研 究

円筒形希土類磁石による反発力系の動特性 (第1報)*

—反発力の解析—

小 島 宏 行**

Dynamic Characteristics of the Repelling Force System Consisting of
the Cylindrical Rare-earth Magnets (1st Report)

—Analysis of the Repelling Force—

Hiroyuki KOJIMA

In this paper, characteristics of the repelling force acting between the same poles of the cylindrical rare-earth magnets are presented. The analysis is made theoretically under the assumption that the magnets are homogeneous and magnetized uniformly along the axial direction. From the numerical calculation it becomes clear that the repelling force has nonlinear characteristics as follows:

- (1) The repelling force is proportional to the product of the following two quantities; the square of the magnetization strength and the characteristic function determined by the shape and the volume as well as the center distance of the magnets.
- (2) Within the limited range of the vibration amplitude, the repelling force may be assumed to be inversely proportional to the n th power of the center distance between the two magnets.
- (3) The nonlinearity of the repelling force depends upon both the characteristic exponent decided by the shape of the magnets and the falling amount of the free magnet due to the gravity.
- (4) The results of the experiment show the good coincidence with those of the numerical calculation.

1. 緒 言

最近開発された希土類磁石は、従来のアルニコ、フェライト磁石に比べ格段に強力な磁気エネルギーを有し、保磁力も顕著である^{1)~3)}。このような磁石を応用した機械振動の制振に関する研究^{4)~6)}が行われているが、その中で円筒形磁石の同種磁極間に働く反発力を、ばね作用として応用した磁気動吸振器に関する研究⁴⁾⁵⁾がある。これらの研究によれば、希土類磁石による反発力は非線形のばねとして有効に作動し、ある限られた範囲内では磁石中心間距離の逆 n 乗比例形に近い特性を示す。この反発力は可動磁石の静つりあい位置の近傍でTaylor展開することにより、振動変位のべき級数で表し得ることが示されているが、その解析的な裏付けについては検討されていない。

本研究では円筒形希土類磁石による反発力特性を、電磁気学的に解析し、磁石の形状と反発力の関係を定量的

に調べ、それらの結果の一部を実験結果と対照したものである。

2. 解析の方法

2.1 希土類磁石の磁気特性

希土類磁石の磁気特性を他の磁石のそれらと比較したものが図1である。図によれば、希土類磁石は大きな磁気エネルギーと保磁力を有するほか、履歴特性がほぼ直線で磁化の強さも一定とみなしうることがわかる。ここで、円筒形の希土類磁石を同極どうしで対向させた図2の解析モデルを想定すると、両磁石間距離が振動的に変化する場合、振動変位に対応する交番減磁力と重力による可動磁石の降下量に基づく定常減磁力とが両磁石に作用する。この場合、動作点は希土類以外の磁石の場合には、図1の一点鎖線で示す例のように、その傾斜と領域についてはそれぞれ可逆透磁率と振幅の変動に応じて変化するマイナーループ上を移動することが知られている。これに対し、希土類磁石ではループを描かず可逆透磁率と減磁曲線の傾斜($=B/H$)がほぼ1であることから、動作点が常に直線とみなしうる減磁曲線上を往復するこ

* 原稿受付 昭和52年5月13日。昭和52年度精機学会春季大会学術講演会(昭和52年4月5日)にて発表。

** 正 会 員 群馬大学工学部(桐生市天神町1-5-1)

図1 磁気特性

図2 解析モデル

となるので、振動的な逆磁界に対し極めて安定であると言える^{1)~3)}。

これまでのことから、希土類磁石が磁氣的なばねとして用いられる場合、好ましい特性を有していることがわかる。

2.2 磁界のベクトルポテンシャル

本研究で対象としている解析モデルは、図2のとおり軸対称であるので、以下の解析では円筒座標を用いてある。電磁気学⁷⁾によれば、磁化された物体のベクトルポテンシャルは、等価体積電流密度と等価表面電流密度によって表される。他方、図1から磁化の強さ(点線)を示す $J-H$ 曲線はその傾斜が極めて小さいので、本研究では J の値を一定とみなして解析することにした。このことから、磁化の強さの回転 ($\text{rot } \mathbf{J}$) を真空透磁率 μ_0 で除して得られる等価体積電流密度はゼロとなる。また、

等価表面電流密度は、磁化の強さと磁石の表面の外向き法線ベクトル $\mathbf{n}$ とのベクトル積 ($\mathbf{J} \times \mathbf{n}$) を μ_0 で除した形で表されるので、図2に示すように二つの磁石 A, A' のそれぞれの四つの面を S_1, S_2, S_3, S_4 、 θ 方向の単位ベクトルを $\mathbf{i}_\theta$ とすれば、等価表面電流密度は A 磁石の場合、 S_1, S_2 両面ではゼロ、 S_3, S_4 両面では $(-J/\mu_0)\mathbf{i}_\theta$ 、 $(J/\mu_0)\mathbf{i}_\theta$ の値となる。同じことが磁石 A' についても言えるが、 S_3, S_4 面の電流方向については磁石 A とは逆向きである。従って解析モデルのベクトルポテンシャルは θ 成分 (A_θ) のみとなり、電流密度が磁石の等価表面電流密度と同じで、長さが t 、直径がそれぞれ D および d なる等価二重ソレノイドに置き換えて考えることができる。一方、中心が原点にあり半径 a 、電流 I の円電流によるベクトルポテンシャル $\bar{A}_\theta$ は次のとおりである⁷⁾。

$$\bar{A}_\theta = \mu_0 I f_a(a, r, z) \quad (1)$$

$$f_a(a, r, z) = \frac{1}{\pi k} \sqrt{\frac{a}{r}} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} k^2 \right) K(k) - E(k) \right\} \quad (2)$$

$$k^2 = \frac{4ar}{\{(a+r)^2 + z^2\}} \quad (3)$$

ここで、 $K(k)$ は第1種完全楕円積分、 $E(k)$ は第2種完全楕円積分、 k は楕円積分母数である。式(1)~(3)を用いて A_θ を求めると次のようになる。

$$A_\theta = J \int_{z_1}^{z_2} \{ f_a(P_2) - f_a(P_1) \} d\xi + J \int_{-z_2}^{-z_1} \{ f_a(P_1) - f_a(P_2) \} d\xi \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} (P_1) &\equiv (a_1, r, z - \xi) \\ (P_2) &\equiv (a_2, r, z - \xi) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここで、 ξ は積分パラメータとする。

2.3 磁界分布

軸対称系における磁束密度の r, θ, z 成分 B_r, B_θ, B_z はベクトルポテンシャルを用いて次のように書ける。

$$B_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial z} \quad (6)$$

$$B_\theta = 0 \quad (7)$$

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} \quad (8)$$

式(4), (5)を用いて式(6), (8)を書き改めると次のようになる。

$$B_r = J \int_{z_1}^{z_2} \{ f_{br}(P_2) - f_{br}(P_1) \} d\xi + J \int_{-z_2}^{-z_1} \{ f_{br}(P_1) - f_{br}(P_2) \} d\xi \quad (9)$$

$$B_z = J \int_{z_1}^{z_2} \{f_{bz}(P_2) - f_{bz}(P_1)\} d\xi \\ + J \int_{-z_2}^{-z_1} \{f_{bz}(P_1) - f_{bz}(P_2)\} d\xi \quad (10)$$

$$f_{br}(a, r, z) = \frac{1}{2\pi} \frac{z}{r\sqrt{(a+r)^2 + z^2}} \\ \times \left\{ \frac{a^2 + r^2 + z^2}{(a-r)^2 + z^2} E(k) - K(k) \right\} \quad (11)$$

$$f_{bz}(a, r, z) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(a+r)^2 + z^2}} \\ \times \left\{ \frac{a^2 - r^2 - z^2}{(a-r)^2 + z^2} E(k) + K(k) \right\} \quad (12)$$

$$T_{Pq} = \begin{pmatrix} T_{rr} & T_{r\theta} & T_{rz} \\ T_{\theta r} & T_{\theta\theta} & T_{\theta z} \\ T_{zr} & T_{z\theta} & T_{zz} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2\mu_0} (B_r^2 - B_\theta^2 - B_z^2) & \frac{1}{\mu_0} B_r B_\theta & \frac{1}{\mu_0} B_r B_z \\ \frac{1}{\mu_0} B_\theta B_r & \frac{1}{2\mu_0} (B_\theta^2 - B_r^2 - B_z^2) & \frac{1}{\mu_0} B_\theta B_z \\ \frac{1}{\mu_0} B_z B_r & \frac{1}{\mu_0} B_z B_\theta & \frac{1}{2\mu_0} (B_z^2 - B_r^2 - B_\theta^2) \end{pmatrix} \quad (15)$$

ここで、 F_p は $\mathbf{F}$ の P 成分、 T_{pq} は円筒座標系の応力テンソル、 n_q は dS の法線ベクトルの q 成分である。いま積分領域を座標原点を含む $r-\theta$ 平面に選べば、解析モデルにおける磁束密度は r 成分だけとなり、反発力は式(14)、(15)から次のように書くことができる。

$$F_r = 0 \quad (16)$$

$$F_\theta = 0 \quad (17)$$

$$F_z = \int_0^\infty \frac{1}{\mu_0} \pi r (B_r)^2_{z=0} dr \quad (18)$$

式(9)、(11)を用いて式(18)を書き改めると次のようになる。

$$F(y) = F_z = \frac{J^2}{\mu_0} f(y) \quad (19)$$

$$y = 2z_1 + t \quad (20)$$

$$f(y) = 4\pi \int_0^\infty r \left[\int_{z_1}^{z_2} \{f_{br}(a_2, r, -\xi) - f_{br}(a_1, r, -\xi)\} d\xi \right]^2 dr \quad (21)$$

ここで、 $f(y)$ は磁化の強さに無関係な量で磁石の形状と体積から決定される磁石中心間距離の特性関数と考え得るので、この関数から反発力特性を定量的に調べることが可能である。

一方、反発力を Lorentz's force の原理に従い計算することもできる。前述と同様に反発力は z 成分だけとなることおよび同一の磁石に働く力は作用反作用の原理に

他方、磁力線の方程式は磁力線にそって磁束 ϕ が一定となることから次のように書ける。

$$\phi = 2\pi \int_0^r r B_z dr = 2\pi r A_\theta = \text{const} \quad (13)$$

2.4 反発力

磁界内領域に作用する力は、Maxwell の応力テンソルによって計算できるので、解析モデルにおける反発力 $\mathbf{F}$ は以下の手順で求められる。まず Maxwell の応力テンソルは次のようである。

$$F_P = \int_s T_{pq} n_q dS \quad (14)$$

より相殺されることを考慮して、この場合の特性関数 $f'(y)$ を求めると次のようになる。

$$f'(y) = 2\pi a_1 \int_{z_1}^{z_2} d\eta \int_{-z_2}^{-z_1} \{f_{br}(a_1, a_1, \eta - \zeta) - f_{br}(a_2, a_1, \eta - \zeta)\} d\zeta \\ + 2\pi a_2 \int_{z_1}^{z_2} d\eta \int_{-z_2}^{-z_1} \{f_{br}(a_2, a_2, \eta - \zeta) - f_{br}(a_1, a_2, \eta - \zeta)\} d\zeta \quad (22)$$

ここで、 ζ は積分パラメータである。なお、 $f(y)$ と $f'(y)$ は数値解析的に等価であることが確認された。

図3 半径方向距離と磁束密度 (試料1の磁石の場合)

表 1 実験用磁石の主要諸元

試料	種 別	J (kG)	D (mm)	d (mm)	t (mm)
1	サマリウムコバルト (BH) _{max} =18 MGOe	8.6	45	14	15
2	サマリウムコバルト (BH) _{max} =18 MGOe	8.6	27	13	6
3	サマリウムコバルト (BH) _{max} =16 MGOe	8.2	9.5	0	5

図 4 磁界分布 (試料 1 の磁石の場合)

3. 計算と実測の比較

図 3 は, 2 個の磁石の反発両面間距離の中央をよぎる, 軸に垂直な平面上での r 方向の磁束密度の計算値を, 試料 1 の磁石 (表 1) について Gauss メータによる実測値と比較した図で, 両者はかなり良く一致しているものと

図 5 磁界分布 (試料 1 の磁石の場合)

図 6 反 発 力

みなされる。図 4, 5 は磁界分布の計算値を磁粉法による実測結果と比較した図で, 磁束の流れ方が計算結果のそ

れと良く似た傾向を示している。また、磁場においては磁力線にそって引張力が、磁力線間に圧縮力が働くが、図4,5によれば磁石間距離の小さいほど磁力線のひずみが大きく、磁極間に作用する反発力も大であることが直観的に理解される。図6は形状と体積の異なる三つの磁石について、反発力の計算値と実測値を比較した図で、両者は良く一致している。

以上より、このたび筆者の提案した計算方法の妥当性が実証されたものと言える。

4. 数値計算例

先に述べたように、反発力特性は、 $f(y)$ を計算することにより定量的に求めることができる。この場合、反発力特性の形状依存性は直径 D と厚み t の比 m および円孔の半径 a_1 と磁石の外径 a_2 の比 σ を用いて求めることができる。ここでは、実用的見地から磁石の体積 V を $8000\pi \text{ mm}^3$ 一定として、 m と σ のいくつかの組合せについて $f(y)$ を計算した。本研究は、比較的振動変位の大きな系、例えば磁気動吸振器等の反発力特性を明らかにすることに主眼を置いているので、磁石端面間距離が 0.5 mm 以上の領域について計算した。図7(a)は円孔が無い場合、(b), (c), (d)は円孔がある場合の特性をそれぞれ示すものである。これらの図によれば円孔の有無にかかわらず限られた y の範囲で、 $f(y)$ と y は両対数方眼紙上において、ほぼ直線関係にあるものとみなしてもさしつかえないようである。それらの直線の傾きは m が大なるほど小さく、 σ の増加に伴い大きくなる傾向のあることがわかる。ここで、 $f(y)$ と y が両対数方眼紙上で直線とみなし得る範囲内では、次の近

(a) $\sigma=0.0$ (c) $\sigma=0.5$ (b) $\sigma=0.25$ (d) $\sigma=0.75$

$\sigma = \text{内径 } d / \text{外径 } D, m = \text{外径 } D / \text{厚み } t$

図7 特性関数

似式が成り立つ。

$$f(y) \doteq k y^{-n} \quad (23)$$

$$F(y) \doteq K y^{-n} \quad (24)$$

$$K = k \cdot \frac{J^2}{\mu_0} \quad (25)$$

ここに、 k, K は特性係数、 n は特性指数である。以上は磁石の体積一定のもとで計算を行ったが、次に磁石の寸法が相似的に変動した場合について考察する。いま、磁石の寸法が磁石中心間距離を含め κ 倍になった場合の $f(y)$ を式(23)によって計算すると次式が得られる。

図8 永久磁石による反発力を有する自由度1の強制振動系の例

$$\bar{f}(\kappa y) = 4\pi \int_0^\infty r \left[\int_{\kappa z_1}^{\kappa z_2} \{ f_{br}(\kappa a_2, r, -\xi) - f_{br}(\kappa a_1, r, -\xi) \} d\xi \right]^2 dr \quad (26)$$

式(26)は、 $r \rightarrow \kappa r'$, $\xi \rightarrow \kappa \xi'$ なる変数変換を施すことにより次のように書き換えることができる。

$$\bar{f}(\kappa y) = \kappa^2 f(y) \quad (27)$$

式(27)を式(23)に代入すれば、適当な可動磁石の作動範囲内で次式が成り立つ。

$$\bar{f}(y) = k \kappa^{n+2} y^{-n} \quad (28)$$

上に述べたことから、同一形状で寸法の異なる2磁石間の反発力特性は、相似則から標準の体積(本研究では $V = 8000\pi \text{ mm}^3$)に換算して求めることができる。また形状不変のまま二つの磁石の寸法が κ 倍になった場合、特性指数は変化せず特性係数だけが κ^{n+2} 倍になることが式(28)からわかった。

次に、このような反発力を持つ図8のような自由度1の強制振動系を考えると、運動方程式は次のようになる。

$$\frac{W}{g} \ddot{x} + c\dot{x} + F(y) - W = P_0 \cos \omega t \quad (29)$$

$$x = y_0 - y \quad (30)$$

ここに、 W は重量、 g は重力の加速度、 c は粘性係数、 $P_0 \cos \omega t$ は加振力、 x は振動変位、 y_0 は磁石静止時の中心間距離とする。

$F(y)$ を可動磁石の静つりあいの位置を中心としてTaylor展開すれば⁵⁾、次式のとおりととなる。

$$\frac{W}{g} \ddot{x} + c\dot{x} + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \dots = P_0 \cos \omega t \quad (31)$$

$$\left. \begin{aligned} W &= K y_0^{-n} \\ \alpha &= n K y_0^{-(n+1)} \\ \beta &= \frac{1}{2} n(n+1) K y_0^{-(n+2)} \\ \gamma &= \frac{1}{6} n(n+1)(n+2) K y_0^{-(n+3)} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

このように、運動方程式中の反発力による復元力の項が振動変位のべき級数で表されることは、反発力を有す

る振動系の解析にはなほ都合が良い。また、復元力の項の比は次のようになる。

$$\alpha : \beta : \gamma = 1 : \frac{n+1}{2y_0} : \frac{(n+1)(n+2)}{6y_0^2} \quad (33)$$

上式から、反発力の非線形性は κ に関係なく n と y_0 のみで表され、 n が大きいほど、また y_0 が小さいほど顕著になることがわかる。

5. 結 言

円筒形希土類磁石の同種磁極間に働く反発力の特性について、理論計算を行い、数値計算結果を実験結果と対照したところ両者は良く合致し、次のような結論を得た。

- (1) 反発力 F は $F = (J^2/\mu_0)f(y)$ (J : 磁石の磁化の強さ、 μ_0 : 真空透磁率、 y : 2個の磁石の端面間距離と一方の磁石の厚みの和) で表される。ただし、 $f(y)$ は磁石の形状により定まる特性関数であり、寸法に関しては相似則が成り立つ。
- (2) 適当な振動振幅範囲内では、近似式 $f(y) \approx k y^{-n}$ が成り立ち、 k, n の値は磁石の寸法比 m (=直径/厚み) および σ (=内径/外径) により定まる。また、反発力の非線形性は、 n, k および静止時の y の値に依存する。

おわりに、本研究を遂行するにあたり終始懇篤なる指導と校閲の労をとられた群馬大学工学部山川出雲教授、実験に際し何かと御協力いただいた武田定彦講師および井開重男技官につつましんで感謝の意を表するとともに、実験用磁石を御提供いただいた上、数々の御助言を賜った日立金属(株)磁性材料研究所主任研究員前川弘氏ならびに日本サーボ(株)設計部長池田真治氏に厚く御礼申し上げます。

文 献

- 1) 原田英樹: 超高性能コバルト・希土類金属磁石, 電子材料, **12**, 11 (1973) 143.
- 2) 宮崎 健, 山川和郎: 希土類コバルト磁石「ハイコレックス」の開発, 日立評論, **56**, 7 (1974) 661.
- 3) A. S. Rashidi: Better Motors with Rare-earth Magnets, Machine Design, **16**, 8, (1976) 70.
- 4) 山川出雲, 柴田圭一: 磁性反ばつ力を利用した動吸振器, 精密機械, **38**, 12 (1972) 1030.
- 5) 山川出雲, 武田定彦, 小島宏行: 3個の永久磁石よりなる新型動吸振器の挙動, 日本機械学会論文集, **42**, 364 (1976) 3815.
- 6) 山川出雲, 小島宏行, 手島 実: 機械振動の無接触演算制御に関する二, 三の試案, 精密機械, **42**, 12 (1976) 1184.
- 7) 例えば, 竹山説三: 電磁気学現象理論, 丸善 (1886) 294.