'=0$ とおき、 X' が最大になる時刻 t を求め、 X' の最大値を求めれば、次式となる。

$$(X')_{\max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{X_0} \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \quad (13)$$

式(13)中の ω は歯車の回転数に応じて式(6)で求められ、又、図7の軌跡を描く時点で決まっており、 v_0 、 X_0 は

表1 歯車の諸元

モジュール	4.0
圧力角	20°
歯数	21
歯幅	14 mm
転位係数	0
材質	SKS3
熱処理	高周波焼入れ
仕上方法	マージ研削
ビニオン、ギヤ共に同じ

図7 歯面分離開始時の速度 v_D

図7中から読みとることができる。従って歯面分離が生じた場合、その大きさは、式(13)を用いて簡単に推定することができる。又、図7の軌跡は、ある回転数に対して一つの図を描くことが必要であるが、トルクが変化しても、作図しなおす必要はなく $X=X_0$ の直線をひきなおすだけで、その時の歯面分離量を容易に求めることができる。

又、 X' は大、小歯車の作用線上相対変位であるから、式(13)で求められた X' は、歯面分離が発生した後の最大分離量を示しており、これに相当する角度変位が、入出力軸間に伝達されることになる。

1-0型、9-0型、3-0型のかみあい伝達誤差波形について、表1に示す諸元の歯車を試作し、文献1)~3)に示した試験機を用い、平均応答法⁴⁾により実測した歯面分離振動波形と、上記の方法によって最大歯面分離量を推定した例を図8, 9, 10に示す。

図8、1-0型の900 rpmの推定値($6.5 \mu\text{m}$)が、実測値(約 $14 \mu\text{m}$)よりかなり下回っているが、これは駆動電動機のアンバランスによるもので、約1000 rpm付近で駆動電動機に振動が発生した影響と考えられる。その他の推定値はほぼ実測値と一致しており、本方法により実用上十分な精度で推定できることがわかる。又、図では1-0型の歯面分離振動が非常に大きい、例えばさらに回転数が上昇するなどして、上の方法で推定した $(X')_{\max}$ の値が、大、小歯車間のバックラッシュを越える値を示したならば正常なかみあい状態から離れ、次の歯の裏歯面

図8 1-0型の歯面分離振動波形の実測値と歯面分離量の推定

図9 9-0型の歯面分離振動波形の実測値と歯面分離量の推定

図10 3-0型の歯面分離振動波形の実測値と歯面分離量の推定

5. 歯面分離量と負荷トルクおよび回転数との関係

式(13)に基づき、歯面分離の大きさと、回転数、負荷トルクとの関係について、定性的に考察する。

まず回転数、すなわち ω を一定とし、トルクによる影響について考えると、速度 v_0 がトルクに対して独立で、一定の値を保ち、図7に破線で示すように、位相面での軌跡が縦軸に対して平行であるならば、歯面分離量は、トルクに逆比例する。しかし、位相面での軌跡は、局部的に凹凸があっても、大まかには原点まわりの曲線であるから、普通にはトルクが増えれば、図7に示すように、 $v_0 \rightarrow v_0 T$ のように減少すると思われる。従って歯面分離量 $(X')_{\max}$ と、負荷トルク T の間には、

$$(X')_{\max} \propto 1/T^{1+\delta_T} \quad (14)$$

($\delta_T; \delta_T > 0$ なる実数)

なる関係が成り立ち、トルクに対して、逆比例よりも急激な増減関係があるといえる。

次に、トルクを一定とし、回

に衝突する可能性があるとして予測することも可能である。

次に図9の9-0型の $(X')_{\max}$ の推定値が $0.15 \mu\text{m}$ と非常に小さいにもかかわらず、2回目以降の分離振動波形が非常に顕著に現れている。これを図9の右側の軌跡上で考え、さらにトルクが大きくなり、A点で歯面分離が生じたとする。その時の大、小歯車の相対変位の速度 $(\dot{X}/\omega)_A$ は負の値となるが、相対速度が負ということは、この場合、大、小歯車の歯面が近づいていることを示している。従ってこの状態で歯面分離を生ずるということは、大、小歯車の歯面が近づくよりも早く、小歯車あるいは大歯車の歯面がひっこむ部分があることを示しており、2回目以降にかなり大きな歯面分離を生ずる場合があることを示すものと考えられる。従って図9のように軌跡の最大の点が横軸 $(\dot{X}/\omega)$ の負の側に大きく寄っている場合には注意する必要があることがわかる。

回転数すなわち ω による影響について考えると、 v_0 が回転数に対して独立であるならば、歯面分離量は、回転数の2乗又は ω の2乗に比例することになる。しかしながら、回転数が高くなれば、かみあい伝達誤差の種々の成分のうち、より低次の成分が、歯車対の固有振動数に近くなり、共振状態に近づいて、振幅が大きくなる。又、普通には低次の成分の方が、高次の成分よりも元々大きい場合が多いから、図7に示してあるように、回転数が高くなると、位相面での軌跡は、局部的にははずれるかもしれないが、大まかにはより外側に移行し、それに伴って歯面分離する時の速度 v_0 は $v_0 \rightarrow v_0 N$ のように大きくなる。従って、歯面分離量 $(X')_{\max}$ と回転数 N の間には、

$$(X')_{\max} \propto (N)^{2.0+\delta_N} \quad (15)$$

($\delta_N; \delta_N > 0$ なる実数)

図 11 1-0 型かみあい伝達誤差の歯面分離量と回転数，負荷トルクの関係

なる関係が成立し，回転数の 2 乗よりも急激な増減関係があるといえる。

図 11 (a), (b) は，前述の試験機をモデルとして，1-0 型について，数値計算により歯面分離量を求めた一例である。回転数に対して整理した図 11 (a) から明らかに最小 2 乗法によって求められた曲線は，局部的にははずれる部分があるが，全体の傾向はほぼ一致しており，又，図 11 (b) についても同じことがいえ，それぞれ図から， $\delta_T = 0.456$ ， $\delta_N = 1.89$ の値がえられる。

以上のことから，歯面分離を生ずる時の速度 v_0 が静的なかみあい伝達誤差 ε_0 ，負荷トルク T (又は，それによる歯の静たわみ量 X_0)，および回転数 N (又は式 (6) より求められる角速度 ω) に対して全く独立であるならば，式 (13) から，基本的には，歯面分離量 $(X')_{\max}$ は，負荷トルクに逆比例し，回転数の 2 乗に比例することになる。しかし， v_0 は上の三つの変数の関数となり，かみあい伝達誤差の存在によって，式 (14), (15) に示したように，負荷トルク T ，回転数 N の指数の増分 δ_T ， δ_N が加わり，それぞれ，大まかには，トルクと逆比例，回転数の 2 乗と比例する関係よりも，急激な増減関係となる。

6. 結 論

以上，動的誤差ベクトルを考え，歯面分離振動の発生の有無，および歯面分離量の大きさを定量的に推定する方法について検討した結果，次の結論が得られた。

(1) 歯面が分離しないと仮定した時の動的誤差ベクトルと，静的誤差ベクトルの差を表すベクトルをかき，負荷トルクによる歯の静たわみ量をこえるか否かにより，歯面分離振動の発生の有無を知ることができる。

(2) さらに動的誤差ベクトルの速度成分を横軸に，静的誤差ベクトルと動的誤差ベクトルの差を表すベクトルの y 軸への投影を縦軸にとり，軌跡をかき，静たわみ量との

交点の値から，実用上十分な精度で，歯面分離量を推定できる。

(3) 歯面分離量と，負荷トルクおよび回転数とは，基本的には反比例，および 2 乗に比例する関係であるが，かみあい伝達誤差が存在することによって，それよりも急激な増減関係となる。

以上のことから，歯車の静的なかみあい伝達誤差を誤差ベクトルで表示する方法は，ここで報告した方法によって，歯車対の動的挙動の一つである歯面分離振動の様子を容易に推測することができ，非常に有効な方法であることがわかった。

謝 辞

本研究を進めるに当たり，御援助と貴重な助言を賜った東京工業大学総合理工学研究科長・福与人八教授ならびに同精密工学研究所・吉本勇教授に厚くお礼申し上げます。

参 考 文 献

- 1) 林 巖，林 輝：軸系の振動を応用した歯車のかみあい精度測定法，精密機械，**39**，10 (1973) 1009.
- 2) 林 巖，林 輝：歯車の誤差のスペクトル表示，精密機械，**40**，12 (1974) 1093.
- 3) 林 巖，林 輝：歯車のかみあい伝達誤差スペクトルの位相測定，精密機械，**41**，12 (1975) 137.
- 4) 林 巖ほか：平均応答法による歯車のかみあい伝達誤差の測定，精密機械，**42**，5 (1976) 46.
- 5) 林 巖，林 輝：歯車のかみあい伝達誤差のベクトル表示について，精密機械，**43**，3 (1977) 349.