研究

振動による等価動摩擦係数の挙動*

——楕円振動の場合——

石川 憲一** 横山 恭男***

Behavior of Effective Kinetic Friction by Elliptical Vibration

Ken-ichi ISHIKAWA, Yasuo YOKOYAMA

When a solid body slides on a vibrated surface, effective friction is apparently reduced. This paper treats such a case as a solid body sliding on a surface vibrated elliptically, though in the previous paper it is vibrated rectilinearly. If the velocity ratio V (the velocity of the solid body $\dot{X}$ to the vibration velocity $A\omega$) is nearly zero, then it is shown after analytical calculations that the coefficient of effective kinetic friction, μ_k' gradually approaches a value that is not zero, when the frictional surface is vibrated elliptically with a component in the normal direction. Under certain conditions, however, μ_k' becomes an equivalent negative value; and therefore, in the present paper it should be called "the negative coefficient of the effective kinetic friction". When it is elliptically vibrated without a component in the normal direction, μ_k' gradually approaches zero and is not negative. However, equivalent effects on friction are larger than in the case of rectilinear vibration. Thus, there are some substantial differences between them. These theoretical results have also been confirmed by experimental studies. The analytical calculation in this paper is to be applied to the effects of vibration on friction as a general theory.

1. 緒 言

従来、摩擦と振動とに関連のある諸問題は今まで多くの研究者によって研究・考察されてきており、それらは次のように分類されるものと考えられる。

- i) 摩擦の影響を受ける振動
- ii) 摩擦によって生ずる振動
- iii) 振動の影響を受ける摩擦
- iv) 摩擦と振動を要因とする現象

すなわち、i) の場合は固体摩擦の存在によって振動の挙動がどのように影響を受けるかということについてであって、古くは Hartog 以来数多く取扱われてきている問題であるが、非線形問題のためいまだ必ずしも明快な厳密解は得られていないようである¹⁾²⁾。また ii) の場合はいわゆる摩擦振動³⁾であって摩擦特性の負特性によって生ずる自励振動として考察することができ、クラッチやブレーキのきしみや工作機械のしゅう動部分のスティックスリップ等を例として挙げることができる。

次に、iii) の場合はそれらとは逆に、固体摩擦に及ぼす振動の効果⁴⁾⁵⁾を取扱ったものである。なお、iv) の

場合は摩擦と振動とがそれぞれ独立に重要な因子となっている現象をいい、例えば振動輸送⁶⁾や振動による摩擦⁷⁾等が挙げられる。

筆者らは上述 iii) の場合の一つとして別報⁵⁾において直線振動が作用する場合の等価的な摩擦の減少効果とクーロン摩擦特性の線形化について報告した。楕円振動が作用する場合も見かけ上動摩擦は減少するが、直線振動が作用する場合と比較して、例えば負の等価動摩擦係数というようになかなか本質的に異なった現象がみられる。

従って、本論文ではさらに一般の場合として直線振動をも包括する楕円振動が作用する場合の等価的な動摩擦の挙動について報告する。

2. 作用する振動と若干の仮定

各座標軸については図 1 に示すように、物体のすべり方向を X 軸、摩擦面に垂直な方向を Z 軸、 X, Z 各軸に直角な方向を Y 軸とする。

いま、 a, b, c を各軸方向の変位振幅、 ω を円振動数、 δ_y, δ_z を X 軸方向の振動に対する Y および Z 軸方向の振動の位相角とし、極座標に準じて表せば、各振動変位成分はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} x &= A \sin \gamma \cos \phi \sin \omega t \\ y &= A \sin \gamma \sin \phi \sin(\omega t + \delta_y) \\ z &= A \cos \gamma \sin(\omega t + \delta_z) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

* 原稿受付 昭和 52 年 3 月 28 日。昭和 44 年度 精機学会 春季大会学術講演会 (昭和 44 年 4 月 4 日) にて発表。

** 正 会 員 金沢工業大学 (金沢市南郊野々市町扇が丘 7 番 1 号)

*** 正 会 員 金沢大学工学部 (金沢市小立野 2-40-20)

図1 振動の方向と動摩擦力の成分

で表される。ここで、 $A = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, $\phi = \tan^{-1}(b/a)$: X - Y 平面上での方向角, $\gamma = \tan^{-1}(\sqrt{a^2 + b^2}/c)$: Z 軸からの方向角。

なお、解析に当たって速度成分が重要な要素となるので、図1は各速度成分について表してある。また、位相角は $-\pi \leq \delta_y \leq \pi$, $-\pi \leq \delta_z \leq \pi$ の範囲について取扱うが、 δ_y, δ_z がともに0あるいは $\pm\pi$ のときは直線振動、一般には楕円振動を表す。その結果、振動の方向は振動の対称性を考えれば、 $0 < \gamma \leq \pi/2$, $0 \leq \phi \leq \pi/2$ の範囲について考察すれば十分である。

ところで、作用する楕円振動は $\gamma, \phi, \delta_y, \delta_z$ の各パラメータに依存して種々の形態となることから、本稿では取扱いの都合上表1のように分類することにする。

次に、このような楕円振動の影響を受ける動摩擦の挙

表1 楕円振動の形態

	A	B	C	D	E	F	G	H
x	○	○	○	○	○	×	○	
y	○	○	○	○	×	○	○	
z	○	○	○	○	○	○	×	
δ_y	○	○	○	×	×	○	○	×
δ_z	*	**	***	○	○	○	×	×
振動の形態	一般	β 平面	α 平面	ϕ 平面	X - Z 平面	Y - Z 平面	X - Y 平面	直線
負の μ_k' になりうる条件	○	○	○	○	○	×	×	×

○…あり, ×…なし

直線振動の場合の詳細は省略してある。

* $\delta_z \approx \delta_y$, $\delta_z \approx \delta_y \pm \pi$

** $\delta_z = \delta_y$, $\delta_z = \delta_y \pm \pi$

β : Y - Z 平面内において Z 軸からの方向角。ただし、 $\beta = \pm \tan^{-1}(\tan \gamma \cdot \sin \phi)$

複号は $\delta_z = \delta_y$ のとき(+), $\delta_z = \delta_y \pm \pi$ のとき(-)

*** $\delta_z = 0$, $\delta_z = \pm \pi$

α : X - Z 平面内において Z 軸からの方向角。ただし、 $\alpha = \pm \tan^{-1}(\tan \gamma \cdot \cos \phi)$

複号は $\delta_z = 0$ のとき(+), $\delta_z = \pm \pi$ のとき(-)

$\gamma = \pi/6$, $\phi = \pi/4$, $A = 1$, $V = \sqrt{2}/5$

(1): $\delta_y = \pi/4$, $\delta_z = 0$ (α 平面), (2): $\delta_y = \delta_z = \pi/4$ (β 平面)一点鎖線: 楕円振動の速度ベクトルの軌跡, 実線: すべり面上の動摩擦力ベクトルの軌跡

図2 振動速度と動摩擦力との関係 (α および β 平面内の楕円振動の場合)

動を解析するにあたって、物体の運動に関し問題点を簡単にするために若干の仮定をおく必要がある。すなわち、動摩擦力はアモントン・クーロンの法則に従い、作用する振動は微小で振動の影響によって生ずる交番摩擦力に比べて物体の応答は無視できる程小さい*と考える。また、等価的な摩擦力は振動の性質や方向にかかわらずすべり方向についてのみ考察し、かつ摩擦の本質上物体はすべり面上に拘束され、分離跳躍は伴わないものとする。

3. すべり面上の動摩擦力

図1に示すように、任意の時間におけるすべり面の振動速度を $\vec{OA}$ で表すと、 X - Y 平面上の成分は $\vec{OD}$ となる。このとき、物体は速度 $\vec{X}$ で X 軸方向にすべり運動をするから、その相対摩擦速度 $\vec{OE}$ は $\vec{OD}$ と $\vec{X}$ とのベクトル差として求められ、相対摩擦速度成分 V_x, V_y は

$$\left. \begin{aligned} V_x &= A\omega \sin \gamma \cos \phi \cos \omega t - \dot{X} \\ V_y &= A\omega \sin \gamma \sin \phi \cos(\omega t + \delta_y) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

で表される。

したがって、時刻 t における X 軸方向と $\vec{OE}$ とのなす角を $\theta(t)$ で表せば、 $\theta(t)$ は

$$\theta(t) = \tan^{-1}(V_y/V_x)$$

* 物体の応答が無視できない場合は別報⁹⁾に論じてある。

図3 すべり方向の動摩擦力の1周期間の変動 (X-Y平面内の楕円振動の場合)

$$= \tan^{-1} \left\{ \frac{\sin \gamma \sin \phi \cos(\omega t + \delta_y)}{\sin \gamma \cos \phi \cos \omega t - V} \right\} \quad (3)$$

となる。ここで、 $V = \dot{X}/A\omega$ は速度比を表す。

このとき、摩擦の性質よりすべり面上の摩擦力 R は、 $\theta(t)$ の方向に作用する。振動が作用しない場合の真の動摩擦力を $\mu_k mg$ (μ_k : 真の動摩擦係数, m : 物体の質量, g : 重力加速度) として法線方向の振動加速度による慣性力の重畳を考慮すれば、 R は次のようになる。

$$R = \mu_k mg + \mu_k m \ddot{z} \\ = R_0 \{1 - A \cos \gamma \sin(\omega t + \delta_z)\} \quad (4)$$

ここで、 $R_0 = \mu_k mg$, $A = A\omega^2/g$ (加速度比) を表す。

図2には、 α 平面および β 平面内の楕円振動が作用する場合の動摩擦力ベクトルの軌跡 (1), (2) が示されているが、一般の楕円振動が作用する場合もその軌跡は類似 $R_x = R \cos \theta(t)$

$$= \frac{R_0 \{1 - A \cos \gamma \sin(\omega t + \delta_z)\} (V - \sin \gamma \cos \phi \cos \omega t)}{\sqrt{(\sin \gamma \cos \phi \cos \omega t - V)^2 + \{\sin \gamma \sin \phi \cos(\omega t + \delta_y)\}^2}} \quad (5)$$

で表されるが、 R_x は振動の方向、大きさ、位相角に応じてそれぞれ特有の変動を示す。そこで、楕円振動の影響を受ける場合の R_x について若干例を示しながら説明する。

図3には、X-Y平面内の楕円振動が作用する場合の R_x の振動1周期間にわたる変動が示されている。 R_x は時間とともに変化するが、 R_x の正負の反転は V が次式を満たすときに生ずる。

$$V < \cos \phi \quad (6)$$

ところで、直線振動の場合には、時刻 $\pi/2$, $3\pi/2$ において振動速度がゼロとなるから、それらの時刻で $R_x = R_0$ となる。しかしながら、楕円振動では時刻 $\pi/2 - \delta_y$ のとき、 $R_x = R_0$ となる。そこで、 $R_x = -R_0$ となる条

図4 すべり方向の動摩擦力の1周期間の変動 (β 平面内の楕円振動の場合)

した挙動を示し、時間とともに変化する。しかしながら、X-Y平面内の楕円振動が作用する場合には、法線方向成分を有しないから、動摩擦力ベクトルの軌跡は半径 R_0 の円周上に沿って変動する。

4. すべり方向の動摩擦力

一般に、摩擦力は物体のすべり方向と反対方向に作用することから、第2章の仮定に従い振動が作用する場合も物体のすべり方向の動摩擦力 R_x を取扱うことにする。その結果、すべり方向の動摩擦力 R_x は、図2を参照して

$$V < \cos(\pi/2 - \delta_y) \cos \phi \quad (7)$$

で求められ、図3の場合は、 $V < 0.25$ となると、 $R_x = -R_0$ に達する。

図4には、 β 平面内の楕円振動が作用する場合における R_x の1周期間の変動が示されている。この場合は法線方向の振動加速度の影響が現れるとともに位相角にも依存して、時刻 $\pi/2 - \delta_y$ のとき $R_x = R_0 \{1 - A \cos \gamma \cos(\delta_z - \delta_y)\}$ となり、時刻 $3\pi/2 - \delta_y$ のとき、 $R_x = R_0 \{1 + A \cos \gamma \cos(\delta_z - \delta_y)\}$ 、あるいは $R_x = -R_0 \{1 + A \cos \gamma \cos(\delta_z - \delta_y)\}$ になるが、 $R_x = -R_0 \{1 + A \cos \gamma \cos(\delta_z - \delta_y)\}$ となる条件は

$$V < \sin \gamma \cos(3\pi/2 - \delta_y) \cos \phi \quad (8)$$

で求められる. ところで, 図4の場合は時刻 $3\pi/4$ で $R_x \doteq 0.293R_0$ となり, 時刻 $7\pi/4$ で $R_x \doteq 1.707R_0$, また式(8)より, $V < \sqrt{2}/4 \doteq 0.354$ のとき, $R_x \doteq -1.707R_0$ に達する.

このように楕円振動と直線振動とでは, R および R_x の変動に関しかなりの相違点が存在することがわかる.

$$\frac{\bar{R}_x}{R_0} = \frac{\mu_k'}{\mu_k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\{1 - A \cos \gamma \sin(\omega t + \delta_z)\} (V - \sin \gamma \cos \phi \cos \omega t)}{\sqrt{(\sin \gamma \cos \phi \cos \omega t - V)^2 + \{\sin \gamma \sin \phi \cos(\omega t + \delta_y)\}^2}} d(\omega t) \quad (9)$$

楕円振動が作用する場合には, 等価動摩擦係数の減少に関して位相角の依存性が顕著であることから, まず位相角の影響について考察することにする.

図5には, X - Y 平面内の楕円振動が作用する場合の等価動摩擦係数の減少と位相角 δ_y の関係の数値計算例が示されている. この場合には摩擦低減効果の最も大きい位相角は $\delta_y = \pm\pi/2$ のときで, 振動の方向は $\phi \rightarrow 0$ であるが, 数値計算の結果より $0 < \phi < \pi/6$ では近似的に相等しい.

図6, 7には, 法線方向成分を有する楕円振動が作用する場合における等価動摩擦係数の減少と位相角との関係の数値計算例が示されている. これらの結果を比較すると, 条件によっては μ_k' はみかけ上負となることがわかる. 元来, 摩擦力は物体の運動を妨げる方向に働く受動要素であるが, 振動の位相角に依って物体の運動を助ける方向に働く, いわゆる“負抵抗”の現象を呈するようになる. このことは一種の自動振動現象の原因にもなり得, 楕円振動が作用した場合摩擦を含む機器要素の動作の安定性をそこなう原因にもなりうる. そして, このような結果はたとえ直線振動や法線方向成分を有しない楕円振動が作用しても, $V \rightarrow 0$ とともに $\mu_k' \rightarrow 0$ となるこ

図5 等価動摩擦係数の減少と位相角との関係 (X - Y 平面内の楕円振動の場合)

5. 等価動摩擦係数(力)

楕円振動の影響を受ける R_x は特徴のある周期的変動を示すことがわかったが, 等価的には時間について平均した動摩擦力が物体に作用した場合と考えることができる. したがって, その平均的な動摩擦力を等価動摩擦力 $\bar{R}_x$ (また, μ_k' : 等価動摩擦係数) と定義すれば, それらは次式で表される.

図6 等価動摩擦係数の減少と位相角との関係 (一般の楕円振動の場合)

図7 等価動摩擦係数の減少と位相角との関係 (一般の楕円振動の場合)

とは本質的に異なる点である。したがって、以後このような場合、「負の等価動摩擦係数」と呼ぶことにする。

図 8, 9, 10 には等価動摩擦係数の減少と振動の方向および速度比との関係の数値計算例が示されている。これらの結果からも、 μ_k' の減少は γ, ϕ, V に依存するが、同一の振動方向であっても、位相角 δ_z に著しく影響されることがわかる。

ところで、このような動摩擦の等価的な負抵抗化に関して、最も有効な振動の方向は簡単な考察の結果 (図 9, 10 参照)、 $\phi=0$ すなわち $X-Z$ 平面内の楕円振動の場合であることがわかる。したがって、 $\phi=0$ の場合について次のような若干の解析を行ってみることにする。

振動による動摩擦力の正負の反転は $V_x=0$ のときに生じ、その時刻 τ_1, τ_2 は

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \cos^{-1}(V/\sin \gamma) \\ \tau_2 &= 2\pi - \cos^{-1}(V/\sin \gamma) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

で表される。ただし、 $V < \sin \gamma$

したがって、 μ_k'/μ_k は

$$\frac{\mu_k'}{\mu_k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \pm \{1 - \Lambda \cos \gamma \sin(\omega t + \delta_z)\} d(\omega t) \quad (11)$$

を計算することによって得られる。ここで、複号は、 $0 \leq \omega t \leq \tau_1, \tau_2 \leq \omega t \leq 2\pi$ のとき (-), $\tau_1 < \omega t < \tau_2$ のとき (+) を表す。その結果、 μ_k'/μ_k は

$$\frac{\mu_k'}{\mu_k} = \frac{2}{\pi} \left[\sin^{-1} \left(\frac{V}{\sin \gamma} \right) + \Lambda \cos \gamma \sin \left\{ \cos^{-1} \left(\frac{V}{\sin \gamma} \right) \right\} \sin \delta_z \right] \quad (12)$$

で表される。そして、式 (12) より μ_k' が負の最大値をとる位相角は $\delta_z = -\pi/2$ であり、 $V \rightarrow 0$ とともに μ_k'/μ_k は $-(2/\pi)\Lambda \cos \gamma$ に漸近する。一方、 μ_k' の減少に及ぼす振動効果の最も少ない位相角は $\delta_z = \pi/2$ であり、 $V \rightarrow 0$ とともに μ_k'/μ_k は $(2/\pi)\Lambda \cos \gamma$ に漸近する。また、 $V \geq \sin \gamma$ のときには動摩擦力の正負の反転が生じなくなるから、図 9, 10 の場合には、 $V \geq 0.5$ で $\mu_k'/\mu_k = 1$ となることを意味している。

以上のような考察から位相角 δ_z は μ_k' を負とする際の重要なファクタであるが、 α 平面内の楕円振動 ($\delta_z=0, \pm\pi$) が作用する場合にも、 δ_y の範囲によっては $V \rightarrow 0$ のとき μ_k' が負となりうるということが数値計算の結果からもわかっている。しかしながら、 δ_y の影響は δ_z に比較して非常に少ない。

このように等価動摩擦係数は作用する楕円振動の形態によってさまざまな挙動を示すが、一般に μ_k' を負とし得る条件を整理すると次のようになる。すなわち、 $V \rightarrow$

図 8 等価動摩擦係数の減少と振動の方向との関係

図 9 等価動摩擦係数の減少とすべり面上の振動の方向との関係

図 10 等価動摩擦係数の減少と速度比との関係 ($X-Z, \phi$, $Y-Z$ 平面内の楕円振動の場合)

0 として $0 \leq \phi < \pi/2$ において (i) $-\pi < \delta_z < 0$, (ii) $\delta_z = 0$ のとき $-\pi/2 < \delta_y < 0$ ($\pi/2 < \delta_y < \pi$), $\delta_z = \pm\pi$ のとき $0 < \delta_y < \pi/2$ ($-\pi < \delta_y < -\pi/2$)。しかしながら、 $\phi = \pi/2$ すなわち $Y-Z$ 平面内の楕円振動が作用する場合には、 X 方向の振動成分が存在しないため動摩擦力の正負の反転が生じなくなり、位相角の影響もなくなって μ_k' は負となることはない (図 9, 10 参照)。その結果、直線振動が作用する場合と一致する。

6. 実験

実際に際しては、 $X-Y$ 平面ならびに ϕ 平面 ($X-Z, Y-Z$ 平面を含む) 内の楕円振動が作用する場合の実験が一装置で完了するように設計製作し、以下のような一連の実験を行った。

図 11 には、 $X-Y$ 平面内の実験装置の主要部が示され

図 11 スライダによる実験装置の主要部

ている。本実験の場合においては、動電型加振機①、②を取付けているテーブル⑤は水平位置にセットされている。すべり面③は厚さ5mmの板ガラスで、平行ばねをとおして2台の加振機によって励振されるように4本のリン青銅の丸棒で支持されている。楕円振動は低周波発振器から発振された電気信号を位相差計に入れ、所定の位相差を信号に与え電力増幅器を通して加振機を駆動することによって得られる。スライダ④には8°の鋼球がうめこまれ、平行ばねの動力計⑥に10°の鉄製の丸棒と回転軸受⑤を介して取付けられている。スライダ全体は案内⑦によって矢印の方向にある一定の速度で移動する。その結果、すべり面に対してすべり方向を水平面内で変化させれば、X-Y平面内の楕円振動の実験が行える。次に、 ϕ 平面内の実験に際しては前述の装置を水平位置から90°回転させ垂直にセットしなおすことによって満足される。実験方法は同様である。

実験に当たっては、すべり面および鋼球はベンジンで油脂、ごみなどの付着物を取除く程度の表面処置にとどめた。実験条件は、荷重400~500g、摩擦速度2.2~14.5mm/s、振動数20, 30Hz、振幅0.05~0.5mm、振動方向 $0 < \gamma \leq \pi/2$, $0 \leq \phi \leq \pi/2$, 位相角 $-\pi \leq \delta_y \leq \pi$, $-\pi \leq \delta_z \leq \pi$ として各条件の組合せについて実験を行った。なお、ガラスと鋼球間の真の動摩擦係数は約0.15であった。

図12は得られた実験結果のうちで、X-Z平面内の楕円振動が作用する場合について、片対数図表に速度比に対する μ_k'/μ_k の実験値をプロットしたものである。いずれの条件の場合もかなりの精度で理論曲線(実線)と一致していることがわかる。そしてこの場合には負の等価動摩擦係数を生ずることが実験的にも確認された。

図 12 等価動摩擦係数の減少実験例(X-Z平面内の楕円振動の場合)

7. 結 論

以上の結果を要約すると次のようになる。

- (1) 楕円振動の形態によって、動摩擦力の変動は直線振動の場合と比較してかなり異なる。
- (2) 法線方向成分を有しない楕円振動が作用する場合には、 V がゼロに近づくとともに μ_k' はゼロに収束するが、直線振動の場合より μ_k' の減少に及ぼす効果は大で、 $\delta_y = \pm \pi/2$ が最も有効な位相角である。
- (3) 法線方向成分を有する楕円振動が作用する場合には、 V がゼロに近づいても μ_k' は正あるいは負のある値に漸近し、ゼロには収束しない。
- (4) 一般に、 μ_k' を負とする条件は $0 \leq \phi < \pi/2$ において、 $V \rightarrow 0$ として① $-\pi < \delta_z < 0$ あるいは② $\delta_z = 0$ のとき $-\pi/2 < \delta_y < 0$ ($\pi/2 < \delta_y < \pi$)、 $\delta_z = \pm \pi$ のとき $0 < \delta_y < \pi/2$ ($-\pi < \delta_y < -\pi/2$)の場合である。
- (5) μ_k' を負とする最も有効な振動の方向と位相角は $\phi = 0$, $\delta_z = -\pi/2$ であり、 V がゼロに近づくとともに、 μ_k'/μ_k は $-(2/\pi)A \cos \gamma$ に漸近する。

最後に、本研究に関して御指導を賜りました東京大学名誉教授西村源六郎先生、東京大学教授神保泰雄先生に感謝致します。また、計算や作図等に協力された金沢工業大学機械工学科小坂實氏に謝意を表します。

(この研究の計算は金沢工業大学電子計算機 IBM 370/158 によって行った。)

参 考 文 献

- 1) J. P. Den Hartog: Forced Vibrations with Combined Viscous and Coulomb Damping, Phil. Mag., 9, (1930) 801.
- 2) 清水辰次郎: 非線型振動論, 培風館 (1965) 114.
- 3) 例えば, D. Sinclair: Frictional Vibrations, J. Appl. Mech., (1955, 6) 207.
- 4) 横山恭男, 岡部佐規一: 静摩擦係数に及ぼす振動の影響 (第2報), 精密機械, 33, 8 (1967) 509.
- 5) 横山恭男, 岡部佐規一, 石川憲一: 振動による等価動摩擦係数の減少, 日本機械学会論文集, 36, 286 (1970) 915.
- 6) 岡部佐規一, 横山恭男, 神保泰雄: 振動輸送の研究 (第1報), 精密機械, 35, 5 (1969) 299.
- 7) 石川憲一, 横山恭男: 振動を利用した高分子材料の精密切断の研究, 昭和51年度精機学会秋季大会学術講演会前刷 (1976) 27.