研究

垂直案内におけるスティックスリップ振動の解析*

塩 崎 進** 古 川 勇 二** 坂 田 光 児***

An Analysis of Stick-slip Vibration in a Vertical Slideway

Susumu SHIOZAKI, Yuji FURUKAWA, Koji SAKATA

When feeding a slider in a vertical plane, a moment, hence an ununiform pressure distribution is usually induced on vertical slide-faces by an unbalanced feed force and/or a slider's weight. In view of this point, the present paper analysed a mechanism of stick-slip vibration and confirmed it experimentally by a model test.

(1) Stick-slip amplitude and critical feed rate at its occurrence limit are both larger in up-feeding than in down-feeding, and their values are much affected by an amount of preload between slide-faces.

(2) The critical feed rate is also affected by a structure, in particular by a relative arrangement of slider's centre of gravity with a driving point, and design principle to suppress stick-slip is introduced.

1. 緒 言

しゅう動体を垂直案内する機構は、たとえば平面研削盤の砥石頭による切込み量の設定や、マシニングセンタの切削送り運動などに用いられている。これらの位置決めあるいは送り運動中にスティックスリップが発生すれば加工精度を阻害する要因となる。従来、水平案内のスティックスリップについては詳しく説明され、その防止対策も示されてきたが^{1)~3)}、垂直案内についてはほとんど研究されていない。しゅう動体の自重は水平案内では案内面に垂直に加わるが、垂直案内では駆動方向に加わり、これが水平案内と垂直案内とが基本的に異なる点である。そのため垂直案内では、しゅう動体の自重や駆動力によるモーメントがスティックスリップの発生に及ぼす影響は、水平案内とは異なることが予想され、従来の水平案内の解析結果をそのまま適用することはできないと考えられる。そこで本研究ではまず第1段階として、単純化した垂直案内モデルを取り上げ、スティックスリップの発生機構と発生限界とについて基礎的に説明

することを目的としている。

2. スティックスリップの発生機構と発生限界

2.1 しゅう動体の運動方程式

図1(a)は垂直案内を有する送り駆動機構の説明図である。簡単のため、しゅう動体は Y および Z 方向には運動を拘束され、 X 方向だけに並進可能なものとする。しゅう動体の重量がその重心 G に集中し、また送り用ねじの剛性を等価ばね定数 k で代替すれば、図1(a)は同図(b)の1自由度の力学モデルに置き換えられる。しゅう動体の重心 G および駆動点 P は、対向する案内面 A および B 面の中心上にはないのが普通なので、図1(b)ではその間の距離をそれぞれ a_1 と a_2 で表示した。また絶対座標系からみたしゅう動体の変位を x 、駆動点 D の変位を x_d で表す。

図1 垂直送り機構および等価1自由度モデル

* 原稿受付 昭和52年12月9日。昭和51年度精機学会秋季大会学術講演会(昭和51年10月14日)にて発表。

** 正会員 東京都立大学工学部(東京都世田谷区深沢2-1-1)

*** 学生会員 東京都立大学大学院

図2 代表的な面圧分布形とAの値

いま案内面の圧力分布が図1(c)のように表され、AとB面での面圧分布をそれぞれ $p_A(x', y')$, $p_B(x', y')$ で表示すれば、AとB面での垂直面荷重 N_A と N_B は次のようになる。

$$N_A = \int_{-l}^l \int_{-d}^d p_A(x', y') dx' dy' \quad (1)$$

$$N_B = \int_{-l}^l \int_{-d}^d p_B(x', y') dx' dy' \quad (2)$$

一方、Z方向の力のつりあいより

$$N_A = N_B \quad (3)$$

またY軸まわりのモーメントのつりあいより、

$$\int_{-l}^l \int_{-d}^d \{p_A(x', y') - p_B(x', y')\} \cdot x' dx' dy' = M_y \quad (4)$$

ただしモーメント M_y は

$$M_y = 2l\{L_1 W - L_2 k(x - x_d)\} \quad (5)$$

ここで $L_1 = a_1/2l$, $L_2 = a_2/2l$, $(x - x_d)$ は駆動ばねのたわみである。

さて、実際の案内面に働いている面圧分布は複雑に変化するであろうが、ここでは問題を単純化し、図2に示す三つの場合を取り上げることとした。これら三つの場合、面圧は M_y の絶対値 $|M_y|$ に比例するから、式(3)~(5)より M_y とつりあう p_A と p_B を決定でき、次に式(1), (2)を用いれば N_A と N_B は次のようになる。

$$\begin{aligned} N_A = N_B &= A |L_1 W - L_2 k(x - x_d)| + N_P \\ &= A |M_y| / 2l + N_P \end{aligned} \quad (6)$$

ただし、 N_P は予荷重、Aは面圧分布の形によって定まる定数で、図2中にそれぞれのAの値を示してある。式(6)は案内面に働く垂直面荷重 N_A , N_B がモーメント M_y によって変化することを示しており、このことは水平案内の場合にも成り立ちうるが、従来のスティックス

リップの解析ではこのような配慮はなされていなかった。

さて水平案内では、しゅう動体の自重が予圧として案内面にはほぼ一様に働いているのが多いのに対し、垂直案内ではしゅう動体の自重が送り方向に働いており、一定の予圧として作用しない場合が多い。また、しゅう動体に作用するモーメントは、水平案内では案内面に働く摩擦力和等しい大きさの駆動力によるモーメントであるのに対し、垂直案内ではしゅう動体重量によるモーメントと、駆動力によるモーメントとの和となる。このようなわけで、水平案内の面圧分布は普通は図2(c)のような形に近いと考えられるが、垂直案内では図2(a)または(b)のような形が多いと考えられる。

さて図1(a)にもどって、CC'面に働く面圧はY軸まわりのモーメント M_y に影響されず一定値 N_C で表されたとすれば、しゅう動体に働く垂直面荷重の総和 N は式(6)をも含めて次のように表せる。

$$N = 2\{A |L_1 W - L_2 k(x - x_d)| + N_P + N_C\} \quad (7)$$

しゅう動体の慣性力は、駆動力、自重、および摩擦力の和とつりあっているから、その運動方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{W}{g} \ddot{x} = & -k(x - x_d) + W - 2\mu_d \{A |L_1 W - L_2 k(x - x_d)| \\ & + N_P + N_C\} \text{sign}[\dot{x}] \end{aligned} \quad (8)$$

ただし上式では案内面の粘性力を無視した。また、 μ_d はスリップ中の摩擦係数、 $\text{sign}[\]$ は $[\]$ 内が正なら+1、負なら-1を取る符号関数であり、 $x_d = x_d(0) + vt$ である。ここで v は駆動速度、 $x_d(0)$ は駆動点Dの初期変位である。

2.2 スティックスリップ中のしゅう動挙動

図3は定常的なスティックスリップを示す。いま駆動

図3 スティックスリップの説明図

図4 静摩擦特性の説明図

ばねのたわみ $(x - x_d)$ が δ_0 の時しゅう動体がスリップし始め、 $(x - x_d)$ が δ_1 の時しゅう動体が再びスティックし始めるとする。ここで δ_0 は、駆動ばねの復元力がしゅう動体の自重と最大静摩擦力との和とつりあっているときのたわみであるから

$$k\delta_0 = W - 2\mu_s[A|L_1W - L_2k\delta_0| + N_P + N_C] \cdot \text{sign}[W - k\delta_0] \quad (9)$$

また図3の δ_1 は初期条件 $x(0) = \delta_0$, $\dot{x}(0) = 0$, $x_d(0) = 0$ のもとで式(8)を解けば求められる。なお静止摩擦係数 μ_s は、従来の研究^{1)2)4)~6)}によれば、ある一定の値 $\mu_s(\infty)$ に収束するようなスティック時間 t_2 の関数 $\mu_s(t_2)$ で静止摩擦係数の時間依存性といわれている(図4)。式(9)および上述の考察から δ_0 と δ_1 もスティック時間 t_2 の関数 $\delta_0(t_2)$, $\delta_1(t_2)$ となる。またスティック時間 t_2 は、スティック時に、駆動ばねが速度 v で δ_1 から δ_0 までたわむのに要する時間であるから、

$$t_2 = \frac{\delta_0 - \delta_1}{-v} \quad (10)$$

そこで式(8)~(10)を用いれば、次の手順によりスティックスリップ中のしゅう動体の挙動を数値解析できる。

- (1) $\mu_s(t_2) = \mu_s(\infty)$ とおき、式(9)から δ_0 を求める。
- (2) 初期条件 $x(0) = \delta_0$, $\dot{x}(0) = 0$, $x_d(0) = 0$ のもとで

式(8)を解き、しゅう動体が再びスティックし始めるときの駆動ばねのたわみ δ_1 を求める。

- (3) 式(10)に δ_1 を代入し、式(9)と式(10)を連立させ新たに δ_0 を求める。

- (4) (3)で求めた δ_0 の値をもって再び(2)にもどり、以後(2)~(4)の手順を繰返す。

2.3 スティックスリップの発生限界

従来スティックスリップの発生限界について加藤ら⁷⁾が解析しているが、そこではスリップ時間 t_1 およびスティック時間 t_2 を図3に示す t'_1, t'_2 で近似し、かつスティックスリップの発生限界を $t_1 = t_2$ の条件で与えているが、実際には本実験結果の図7に示すように $t_1 \neq t'_1$, $t_2 \neq t'_2$ であり、スティックスリップの発生限界を $t_1 = t_2$ の条件では与えられないと考えられる。

さて、スティックスリップにおいて系に流入するエネルギーは、スティック時に駆動ばねに蓄えられるポテンシャルエネルギーである。したがってこのエネルギーが蓄えられないこと、換言すればしゅう動体がスティックしない条件がスティックスリップの発生限界を本質的に与える。この考えをもとにした岡村ら¹⁾によれば、スティックスリップの発生限界は、スティックした瞬間での最大静止摩擦力の変化率 R_f と駆動ばね力の変化率 R_k とが等しくなる条件で与えられ、ここで提示された理論の若干の矛盾を水本ら⁸⁾が修正している。以下ではこの結果を垂直案内に適用しよう。

まず、スティックした瞬間の R_f は次のようになる。

$$\begin{aligned} R_f &= \left[\frac{\partial f_s}{\partial t_2} \right]_{t_2=0} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial t_2} \{ \mu_s(t_2) \cdot N \} \right]_{t_2=0} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial t_2} \{ k \cdot \delta_0(t_2) - k \cdot \delta_1(t_2) \} \right]_{t_2=0} \quad (11) \end{aligned}$$

ただし、 f_s : 最大静止摩擦力。また発生限界速度よりわずかに低い速度で駆動されている場合、式(8)~(10)より $(x - x_d)$ は図3に示すように δ_m を中心に振動するから、式(11)の $\{ k \cdot \delta_0(t_2) - k \cdot \delta_1(t_2) \}$ は次のようになる。

$$k \cdot \delta_0(t_2) - k \cdot \delta_1(t_2) = 2k \cdot \{ \delta_0(t_2) - \delta_m \} \quad (12)$$

ただし、 $\delta_0(t_2), \delta_m$ は

$$\begin{aligned} \delta_0(t_2) &= g \{ [1 - 2\mu_s(t_2) \cdot \{ AL_1 S_1(\delta_0) + (N_P^* + N_C^*) \cdot S_2(\delta_0) \}] / \\ &\quad [\omega_n^2 \{ 1 - 2\mu_s(t_2) \cdot AL_2 S_1(\delta_0) \}] \} \\ \delta_m &= g \{ [1 - 2\mu_d \cdot \{ AL_1 S_1(\delta_m) + (N_P^* + N_C^*) \cdot S_2(\delta_m) \}] / \\ &\quad [\omega_n^2 \{ 1 - 2\mu_d AL_2 S_1(\delta_m) \}] \} \end{aligned}$$

ここで、 $\omega_n^2 = k \cdot g / W$, $S_1(\delta) = \text{sign}[(L_1 g - L_2 \omega_n^2 \delta) \cdot$

図5 実験装置

$(g - \omega_n^2 \delta)]$, $N_P^* = N_P/W$, $N_C^* = N_C/W$, $S_2(\delta) = \text{sign}[g - \omega_n^2 \delta]$

一方、しゅう動体のスティック中も送りは行われ駆動ばねはたわんでゆくから、駆動ばね力の変化率 R_k はスティックした瞬間も含め次式で与えられる。

$$R_k = -k \cdot v \quad (13)$$

$R_f = R_k$ とおけばスティックスリップの発生限界速度 v_c は次のようになる。

$$v_c = \frac{4g\{A(L_1 - L_2)S_1(\delta_m) + (N_P^* + N_C^*)S_2(\delta_m)\}}{\omega_n^2\{1 - 2\mu_d A L_2 S_1(\delta_m)\}^2}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_2} \mu_s(t_2) \right]_{t_2=0} \quad (14)$$

よって、静止摩擦係数の時間依存性、A と B 面の面圧分布形、およびしゅう動体の寸法や重量などの諸定数が与えられれば、式(8)~(10)および式(14)よりスティックスリップの挙動とその発生限界を数値解析できる。

3. 実験による検討

3.1 実験装置および方法

実験装置は図5および図6に示すもので、コラム案内面①、しゅう動体②、駆動用板ばね③、駆動装置④から構成されている。しゅう動体は重さ5.34 kgfの本体②と重さ1.1 kgfのおもり⑥から成っており、おもり⑥の取付位置を変えることによりしゅう動体の重心を変化できるように工夫した。またボルト⑤を調節することによりAB面間の予荷重を変えられる。コラムおよびしゅう動体のすべり面の材質は軟鋼であり、研削仕上げ

図6 実験装置

をしてある。駆動装置④は実機の垂直駆動部を可変速モータにより上下に駆動するもので、駆動速度範囲は1~500 mm/minである。しゅう動体は板ばね③を介して駆動装置に取付けられ、上下方向に駆動される。この板ばね③は23.8 kgf/mm, 70.0 kgf/mm, 100.0 kgf/mmの3種類の剛性のものを用いた。しゅう動体の変位は板ばねに貼付したひずみゲージにより駆動装置との相対変位の形で測定した。

3.2 実験結果

図7 スティックスリップの測定波形例

3.2.1 静止摩擦係数の時間依存性

本実験装置のすべり面に固有な摩擦特性を得るために、次のようにすべり面にモーメントが働かないように工夫した。すなわち図5(a)の装置で板ばね③をしゅう動体からはずし、おもり⑥をとりさり、しゅう動体の重心が対向している二つの案内面AとB面の中心線にくるようにし、さらにAとB面の中心上でしゅう動体を駆動するようにして、しゅう動体にモーメントが働かないようにした(図5(b))。このような状態で発生するスティックスリップの測定波形例を図7に示す。ここで図に示すようにスティック時間 t_2 はしゅう動体の加速度が一定となる時間にとった。このようにして測定したスティック時間 t_2 と摩擦係数 $(\mu_s - \mu_d)$ の関係を図8に示す。この結果に従来提案されてきたいくつかの表示式を当てはめてみると、Brockleyら⁵⁾または加藤ら⁶⁾に

W=5.34 kgf, $k=70.0$ kgf/mm, $a_1=0.0$ mm,
 $a_2=0.0$ mm, $N_P=9.67$ kgf, $N_C=0.0$ kgf

図8 静止摩擦係数の時間依存性

よる表示式によってよく説明されるのがわかる。

$$\mu_s(t_2) = \mu_d + \gamma \cdot t_2^\beta \quad [\text{Brockley}] \quad (15)$$

$$\mu_s(t_2) = \mu_s(\infty) - \{\mu_s(\infty) - \mu_d\} e^{-\gamma t_2^\beta} \quad [\text{加藤}] \quad (16)$$

ただし、 γ, β は定数であり、それぞれの潤滑油に対して表1に示す実験値を得た。

ところが式(15)または(16)によれば $(\partial \mu_s / \partial t_2)_{t_2=0} = \infty$ となり、これを式(14)へ代入すればスティックスリップの発生限界速度 v_c も無限大となってしまう。このことは有限の発生限界速度が存在している実際現象とは矛盾している。そこで以下では、図8の◎点で示す、発生限界直

表1 静摩擦特性の表示式

研究者	表示式	γ	β	$\mu_s(\infty)$	μ_d
Howe ら ⁴⁾	$\mu_s(t_2) = \mu_d + \{\mu_s(\infty) - \mu_d\} \cdot (1 - e^{-\gamma t_2})$	0.6 0.4 0.5	—		
岡村 ら ¹⁾	$\mu_s(t_2) = \frac{\mu_s(\infty)}{\{\mu_s(\infty)/\mu_d - 1\}/\sqrt{\gamma t_2} + 1}$	8.0 7.0 5.0	—	0.38 0.35 0.30	0.18 0.15 0.14
加藤 ら ⁶⁾	$\mu_s(t_2) = \mu_d + \{\mu_s(\infty) - \mu_d\} \cdot (1 - e^{-\gamma t_2^\beta})$	0.6 0.5 0.5	0.6 0.4 0.4		
Brockley ら ⁵⁾	$\mu_s(t_2) = \mu_d + \mu_d t_2^\beta$	0.077 0.071 0.052	0.52 0.36 0.36		

上段：無潤滑，中段：タービン #90 油，下段：ダイヤモンド #120 油

$N_F=3.03$ kgf, $W=5.34$ kgf, $a_1=0.0$ mm, $a_2=74.0$ mm, $N_C=0.029$ kgf, ダイヤモンド #120 油

図9 駆動系のばね剛性および駆動方向がスティックスリップに及ぼす影響

前のスティック時間 t_{2ex} と静止摩擦係数と動摩擦係数の差 $(\mu_s - \mu_d)_{ex}$ を用いて $[\partial \mu_s / \partial t_2]_{t_2=0}$ を次のように実験的に近似した。

$$\left[\frac{\partial \mu_s}{\partial t_2} \right]_{t_2=0} \equiv \frac{(\mu_s - \mu_d)_{ex}}{t_{2ex}} \quad (17)$$

実際には発生限界直前の2~3の実験値を平均して $[\partial \mu_s / \partial t_2]_{t_2=0}$ を求めた。それぞれの場合について図8中に併記した。

3.2.2 振幅特性および発生限界

図9~12にスティックスリップの駆動速度に対する振幅特性と発生限界の実験および解析結果を示す。本実験装置では、しゅう動面は研削仕上してあり、かなり平面度がよいこと、そして予圧に比べ駆動力や自重のためのモーメントによる面圧変化分の方がはるかに大きいことを考えあわせて、面圧の変化を図2(b)で仮定し、また案内面に働く面荷重を{図2(b)の場合の面荷重の変化分} + {A, B, C, C'面に働く予荷重}と近似した。解析結果としては上述の近似と式(8)~(10), (14)および式(15), (17)を用いて求めた相対変位振幅特性と発生限界を示した。図9は駆動系の剛性および駆動する方向の違いがスティックスリップに及ぼす影響を示している。駆動系の剛性が増すと振幅、発生限界ともに減少することがわかる。また、しゅう動体を上げる場合と下げる場合の違いにより、振幅にはほぼ8対1の差があることがわかる。これは駆動ばねがしゅう動体の自重により駆動する前からある程度たわんだ状態にあるために、上げと下げの駆動方向の違いにより駆動モーメントに差が生じるためである。図10はしゅう動体の重心の位置がスティックスリップに及ぼす影響を示す。

$N_F=0.804$ kgf, $W=6.44$ kgf, $k=23.8$ kgf/mm, $a_2=74.0$ mm, $N_C=0.029$ kgf, ダイヤモンド #120 油

図10 しゅう動体の重心位置 a_1 がスティックスリップに及ぼす影響

$W=5.34$ kgf, $k=70.0$ kgf, $a_1=0.0$ mm, $a_2=74.0$ mm, $N_C=0.029$ kgf, ダイヤモンド #120 油

図11 案内面に働く予荷重がスティックスリップに及ぼす影響

す影響を示す。重心が駆動点側にある場合には、しゅう動体の自重と駆動力とによるモーメントが相殺して小さくなるためスティックスリップの振幅も小さくなる。重心が駆動点と逆の側にある場合には、両者が加え合わされ振幅は大きくなる。図11は案内面に働く予荷重がスティックスリップに及ぼす影響を示したものである。予荷重が大きいほど振幅が大きくなるのは水平案内の場合と同様な現象であるが、予荷重と振幅が正比例せずに、予荷重が約2倍、3倍となるに従い、振幅が約3倍、8倍となるのが垂直案内の特色である。これは予荷重の増

$N_P=3.71 \text{ kgf}$, $W=5.34 \text{ kgf}$, $k=23.8 \text{ kgf/mm}$,
 $a_1=0.0 \text{ mm}$, $a_2=74.0 \text{ mm}$, $N_C=0.029 \text{ kgf}$

図12 潤滑油の特性がスティックスリップに及ぼす影響

加すなわち摩擦力の増加によって駆動力が増加し、その結果駆動モーメントが増加して面圧が増すためである。

図12は潤滑油がスティックスリップに及ぼす影響を示す。潤滑状態と無潤滑状態とでは静摩擦特性は図8のように異なり、そのためそれぞれの振幅特性は異なった傾向を示していることがわかる。

4. 結 言

工作機械の垂直案内による送り機構において発生するスティックスリップについて、駆動力やしゅう動体自重によるモーメントの影響を考慮した解析を行い、またモデル実験を行った。その結果、駆動方向の違いやしゅう動体の重心と駆動点の位置の関係によってスティックス

リップの振幅および発生限界に大きな差が生じること、そして案内面に働く予荷重が変化するとスティックスリップの振幅と発生限界速度が予荷重の変化以上に大きく変化するなど、構造上または使用上の因子によっては振幅特性や発生限界に水平案内の場合とは異なった影響を与えていることを明らかにした。さらに、しゅう動体重量を減らすこと、駆動ばねの剛性を増すこと、および駆動点としゅう動体の重心を対向する案内面の中心に近づけることによりスティックスリップの振幅を減少させ、かつ発生限界速度を下げうることを明らかにした。

参 考 文 献

- 1) 岡村健二郎, 松原十三生, 野呂周平, 山根崇宏: 摩擦振動の理論的解析, 精密機械, **34**, 11 (1968) 731.
- 2) 岡村健二郎, 松原十三生, 野呂周平: 摩擦振動に関する実験的解析, 精密機械, **34**, 12 (1968) 774.
- 3) 築添 正, 坂本 亨: スティックスリップの発生に対する摩擦系の剛性の影響——潤滑条件下の平面間の摩擦の場合, 潤滑, **20**, 3 (1975) 159.
- 4) P.G. Howe, D.P. Benton & I.E. Puddington: London-Van der Waals Attractive Forces between Glass Surfaces, Canad. J. Chem., **33**, 9, (1955) 1375.
- 5) C.A. Brockley & H.R. Davis: The Time-dependence of Static Friction, Trans. ASME, Ser. F, **90**, (1968) 35.
- 6) 加藤 仁, 松林恒雄: 工作機械案内面のしゅう動特性について (第1報, スティックスリップ現象における静摩擦特性), 日本機械学会論文集, **35**, 273 (1969) 1138.
- 7) 加藤 仁, 山口勝美, 松林恒雄: 工作機械案内面のしゅう動特性について (第2報, スティックスリップ現象における動摩擦特性), 日本機械学会論文集, **35**, 273 (1969) 1147.
- 8) 水本 洋, 井川直哉: 工作機械におけるスティックスリップの発生限界に対する一考察, 精密機械, **42**, 8 (1976) 797.