平面研削用動力計に関する一考察*

伊藤 正 治** 酒 井 清 介** 石 川 正 光**

A Study on a Two Dimensional Dynamometer for Surface Grinding

Shoji ITO, Seisuke SAKAI, Masamitsu ISHIKAWA

In this paper, the rigidity and the strain output of a two dimensional dynamometer using elongated octagonal rings are analyzed by the elastic theory and finite element method. Then these results are discussed for the purpose to design a dynamometer with minimum cross sensitivity and high rigidity. The main results obtained are as follows:

(1) The rigidity and the output of a circular or an octagonal ring increase with the swell of the ratio (h/r) of thickness (h) to mean radius (r) of a ring.

(2) In an elongated ring, the rigidity and the output per unit displacement decrease remarkably. However, the increase of the second moment of area of the upper beam makes with effect better the rigidity and the output.

(3) In an octagonal ring, the direction, where the strain under the normal force is zero, depends on the value of h/r . While, the strain which results from the deformation of the upper and the lower beam moves that direction further. However, the improvement of the symmetry of the strain distribution for a horizontal axis reduces the cross sensitivity without the decrease of the output.

1. 緒 言

研削抵抗の測定法には種々の方法がある^{1)~3)}が、平面研削における研削2分力の測定には八角弾性リングを利用した測定装置が多く用いられる^{4)~6)}。この場合、その剛性は、研削抵抗の測定が他の研削条件に与える影響を最小限に抑えるために重要であり、同時に高いひずみ出力と低い干渉出力が要求される。したがって、弾性リングを利用した動力計を製作する場合には、そのリングの剛性と外周面上の応力分布が問題となる。円リングではその弾性論的な解析が容易であるが、一般の動力計に見られる種々の形に変形したリングの場合、その剛性および応力分布の解析は非常に困難である。このため、変形されたリングを用いる場合も、円リングの解析結果を元にして設計され、しばしば干渉出力や剛性の不足等が問題となる。

本報では、平面研削用2分力測定装置を製作し、その剛性と出力を求めると同時に、有限要素法(FEM)によって円リング、八角リングおよび伸長した八角リングの剛性およびその外周面上の応力分布を求めた。また、リング形状と剛性およびひずみ出力の関係について求め、

伸長した八角リングを利用した動力計を設計する際の問題点について検討した。

2. 円リングの解析

垂直荷重 P_n が円リングに作用するとき、荷重点の垂直変位 δ と、リング外周面上の任意の点 A のひずみ ε は k を断面係数として次式によって与えられる⁷⁾。

$$\delta = \frac{P_n \cdot r}{E \cdot b \cdot h \cdot k} \left\{ \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} + \frac{2k}{\pi(1+k)} \right\} \quad (1)$$

$$\varepsilon = \frac{M}{E \cdot b \cdot h \cdot r} \left\{ 1 + \frac{h}{k(2r+h)} \right\} \quad (2)$$

$$k = \frac{r}{h} \ln \left(\frac{2 + \frac{h}{r}}{2 - \frac{h}{r}} \right) - 1 \quad (3)$$

ここで、 r, b, h はそれぞれリングの曲率、幅、肉厚であり、 E はヤング率である。式(2)の M は円リングの A 点に作用する曲げモーメントであり、垂直荷重 P_n と水平荷重 P_t に対してそれぞれ次式で与えられる。

$$M_n = \frac{P_n \cdot r}{2} \left\{ \sin \theta - \frac{2}{\pi(1+k)} \right\} \quad (4)$$

$$M_t = \frac{P_t \cdot r}{2} \cos \theta \quad (5)$$

θ はリングの中心 O を通る垂直軸と OA のなす角である。式(1)、式(2)から $\theta = 90^\circ$ としたときの垂直荷重によ

* 原稿受付 昭和52年8月31日。精機学会広島地方学術講演会(昭和48年11月21日)にて発表。

** 正会員 名古屋工業技術試験所(名古屋市北区平手町1-1)

る単位垂直変位量当たりのひずみ ε/δ は次式で表すことができる。

$$\frac{\varepsilon}{\delta} = \frac{1}{r} \left\{ k + \frac{\frac{h}{r}}{2 + \frac{h}{r}} \right\} \frac{1}{\frac{2}{\pi} - \frac{1}{\pi(1+k)}} \quad (6)$$

また、 $h/r \leq 0.5$ の範囲では、ほぼ $k \ll 1$ であることを考慮すれば、上式はさらに

$$\frac{\varepsilon}{\delta} = \left(k + \frac{\frac{h}{r}}{2 + \frac{h}{r}} \right) \frac{2(\pi - 2)}{\pi^2 - 8} \quad (7)$$

のように表される。すなわち、 k を h/r の関数と見なせば、荷重点の変位はリングの平均半径に比例し、外周のひずみは r に依存しない。したがって、円リングにおいては、 h/r が一定の条件下では ε/δ は r に反比例する。また、単位平均半径当たりの変位量に対するひずみ $\varepsilon/(\delta/r)$ は h/r のみに依存し、 h/r が小さい範囲では h/r にほぼ比例することを示している。一方、式(4)から $\theta = 39.5^\circ$ で $M_n = 0$ 、式(5)から $\theta = 90^\circ$ で $M_t = 0$ が得られるが、横断面が一様でない外周八角リングおよびさらに変形された形状のリングに対しては式(1)、式(2)の適用は誤差の原因となると思われる。

3. 動力計の構造と特性

3.1 構造

前記の式をもとにして製作した平面研削用動力計の構造と主要寸法を図1に示す。中央に平行はりを持つ2個の伸長された八角弾性リングの間に、被削材を固定するための載荷台を結合した構造で、2分力によるひずみの検出を行う八角リング部の最小肉厚は9 mm、リング幅はそれぞれ10 mmとした。中央はり部の上りは載荷台と、また下りはR点でテーブル上に固定した。中央に平行はり部を持つ場合、荷重によりはり部が変形して両端のリング部にこれに起因する曲げモーメントが生じ、2分力間の相互干渉の原因となり得るため、はり部には図1に示すように十分な剛性を与える必要がある。

干渉出力のないひずみの検出位置は前記のように式(4)、式(5)において $M_n = 0$ 、 $M_t = 0$ を満足する θ の値から得られる。円リングの場合には $\theta = 39.5^\circ$ と $\theta = 90^\circ$ であり、外周八角リングの場合には $\theta = 45^\circ$ と $\theta = 90^\circ$ とされている⁸⁾。これらの値を式(2)に代入し、 $b = 20\text{ mm}$ 、 $h = 9\text{ mm}$ 、 $r = 20.5\text{ mm}$ とすれば検出点のひずみはそれぞれ $\varepsilon_n = 0.589 \times 10^{-6} P_n$ および $\varepsilon_t = 1.11 \times 10^{-6} P_t$ となる。これらのひずみはブリッジ回路によって検出されるが、荷重点の移動による出力の変化を防ぐ上からも2ゲージ法または4ゲージ法を用いる必要がある。

図1 動力計の構造

図2 動力計の剛性

図3 法線出力中の接線分力に起因する干渉出力

図4 接線出力中の法線分力に起因する干渉出力

3.2 剛性および出力

図2に本装置の剛性を示す。載荷台上の4か所に垂直荷重 P_n が加わったとき各荷重点の垂直変位 δ を示したものであり、載荷台中央での剛性は約 $3.1\text{ kg}/\mu\text{m}$ である。一方、式(1)から円リングの剛性は次式で表される。

$$K = \frac{E \cdot b \cdot h \cdot k}{r \left\{ \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} + \frac{2k}{\pi(1+k)} \right\}} \quad (8)$$

図1と同一寸法の円リングの剛性は上式から $K = 19.1\text{ kg}/\mu\text{m}$ であり、図のように上はりの剛性を高めたリングにおいてもかなりの剛性の低下が認められる。

次に, 上記の動力計の2分力間の干渉特性を図3, 図4に示す。ひずみの検出位置は法線分力に対しては $\theta=90^\circ$ で4か所, 接線分力に対しては $\theta=45^\circ$ および 135° で8か所とし, 共に4ゲージ法でブリッジ回路を構成した。図3は法線出力中の接線分力に起因する干渉出力の割合を示し, 図4は接線出力中の法線分力に起因する干渉出力を示す。これらの干渉出力は, ひずみ検出位置の不完全さばかりでなく, 負荷の時, その作用線が, 接線分力についてはリング円周上を, また法線分力についてはリング中心をそれぞれ通らないこと, さらに上・下はり部の変形等も原因となると思われる。

4. 有限要素法による解析

4.1 円リングおよび八角リング

前述のように, リング部外周が八角形で中央に上・下はり部を有する弾性リングの応力分布や荷重点の変位量は式(1), (2)では得られない。そこでFEMを用いてこれらの解析を行い⁹⁾¹⁰⁾, リング外周の応力分布および中央平行はり部の存在とその長さおよび断面2次モーメントが動力計の剛性に及ぼす影響を求めた。円リングおよび八角リングの解析に際しては, 軸対称問題としてリング全体の1/4について考え, 荷重点とリング中心を含む垂直断面上の各節点は垂直方向に自由, 水平方向に固定, またリング中心を含む水平断面上の各節点は, 水平方向に自由, 垂直方向に固定とした。ただし, 各要素はすべてヤング率 $E=21\,000\text{ kg/mm}^2$, ポアソン比 $\nu=0.28$ とした。

垂直荷重に対する外周八角リングと円リングの荷重点における変位量をそれぞれ δ_0 および δ_e とし, その比 δ_0/δ_e と, リングの肉厚 h と平均半径 r の比 h/r の関係について得られた結果を図5に示す。 h/r の値により δ_0/δ_e は変化し, h/r が小である程外周の八角化によるリングの剛性の増加は大であり, $h/r>0.25$ での剛性の増加は10%以下である。一方, 図6は円リングと外周八角リングについて $\epsilon/(\delta/r)$ を h/r に対して求めた結果である。 $\epsilon/(\delta/r)$ が, h/r の小さい範囲でこれに比例して増加することは式(7)の示す結果でもあり, これとよく一致するが, さらに外周八角リングの $\epsilon/(\delta/r)$ が円リングのそれに比べて20%以上高くなることは, リング外周の八角化が剛性と同時にひずみ出力の向上をもたらすことを示している。

次に, 垂直荷重に対するリング外周面上の応力分布について考える。図7はリング中心を原点として, 垂直軸から θ の方向の外周面上の応力 σ_θ の値を求め, $\sigma_\theta=0$ を満足する θ の値を θ_0 として, θ_0 と h/r の関係を示した

図5 円リングおよび八角リングの剛性

図6 円リングおよび八角リングの出力

図7 θ_0 の h/r に対する依存性

ものである。図中の点線は式(4)から求めた円リングに対する θ_0 の変化であり, FEMによって求めた結果はこれとよく一致する。八角リングの場合, h/r の値が小さい範囲では円リングの値に近いが, h/r の増加に従い θ_0 は増加し, $h/r \approx 0.4$ で $\theta_0=45^\circ$ となる。また, 同図中の実測値は, 外周100 mm, 幅7 mmの外周八角リングについて, 内径が68 mmと76.8 mmの場合の θ_0 を求めた結果である。この際, ひずみはリングの垂直軸に対して $\theta=37^\circ \sim 49^\circ$ の間のリング外周上4か所でひずみ計によって測定し, これより内挿法によって θ_0 を求めた。

4.2 はり部の影響

円リング外周の八角化により, その剛性, ひずみ出力および外周面上の応力分布が円リングのそれと異なるこ

リングを S_1 , S_2 , S_3 部にそれぞれ分離し, S_3 部は他の 1.4 倍である.

(a) 要素分割例 (上は無負荷)

(b) 負荷による S_3 部の変形

図 8

とを前項までに示した. しかし, 図 1 に示した形状にリングを変形した場合, さらに大きな剛性およびひずみ出力の変化が予想される. そこで, FEM により 中央に平

行はり部を持つ八角リングの剛性とひずみ出力について解析した.

平行はり部を持つ弾性リングの要素分割と境界条件お

図9 はり長とリング剛性の関係

よびリングの変形状態の一例を図8に示す。要素数は1820, 節点数1098である。また, 2次元対称問題として全体の1/2について考え, 荷重点を通る垂直断面上の節点はすべて垂直方向に自由, 水平方向に固定とした。同図中のR点はリングの支点であり, 垂直, 水平両方向とも固定とした。リングは上はり部(\$S_1\$)と下はり部(\$S_2\$)および両端のばね部(\$S_3\$)の3部分に分け, それぞれの部分の要素の厚さを b_1, b_2, b_3 とし, この値によって上・下はり部の剛性を変化させ, これがリングの剛性およびひずみ出力に及ぼす影響を調べた。図9は, $b_1=b_2=b_3=20\text{ mm}$ の場合のはり部長さ l と変位量 δ の関係を示す。同図から, リング中央に加わる垂直荷重による荷重点の垂直変位 δ は, はりの長さ l から次式によって得られることがわかる。

$$\frac{\delta}{P_n} = \exp(0.00916l - 2.74) \quad (9)$$

ただし, l と δ の単位はmmとする。一方, はり部長さ l の変化が $\epsilon/(\delta/r)$ に及ぼす影響および ϵ, δ の変化を図10に示す。垂直荷重による曲げモーメントに起因すると思われる ϵ の増加がほぼ l に比例するのに対して, δ は式(9)に従って増加するため, リング幅一定の場合, $\epsilon/(\delta/r)$ は l が50 mmから250 mmまで増加する間に75%減少する。すなわち, はり部の伸長に起因する δ の増加は出力の増加よりはむしろ著しい剛性の低下をもたらすことを示し, 同時に干渉出力の増加の原因ともなる。

上記のごとくはり部の存在は装置の剛性と出力に大きな影響を及ぼし, はり部の長さの増大によってその剛性と $\epsilon/(\delta/r)$ は著しく減少する。しかし, この剛性の低下は上・下はり部の変形に起因すると考えられることから, 上はりまたは下はりの断面2次モーメントを増加させることにより装置全体の剛性の低下をかなり防止することができると考えられる。図11は長さ250 mmの上はりおよび下はりの断面2次モーメントが装置の剛性および出力に及ぼす影響を示したものである。横軸ははり

図10 はり長と出力の関係

図11 上はりおよび下はりの剛性とリング剛性の関係

の断面2次モーメントを, はりの高さ h を一定としてはりの幅 $b=12 \cdot I/h^3$ によって表している。変位 δ は伸長したリングの中央に垂直荷重が加わった時の荷重点の垂直変位量であり, ϵ は上記の荷重によって生ずるリング両端部, $\theta=90^\circ$ の位置の外周面上のひずみを示す。図中の B_1 は上はり部のみの剛性の増加に対するリングの変位 δ とひずみ ϵ の値を示し, B_2 は下はり部のみの剛性の影響を示したものである。なお, 図は $h/r=0.5$ に対する結果である。図より明らかなように, リングの変位量とひずみは下はり部の剛性の増加によってほとんど変化しないが, 上はり部の剛性の増加により著しく減少する。この結果は, 式(1)から得られる, $h/r=0.5$ における円リングの変位量が $\delta \cdot b/P_n=0.71 \mu\text{m} \cdot \text{mm}/\text{kg}$ であることから, 図1の形状のリングにおいて上はり部のみ, b を200 mm程度以上, すなわちその断面2次モーメントを約20倍以上にすれば, 上・下はり部の存在による剛性の低下の大部分を回復できることを示している。矩形断面を持つはりではその断面2次モーメント I は h^3 に比例することから, この程度の I の増加は比較的容易に実現できる。試作した図1に示す動力計($h/r=0.44$)の場合, 式(8)から $h/r=0.5$ の場合に比べてその

図12 上はりおよび下はりの剛性と出力

剛性が約10%低下することを考慮すれば、载荷台の存在によって約2倍の剛性を得ているが、円リングに比較すればなお約1/6である。これは载荷台の両端部での、リングとの接合の不完全さに起因すると考えられ、はり部の部分的な変形がリングの剛性を著しく低下させることを示している。また、ひずみに関しては式(2)から $\epsilon \cdot b / P_n = 0.92 \text{ mm/kg}$ が得られ、これに対して図11の B_1 におけるひずみは $b=300 \text{ mm}$ においても約2.5倍の値であり、 b の増加による ϵ の減少は δ の場合に比べて少ない。すなわち、 P_n により図8(b)に見るごとくAA面およびBB面がリング中心を通る垂直軸Yに対して回転し、これに起因する曲げモーメントが P_n の関数として S_3 部に加わるため、 $\theta=90^\circ$ における ϵ は増加する。一方、この結果生ずるリング外周面の応力分布がX軸に対して対称であっても、ひずみ検出点 θ_0 は P_n の関数となるため、1ゲージ法では干渉出力を生ずる。しかし、4枚または8枚のひずみ計による4ゲージ法を用いれば、上記の対称性がある場合には荷重点の移動に起因する干渉出力も含めて容易にこれらを消去でき、さらにこの対称性が悪い場合でも効果的に干渉出力の低減を図ることができる。図12は上・下はり部の剛性と $\epsilon/(\delta/r)$ の関係を示したものである。 S_1 部の剛性の増加が ϵ の減少より δ の減少に効果があり、このため $\epsilon/(\delta/r)$ が大幅に向上することを示す。上記のように、伸長した八角リングを用いた動力計においては、その剛性の点からは上はりの剛性の向上が効果的であり、出力の増加の点からは、はり部の存在に起因して生じるひずみ分布の、リング中心を通る水平軸に対する対称性を良くし、干渉出力を減少させると同時に、 $\epsilon/(\delta/r)$ の増加を図ることが必要である。

5. 結 論

八角リングを利用した平面研削用2分力測定装置を作

製すると同時に、有限要素法によってこのようなリングの形状、はり部の長さおよびその断面2次モーメントと、リングの剛性およびひずみ出力の関係について解析した結果次の結論を得た。

- (1) 円リングおよび外周八角リングの剛性とリング外周面上での単位変位量当たりのひずみ量 $\epsilon/(\delta/r)$ は、リングの肉厚 h と平均半径 r の比 h/r の増加に伴い増加する。また、円リング外周の八角化は剛性と $\epsilon/(\delta/r)$ を増加させるが、その増加率は h/r の減少に伴い増加する。
- (2) 伸長したリングでは、その剛性および $\epsilon/(\delta/r)$ は著しく低下する。しかし、これらの低下はリング中央のはり部の変形に起因し、上はり部の断面2次モーメントを実現可能な範囲内で高めることにより剛性および $\epsilon/(\delta/r)$ の効果的な向上が可能である。
- (3) 円リング外周の八角化により、垂直荷重 P_n に対してリング外周のひずみがゼロとなる位置 θ_0 は変化し、 h/r の関数となる。また、はり部の存在により生ずるリング部のひずみのため、この θ_0 の位置は更に変化し、 P_n とこれが作用する位置の関数となる。しかし、これらを合わせたひずみ分布の、リング中心を通る水平軸に対する対称性を良くすれば、これらに起因する干渉出力は相殺でき、はり部の存在により生ずるひずみはリングの出力の増加に役立つ。

文 献

- 1) 小野浩二：研削仕上の研究(研削力について)、日本機械学会論文集, 18, 74 (1952) 15.
- 2) E. R. Marshall and M. C. Shaw: Forces in Dry Surface Grinding, Trans. ASME, 78, 1, (1952) 51.
- 3) 竹中規雄, 笹谷重康：研削作用に関する研究(第1報)——といしの目立効果について、日本機械学会論文集, 18, 74 (1952) 27.
- 4) M. Sadowy and H. Scheuber: Konstruktion und Erprobung eines Schnittkraftmesser, Werkstattstechnik, 57, 6, (1967) 280.
- 5) C. T. Yang: Design of Surface Grinding Dynamometers, Trans. ASME, J. Engg. Ind., 90, 2, (1968) 127.
- 6) 塩崎 進, 宮下政和：研削動力計の試作(第2報)——動力計の動力学と設計, 精密機械, 35, 7 (1969) 471.
- 7) 湯浅亀一：材料力学(中巻), コロナ社(1966) 22.
- 8) N. H. Cook, E. G. Loewen and M. C. Shaw: Machine Tool Dynamometers, Amer. Machinist, May 10, (1954) 125.
- 9) 三本木茂夫, 吉村信敏：有限要素法による構造解析プログラム, 培風館(1970).
- 10) O. C. Zienkiewicz and Y. K. Cheung (吉識雅夫訳)：マトリックス有限要素法, 培風館(1970).