衝撃引張りによる塑性波の伝ば (第4報)*

——提案した構成方程式の種々の実験結果に対する適用——

千 田 豊 満**

Propagation of Longitudinal Plastic Waves Produced by Tensile Impact (4th Report)

——Application of the Proposed Elastic-Plastic-Viscoplastic
Constitutive Equation to the Experiments——

Toyomitsu SENDA

A theoretical analysis is given of the experimental data of the first report on longitudinal plastic waves in the different prestrained aluminum and copper. The elastic-plastic-viscoplastic constitutive equation based on the 5-elements rheological model is discussed, compared with the elastic-viscoplastic constitutive equation. Results show that the elastic-plastic-viscoplastic constitutive equation gives good agreement with the experiments of each prestrained specimen, but the elastic-viscoplastic constitutive equation gives poor agreement with the experiments. The instantaneous plastic response becomes smaller with the amount of prestrain in the aluminum, but vice versa in the copper. The viscosity becomes larger with the amount of prestrain in the aluminum and the copper.

1. 緒 言

筆者は第3報¹⁾で衝撃荷重下における材料の動的特性を図1(a)に示す5要素弾・塑・粘塑性レオロジー模型で近似し、この模型に基づき塑性ひずみ波の伝ばを説明するための構成方程式を導いた。そして、この構成方程式を用いた塑性ひずみ波の伝ばの数値解を求め、第2報²⁾でMalvern型構成方程式³⁾と同じ意味を持つと指摘した図1(b)の4要素弾・粘塑性レオロジー模型に基づく数値解とともに、若干の実験結果と比較検討した。その結果、4要素模型に基づく構成方程式では、前ひずみの大きいアルミニウムの実験結果を説明することができなかったが、5要素模型に基づく構成方程式では、前ひずみの大きいアルミニウムの実験結果も説明できることが明らかになった。従って、筆者はこの5要素模型に基づく構成方程式を、塑性ひずみ波の伝ばを説明するための構成方程式として提案している。

本報では、この5要素模型に基づく構成方程式を用い、第1報⁴⁾で報告した種々の大きさの前ひずみを与えたアルミニウムと銅の実験結果を解析した。また、この場合も4要素模型に基づく構成方程式による計算結果とも比較した。その結果、5要素模型に基づく構成方程式は、前ひずみの大きさが変化しても、実験結果を良好に説明

できることを再確認するとともに、前ひずみの大きさが増加することによる材料の動的特性の変化を明らかにすることができた。また、筆者と同じように衝撃実験でひずみ-時間関係を得ているBakerら⁵⁾とCliftonら⁶⁾の実験結果にもこの構成方程式を適用した。

2. 理 論 解 析

2.1 基礎方程式

図1(a), (b)のレオロジー模型の構成方程式は、模型の両端面間に外力 σ が作用し、ひずみ ϵ が生じるとすると、

$$\sigma \leq \sigma_y \text{ のとき, 両者の模型で共通して,} \quad \sigma = E\epsilon \quad (1)$$

$\sigma > \sigma_y$ のとき, 5要素模型では,

(a) 弾・塑・粘塑性 5要素模型 (b) 弾・粘塑性 5要素模型

図1 レオロジー模型

* 原稿受付 昭和51年12月18日。第27回塑性加工連合講演会(昭和51年11月10日)にて発表。

** 正会員 愛媛大学工学部(松山市文京町3)

図 2 静的応力-ひずみ関係と 2 直線による近似

表 1 静的応力-ひずみ関係から求めたレオロジー模型の要素の値

実験者	筆 者			
材 料	アルミニウム		銅	
E (kg・mm ²)	7 000		12 500	
密度(kg・s ² /mm ⁴)	2.75×10^{-10}		9.14×10^{-10}	
要素名	E_p (kg/mm ²)	σ_y (kg/mm ²)	E_p (kg/mm ²)	σ_y (kg/mm ²)
前ひずみ(%)	5	38	7.6	103
	10	16	9.24	64
	15	8	9.9	47.5

実験者	Baker ら		Clifton ら	
材 料	銅		チタニウム	
E (kg・mm ²)	4 222		11 259	
密度 (kg・s ² /mm ⁴)	9.14×10^{-10}		4.61×10^{-10}	
要素名	E_p (kg/mm ²)	σ_y (kg/mm ²)	E_p (kg/mm ²)	σ_y (kg/mm ²)
	46	6.33	305	38

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{E_p} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{1}{\eta} \frac{E_a}{E_p} \frac{E + E_p}{E} [\sigma - f(\varepsilon)] \quad (2)$$

$$\frac{1}{E_p} = \frac{1}{E_a} + \frac{1}{E_b}$$

$$f(\varepsilon) = \frac{E}{E + E_p} E_p \varepsilon + \frac{E}{E + E_p} \sigma_y$$

4 要素模型では、

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{1}{\eta} \frac{E + E_p}{E} [\sigma - f(\varepsilon)] \quad (3)$$

で表される。ここで、 t は時間、 E , E_p , E_a , E_b , η と σ_y は模型のそれぞれの要素の値を示す。

また、運動方程式と適合方程式は、

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial v}{\partial t} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (5)$$

で表される。ここで、 x は距離、 v は粒子速度、 ρ は材料の密度を示す。

結局、材料の静的応力-ひずみ関係を式 (1) と $f(\varepsilon)$ で近似し、偏微分方程式系 (1), (2), (4), (5) 又は (1), (3), (4), (5) を適当な境界条件のもとで数値積分することにより、それぞれの模型に基づく塑性ひずみ波の伝ばの数値解を求めることができる。数値計算の方法は第 2 報と第 3 報又は他の文献⁷⁾⁸⁾にゆずる。

2.2 初期及び境界条件

対象とする材料の静的応力-ひずみ関係を図 2 (a), (b) で示すように 2 直線で近似し、レオロジー模型の E , E_p と σ_y の要素の値を決定した。そして、それらの値を表 1 に示す。Baker らの銅や Clifton らのチタニウムに対する計算の際に用いた要素の値も、前述したのと同じ方法で求め、表 1 に示す。

数値計算の際、第 3 報では境界条件として衝撃端面での粒子速度を適当に仮定して与えた。

しかし、本報では実験条件の細部が明らかでない他の実験者の結果にも、これらの構成方程式を適用するため、実験結果として明らかに得られている衝撃端面に最も近い観測点でのひずみ-時間関係を境界条件として用いる。

3. 結果及び考察

3.1 筆者の実験結果に対する適用

図 3 (a), (b), (c) に前ひずみ 5%, 10% と 15% のアルミニウムに対する両者の模型に基づく

計算結果を実験結果とともに示す。前ひずみが 5% の結果を示す (a) では、両者の数値計算の結果にはほとんど差異がなく、ひずみ波形の立上がり部分に着目すると、実験結果と良好に一致している。また、いずれの計算結果でも一定の最終ひずみの値は端面からの距離によらず一定となり、実験結果と異なっている。前報でも述べたごとく、一定の最終ひずみの値が端面からの距離とともに減少する事実は筆者の実験結果以外にも一般的に観察されているものである。そしてこの現象を説明することのできる適当な構成方程式はいまだ提案されていないと考えられる。そこで、本報ではひずみの立上がり部分に着目し議論を進める。前ひずみが 10% の結果を示す (b) では、5 要素模型に基づく計算結果は実験結果と比較的良好に一致するが、4 要素模型に基づく計算結果は実験

(a) 前ひずみ 5%

(b) 前ひずみ 10%

(c) 前ひずみ 15%

x : 端面からの距離 (mm), $R_i = E_p/E_s$,
 γ : 流体摩擦 ($\text{kg}\cdot\text{s}/\text{mm}^2$)

図3 種々の前ひずみのアルミニウムのひずみ-時間関係と計算結果との比較

結果と一致せず、小さいひずみの領域では大き過ぎる伝ば速度を、大きいひずみの領域では小さ過ぎる伝ば速度を与える。以上に述べた傾向は、境界条件として端面の粒子速度を適当に仮定して与えた第3報の結果と一致する。さらに前ひずみが15%の結果を示す(c)では、(b)の場合と同じように、5要素模型に基づく計算結果は実験結果と比較的良好に一致するが、4要素模型に基づく計算結果は実験結果と一致しない。つまり、前ひずみが5%の場合には材料の動的特性は5要素模型でも4要素

(a) 前ひずみ 5%

(b) 前ひずみ 10%

(c) 前ひずみ 15%

x : 端面からの距離 (mm), $R_i = E_p/E_s$,
 γ : 流体摩擦 ($\text{kg}\cdot\text{s}/\text{mm}^2$)

図4 種々の前ひずみの銅のひずみ-時間関係と計算結果との比較

模型でも表されると考えられるが、前ひずみが10%以上になると5要素模型でしかその特性を表すことができない。材料の動的特性が前ひずみが5%から10%に増加するときに、瞬間塑性応答が存在しないとした4要素模型で表される特性から、瞬間塑性応答が存在するとした

特性に急激に変化すると仮定するよりも、前ひずみが5%の場合も本質的には5要素模型で表される動的特性を持つと仮定するのが妥当と考えられる。

図4(a),(b),(c)に前ひずみが5%,10%と15%の銅に対する両者の模型に基づく計算結果を実験結果とともに示す。前ひずみが5%の(a)と前ひずみが10%の(b)では、アルミニウムの前ひずみが5%の場合と同じように、両者の計算結果には大きな差異はほとんどなく、実験結果と良好に一致する。しかし、前ひずみが15%の結果を示す(c)では、5要素模型に基づく計算結果は実験結果と比較的良好に一致するが、4要素模型に基づく計算結果は、アルミニウムの前ひずみが10%と15%の場合と同じように、実験結果とほとんど一致せず、小さいひずみの領域では大き過ぎる伝ば速度を、大きいひずみの領域では小さ過ぎる伝ば速度を与える。つまり、瞬間塑性応答が存在しないと仮定している4要素模型は前ひずみが5%と10%の銅の実験結果を説明することはできない。従って、アルミニウムの場合と同じ理由により、前ひずみが5%と10%の銅も本質的には瞬間塑性応答が存在すると仮定している5要素模型によって表される動的特性を持つと考えられる。

以上に述べたごとく、アルミニウムも銅も5要素模型で表される動的特性を持つと考えられるので、次に前ひずみが変化するとき、動的特性のそれぞれの成分の大きさが、つまり流体摩擦と瞬間塑性応答の大きさが、どのように変化するかを考えてみる。瞬間塑性応答の大きさを評価する場合、それぞれの材料によって塑性加工硬化係数が変化するので、その絶対値で評価するよりも、全塑性応答に占める瞬間塑性応答の割合で評価するほうが力学的意味が明確であると考えられる。つまり、第3報でも述べたごとく、5要素模型の両端面間に $\sigma'(>\sigma_s)$

図5 5要素模型に瞬間的に σ' の応力を加えたときに生じるひずみ

なる外力を加えると、図5において瞬間的に $\overline{AB}$ なる弾性ひずみと $\overline{BC}$ なる塑性ひずみが生じ、時間の経過とともに $\overline{CD}$ に沿って塑性ひずみが増加し、最終的に $\overline{CD}$ なる塑性ひずみが増加するので、比 $R_i = \overline{BC}/\overline{BD}$ で瞬間塑性応答の大きさを評価することになる。結局、比 R_i は次式で表される。

$$R_i = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{E_p}{E_b} \quad (6)$$

そして、 R_i の値も含めて、図2、図3の計算結果を求めるときに用いた模型の各要素の値を表2に示す。

アルミニウムの場合、前ひずみが増加すると、流体摩擦の値は増加し、 R_i は減少する。銅の場合、流体摩擦の値は、アルミニウムの場合と同じように、前ひずみの増加とともに増加する。しかし、 R_i の値は、アルミニウムの場合とは異なり、前ひずみの増加とともに増加する。つまり、アルミニウムと銅とでは前ひずみの増加とともに材料に付加される力学的特性の変化の傾向は異なる。

3.2 BakerらとCliftonらの実験結果に対する適用

図6はBakerらの銅のねじり衝撃試験の結果に5要

表2 数値計算のときに用いた各要素の値と R_i の値

実験者	筆 者										
材 料	アルミニウム						銅				
要素名	η (kg·s/mm ²)	E_p (kg/mm ²)	E_a (kg/mm ²)	E_b (kg/mm ²)	R_i		η (kg·s/mm ²)	E_p (kg/mm ²)	E_a (kg/mm ²)	E_b (kg/mm ²)	R_i
前ひずみ (%)	5	0.02	38	76	76	0.5	0.001	103	206	206	0.5
	10	0.2	16	24	48	0.33	0.005	64	153	110	0.58
	15	0.2	8	9.52	50	0.16	0.05	48	117	80	0.6
実験者	Bakerら						Cliftonら				
材 料	銅						チ タ ン				
要素名	η (kg·s/mm ²)	E_p (kg/mm ²)	E_a (kg/mm ²)	E_b (kg/mm ²)	R_i		η (kg·s/mm ²)	E_p (kg/mm ²)	E_a (kg/mm ²)	E_b (kg/mm ²)	R_i
	0.001	46	55.2	276	0.17		0.1	305	313	1100	0.28

図6 銅のねじり試験のひずみ-時間関係と計算結果との比較

図7 チタンのひずみ-時間関係と計算結果との比較

素模型に基づく構成方程式を適用した結果を示す。本実験は横方向の慣性力が無視できるねじり試験であり、また衝撃の持続時間が長く、ひずみ波形が一定の最終ひずみに達するまで測定されているので、構成方程式を適用するための実験結果として適当なものである。同図から明らかなごとく、この場合も5要素模型に基づく計算結果は比較的良好に実験結果を説明することができる。

図7はCliftonらのチタンの圧縮衝撃試験の結果に5要素模型に基づく構成方程式を適用した結果を示す。本実験結果ではひずみ波形は、筆者やBakerらの実験結果と異り、一定の最終ひずみに達していないが、これは衝撃を加えている持続時間が短いためである。従って、構成方程式を適用するための実験結果として望ましいものではないが、ほかにチタンに対する実験結果が報告されていないため、この実験結果に適用した。同図中で破線はばね定数 E_0 の値を比較的大きくした場合の、つまり瞬間塑性応答が小さいとした場合の結果を示す。また、 E_0 の値を無限大とした場合の、つまり瞬間塑性応答が存在せず、材料の動的特性が4要素模型で近似できるとした場合の、数値計算の結果を点線で示す。図から明らかなごとく、破線よりも点線のほうが実験結果に一致し、ひずみ波形から判断する限りにおいては、チタンの動的

特性には瞬間塑性応答が存在しないと考えられる。

4. 結 言

第3報で提案した5要素弾・塑・粘塑性レオロジー模型にもとづく構成方程式を、第1報で報告した種々の前ひずみのアルミニウムと銅の実験結果に適用した。また、Bakerらのねじり試験やCliftonらの圧縮試験の結果にも適用した。以上の結果、次の事柄が明らかになった。

- (1) アルミニウムと銅において、前ひずみの大きさが変化しても、5要素模型に基づく構成方程式はこれらの材料中を伝ばする塑性ひずみ波の挙動を良好に説明することができた。
- (2) アルミニウムと銅とでは、前ひずみが増加した場合に、材料に付加される動的特性の変化の傾向に相違する成分があり、瞬間塑性応答が全塑性応答に占める割合は、アルミニウムでは減少し、銅では増加した。
- (3) 流体摩擦の大きさは、アルミニウムと銅とで共通して、前ひずみの増加とともに増加した。
- (4) この構成方程式を用いることにより、Bakerらのねじり衝撃試験の結果も説明することができた。
- (5) チタンの動的特性には瞬間塑性応答が存在しないと考えられた。

最後に、本研究の遂行にあたり終始御支援を賜りました大阪大学工学部中川憲治教授、岸田敬三助教授と本学都築正之教授に衷心から感謝致します。

参 考 文 献

- 1) 千田豊満: 衝撃引張りによる塑性波の伝ば (第3報)——レオロジー模型にもとづく一つの構成方程式による解析, 精密機械, **43**, 5 (1977) 579.
- 2) 千田豊満ほか: 衝撃引張りによる塑性波の伝ば (第2報)——ひずみ速度依存性理論の検討, 精密機械, **38**, 12 (1972) 1049.
- 3) L.E. Malvern et al.: The Propagation of Longitudinal Waves of Plastic Deformation in a Bar of Material Exhibiting a Strain-rate Effect, J. Appl. Mech., Trans. ASME, **73**, (1951) 203.
- 4) 千田豊満ほか: 衝撃引張りによる塑性波の伝ば——前ひずみの影響, 精密機械, **38**, 8 (1972) 652.
- 5) W.E. Baker et al.: Strain-rate Effects in the Propagation of Torsional Plastic Waves, J. Appl. Mech., Trans. ASME, **88**, (1966) 914.
- 6) R.J. Clifton et al.: Plastic Waves in a Rate Sensitive Material—I Waves of Uniaxial Stress, J. Mech. Phys. Solid, **22**, (1974) 233.
- 7) 山田嘉明: 塑性力学, 日刊工業新聞社 (1966) 175.
- 8) 林 卓夫ほか: 弾塑性波伝ばに及ぼす初期条件・境界条件の影響, 塑性と加工, **14**, 147 (1973) 259.