研究

球と平面の接触による減衰能に関する研究*

久米 靖文** 橋本文雄**

Investigation on Damping at Contact of a Flat Plate with Spheres

Yasufumi KUME, Fumio HASHIMOTO

This paper is concerned with the determination of the damping occurring at the contact surfaces where machine elements are joined each other by a press fit. When a plate is held between two spheres by means of a constant clamping pressure and is then subjected to a cyclic twisting moment parallel to the flat plate, energy is dissipated at the contact surfaces. The contact area is divided into a region of slip and locked region of no slip. In the present solution, it is assumed that the tangential component of traction at the area over which slip has progressed, is equal to the product of a constant friction coefficient by the normal pressure on the contact surfaces. The relationship between slip damping and twisting angle, between slip damping and stick ratio may be found by this analysis. The results of the analysis are correlated with experimental data.

1. ま え が き

工作機械のような機械構造物における結合部の減衰能については種々の研究^{1)~3)}が行われている。しかしそれらの研究の結果をみても、その減衰能の大きさを見積ることは困難である。この研究は結合部の接合面での接合面減衰能の大きさを求めるために行った一連の研究の一つである。前報⁴⁾⁵⁾まではカップリング状モデルを使用して、接合面の形状が円すい面である場合を取扱ってきたが、この報告では平面に球が接触している場合について解析し、接合面で1周期において接合面が完全に固着すると、接合面上で一部がすべり、その他は固着するときがあり、接合面全体にすべりが発生しない局部すべりが発生することを明らかにした。そしてこれを実験で確かめた。

構造減衰能は材料内部のエネルギー消散による材料減衰能と結合部接合面でのエネルギー消散による接合面減衰能の二つから成っている⁶⁾。材料減衰能は材料が繰返し荷重を受ける場合に発生し、接合面をもつ結合部の接合面減衰能は接触表面間の局部すべりや1周期において接合面全体にすべりが発生するときがある全体すべりによって発生する⁷⁾。しかしながら、材料内部の摩擦損失による消散エネルギーは接触面間で消散されるエネルギーと比較すると小さいので、構造減衰能を評価するためには、結合部の接合面での減衰能の発生機構についての研究を行

うことが重要である。ここでは球と平面が接触している場合の減衰能の発生機構を明らかにし、接合面減衰能を求めた。このような研究に関してはJohnson⁸⁾、Goodmanら⁹⁾¹⁰⁾の研究があるが、これらの研究はいずれも球と平面との相対運動が直線的である。ここでは球と平面との相対的な運動が回転運動である場合を取扱った。球と平面が接触し、回転運動がある場合の弾性接触に関する研究はMindlin¹¹⁾、Lubkin¹²⁾の研究があるが減衰能に関しては触れていない。ここではこれらの研究を参考にして接合面減衰能を評価し、減衰能と回転角との関係、減衰能と固着比との関係を求め、これらの関係を実験で確かめた。

2. 接触面上での消散エネルギーと接触トルク

球と平面から成るモデルを考え、球と平面の間には垂直力 N を加える。球をねじり振動させ、その球と平面の接触による減衰能を解析的に求めてみる。図1のように垂直力 N で押付けられている球と平面の場合、ヘルツの理論¹³⁾から、接触面は円形となる。接触面の半径 a が半径 R に比べて非常に小さいならば、次のようになる。

$$a = 0.881 \left\{ NR \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \right\}^{1/3} \quad (1)$$

図1 球と平面の接触

* 原稿受付 昭和52年12月5日。昭和52年度精機学会春季大会学術講演会(昭和52年4月4日)にて発表。

** 正会員 大阪府立大学工学部(堺市百舌鳥梅町4丁804)

図2 接触面上のせん断
応力分布

ここで, E_1, E_2 は球と平面の縦弾性係数である。また接触面上の圧力分布 $p(r)$ は

$$p(r) = \frac{3}{2} \frac{N}{\pi a^2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{1/2} \quad (2)$$

となる。またこの報告では解析を簡単にするために次のような仮定をおいて、球にねじり振動を加えたときの挙動を考える。

- 1) 接触面上では摩擦係数は摩擦速度やすべり量の関数でなく、クーロン型の摩擦特性をもち、このクーロン摩擦による摩擦損失エネルギーのみが消散エネルギーとなる。
- 2) 完全固着の場合の接触面上でのねじり応力 τ は中心で0の値から半径 a の最大値 τ_a まで直線的に変化する。

したがって、接触面上でのせん断応力 τ と単位面積あたりの摩擦力 $\mu p(r)$ の分布は図2のようになる。せん断応力が単位面積あたりの摩擦力より大きくなる領域で相対すべりが発生し、 $\tau_0 = \mu p(r_0)$ となる r_0 のところが境界となる。また r_0 は摩擦速度の影響を受けられるが、この報告では仮定1) から r_0 は摩擦速度の影響がないとする。

$\tau < \mu p(r)$ となる領域は固着していると考えることができる。また固着している場合でも微小すべりによる広義の摩擦損失エネルギーが生じると考えることができるが、この解析ではこれを無視する。すべり領域での相対すべり量はせん断応力と単位面積あたりの摩擦力 $\mu p(r)$ の差に比例して変化すると仮定すると、任意の半径 r での相対すべり量 Δq は

$$\Delta q = \left[\tau - \mu p(r) \right] \frac{a \theta_0}{\tau_a} \quad (3)$$

となる。ここで、 θ_0 は球の最大ねじれ角である。式(3)に仮定2)の $\tau = \tau_a r/a$ を代入すると

$$\Delta q = \left[\frac{\tau_a}{a} r - \mu p(r) \right] \frac{a \theta_0}{\tau_a} \quad (4)$$

となる。微小面積 ΔS に生ずる消散エネルギー ΔD は次のようになる。

$$\Delta D = \mu p(r) \cdot \Delta S \cdot \Delta q \quad (5)$$

$\Delta S = r \cdot \Delta \theta \cdot \Delta r$ であるので、式(4)を式(5)に代入して整理すると消散エネルギー D は

$$D = \frac{\mu a \theta_0}{\tau_a} \int_0^{2\pi} \int_0^a r p(r) \left[\frac{\tau_a}{a} r - \mu p(r) \right] dr d\theta \quad (6)$$

となる。さらにこの式に式(2)を代入すると、

$$\begin{aligned} D &= \frac{3\mu N \theta_0}{a \cdot \tau_a} \left[\frac{\tau_a}{a} \int_{r_0}^a r^2 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{1/2} dr \right. \\ &\quad \left. - \frac{3\mu N}{2\pi a^2} \int_{r_0}^a r \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) dr \right] \\ &= \frac{3\mu a N \theta_0}{32} \left\{ \left[2\pi - 4 \sin^{-1} \frac{r_0}{a} + \sin \left(4 \sin^{-1} \frac{r_0}{a} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{12\mu N}{\pi a^2 \tau_a} \left[1 - \frac{r_0^2}{a^2} \left(2 - \frac{r_0^2}{a^2} \right) \right] \right\} \quad (7) \end{aligned}$$

となる。またすべり領域の境界 r_0 では、せん断応力 τ と単位面積あたりの摩擦力 $\mu p(r)$ とが等しいので、 $\tau_0 = \tau_a r_0/a$ 、 $\mu p(r_0) = 3\mu N a (1 - r_0^2/a^2)^{1/2} / (2\pi a^2)$ とすると

$$\tau_a = \frac{3\mu N}{2\pi a^2} \frac{a}{r_0} \left(1 - \frac{r_0^2}{a^2}\right)^{1/2} \quad (8)$$

となる。式(8)を式(7)に代入すると

$$\begin{aligned} D &= \frac{3\mu a N \theta_0}{32} \left\{ \left[2\pi - 4 \sin^{-1} \frac{r_0}{a} + \sin \left(4 \sin^{-1} \frac{r_0}{a} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{12\mu N}{\pi a^2} \frac{2\pi a^2}{3\mu N} \frac{r_0}{a} \left(1 - \frac{r_0}{a^2}\right)^{-1/2} \left[1 - \frac{r_0^2}{a^2} \left(2 - \frac{r_0^2}{a^2} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\beta = r_0/a$ とすると

$$\begin{aligned} D &= \frac{3\mu a N \theta_0}{32} \{ 2\pi - 4 \sin^{-1} \beta + \sin(4 \sin^{-1} \beta) \\ &\quad - 8\beta(1 - \beta^2)^{3/2} \} \quad (9) \end{aligned}$$

となる。式(9)は1/4サイクルあたりの消散エネルギーであるから、1サイクルあたりの消散エネルギー D_{cyc} は次のようになる。

$$\begin{aligned} D_{cyc} &= 4D = \frac{3\mu a N \theta_0}{8} [2\pi - 4 \sin^{-1} \beta \\ &\quad + \sin(4 \sin^{-1} \beta) - 8\beta(1 - \beta^2)^{3/2}] \quad (10) \end{aligned}$$

である。また球と平面の材質が同じであると、式(1)より接触円の半径は

$$a = 1.11 \left(\frac{NR}{E} \right)^{1/3} \quad (11)$$

となるので、

$$D_{cyc} = \frac{3.33}{8} \mu \theta_0 N^{1/3} \left(\frac{R}{E} \right)^{1/3} [2\pi - 4 \sin^{-1} \beta + \sin(4 \sin^{-1} \beta) - 8\beta(1 - \beta^2)^{3/2}] \quad (12)$$

となる。次に球を θ_0 だけねじったとき、接触面で生ずるトルクはせん断応力 τ と単位面積あたりの摩擦力 $\mu p(r)$ によって発生する。すべり領域では単位面積あたりの摩擦力 $\mu p(r)$ が作用し、固着領域ではねじりによるせん断応力 τ が作用する。したがって、全接触面内でのトルク T は

$$T = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \tau r^2 dr d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^a \mu p(r) r^2 dr d\theta = \frac{\pi r_0^3}{2} \tau_0 + 2\pi \mu \int_{r_0}^a r^2 p(r) dr \quad (13)$$

となる。式 (13) に式 (2) を代入して変形すると、

$$T = \frac{\pi r_0^3}{2} \tau_0 + \frac{3\mu a N}{32} [2\pi - 4 \sin^{-1} \frac{r_0}{a} - \sin(4 \sin^{-1} \frac{r_0}{a})] \quad (14)$$

となる。 $\tau_0 = \mu p(r_0)$ であるので、

$$T = \frac{3\mu N r_0}{4} \frac{r_0^2}{a^2} \left(1 - \frac{r_0^2}{a^2} \right)^{1/2} + \frac{3\mu a N}{32} [2\pi - 4 \sin^{-1} \frac{r_0}{a} + \sin(4 \sin^{-1} \frac{r_0}{a})] \quad (15)$$

となる。 $\beta = r_0/a$ において整理すると

$$T = \frac{3\mu a N}{32} [2\pi - 4 \sin^{-1} \beta + \sin(4 \sin^{-1} \beta) + 8\beta^3(1 - \beta^2)^{1/2}] \quad (16)$$

となる。式 (16) に式 (11) を代入すると、球と平面の材質が同じ場合の接触トルク T は次のようになる。

$$T = \frac{3.33}{32} \mu N^{1/3} \left(\frac{R}{E} \right)^{1/3} [2\pi - 4 \sin^{-1} \beta + \sin(4 \sin^{-1} \beta) + 8\beta^3(1 - \beta^2)^{1/2}] \quad (17)$$

次に接触面上で発生する減衰能を見積るために式 (9) と式 (16) から消散エネルギーを表す D と最大弾性エネルギーを表す $T\theta_0$ の比を求めると

$$\frac{D}{T\theta_0} = \frac{2\pi - 4 \sin^{-1} \beta + \sin(4 \sin^{-1} \beta) - 8\beta(1 - \beta^2)^{3/2}}{2\pi - 4 \sin^{-1} \beta + \sin(4 \sin^{-1} \beta) + 8\beta^3(1 - \beta^2)^{1/2}} \quad (18)$$

図3 実験装置

図4 実験装置と測定系の概略図

となる。式 (18) は固着比 $\beta = r_0/a$ とエネルギー消散率 $D/T\theta_0$ との関係を表している。

3. 実験装置および実験方法

図3のような実験装置で実験を行った。図4は実験装置と測定系の概略を示している。⑨の回転レバーの質量慣性モーメントは $0.3766 \text{ kgf} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^2/\text{rad}$ であり、これを支持している4本のばねのばね定数は 0.285 kgf/cm である。また2枚の鋼板に取付けられた球⑪を⑨の回転レバーに押付ける。縮付力は⑩のジャッキで与え、ひずみゲージをはった⑥の圧力変換器でその大きさを測定する。この信号を動ひずみ計⑤で増幅して電磁オシログラフ④に記録する。回転レバーにおもりをつるして初期回転角 θ_0 を与える。この回転角は回転レバーにはりつけた鏡⑦で測定した。またおもりをつるしている糸を焼き切って自由振動させ、この振動波形を加速度検出器①で検出する。この信号をチャージ増幅器②で

図5 回転レバーの模型図

図6 自由振動波形

増幅してオシロスコープ③でモニタしながら電磁オンログラフに記録した。回転レバーをモデル化すると図5のような振動系になる。中心から l_0 のところにおもりをつるし、初期回転角 θ_0 を与える。おもりの糸を焼き切って自由振動させると図6のようになり、締付力が0の場合は実線のようになる。また締付力 N が P の場合は破線のようになる。 $N=P$ の場合、 θ_0 が θ_1' になる消散エネルギーと $N=0$ の場合 θ_0 が θ_1 になる消散エネルギーとの差をとると、この差が接合面での消散エネルギーになる。したがって、回転角 θ_0 で、締付力 $N=0$ のときの荷重 W_0 、1サイクル後の回転角 θ_1 、そして締付力を加えたときの荷重 W 、1サイクル後の回転角 θ_1' を測定すれば、次のようにしてエネルギー消散率 $D/T\theta_0$ を求めることができる。1サイクルあたりに系全体で消散されるエネルギーを ΔE 、1サイクルあたりに接合面以外の系で消散されるエネルギーを Δe 、接合面で1サイクルに消散されるエネルギーを $4D$ とすると接合面で消散されるエネルギーは次のようになる。

$$4D = \Delta E - \Delta e \quad (19)$$

となり、また

$$\Delta E = \frac{1}{2} W_0 l_0 \theta_0 \left(1 - \frac{\theta_1}{\theta_0}\right) \quad (20)$$

$$\Delta e = \frac{1}{2} W_0 l_0 \theta_0 \left(1 - \frac{\theta_1}{\theta_0}\right) \quad (21)$$

となる。(19), (20), (21) から

$$D = \frac{1}{8} W_0 l_0 (\theta_1 - \theta_1') \quad (22)$$

図7 接触トルクと固着比 β との関係

となる。また接合面上で働くトルク T は

$$T = (W - W_0) l_0 \quad (23)$$

となり、式(22)と(23)から

$$\frac{D}{T\theta_0} = \frac{W_0(\theta_1 - \theta_1')}{8(W - W_0)\theta_0} \quad (24)$$

となる。球の回転角 θ と固着比 β との関係は実験によって求めることができる。式(16)に β の値を代入して得られるトルクを球に加えて θ を測定し、回転角 θ と固着比 β との関係を求めればよい。この実験で用いる球と平面は同じ材質の鋼であるので、式(17)を用いた。鋼球の直径は1 inであり、また球と回転レバーの材質は鋼であるので、縦弾性係数 E は 2×10^4 kg/mm²である。球と回転レバーとの接合面はアセトンでふいて脱脂しているので鋼と鋼の接触になる。動的な摩擦係数を求めることが困難であるので、本報告では文献を参考にして摩擦係数 μ を0.58とすると¹⁴⁾、式(17)は

$$T = 0.00516 N^{4/3} \{ 2\pi - 4 \sin^{-1} \beta + \sin(4 \sin^{-1} \beta) + 8\beta^3(1 - \beta^2)^{1/2} \} \quad (25)$$

となる。図7は式(25)によって得られた接触トルク T と固着比 β との関係を締付力 N をパラメータとした線図である。この図から球に加わる締付力の大きさ、および外部から球に作用するトルクを求めることができれば固着比 β を決定することができる。したがって、球にある大きさのトルクが作用する場合に、球が回転する回転角を求めることができれば、球の回転角 θ と固着比 β との関係を決定することができる。次に球に作用するトルク T と球の回転角 θ の関係を求めるために図8のような実験を行った。図のように平行な平面をもつ軟鋼の円板に糸をまきつけ、滑車を介してその糸に円板の重さと同じ重さの片方を加えて、円板を押付け、つり上げたおもりの片方にさらにおもりを加え、回転が静止し

図8 T と θ との関係を求める実験装置の概略図

図9 回転トルクと回転角との関係

たところでの回転角 θ を読む。

4. 実験結果および考察

以上のような実験装置と実験方法で実験すると以下のような実験結果が得られた。静的な回転トルクすなわち接触トルクと回転角との関係を求めてみると、図9のようになる。回転角が一定のとき、締付力が4~26 kgまで増加すると、回転トルクも増加する。また締付力が一定のときは回転角の増加とともに局部すべりが発生するので、ねじり剛性が小さくなり、全体すべりが発生する。この実験によって、回転角の増加とともに、接触面上では局部すべり、全体すべりが発生することがわかる。図10は接触面の50倍の顕微鏡写真である。この写真は局部すべりが発生していることを示している。この写真の左側は研削面であり、内側(白くなったところ)が接触面である。接触面の内側には白い部分と黒い部分があり、黒くなった部分は球と平面の相対すべりによってできた擦過跡であると思われる。接触面内での外側と内側で白くなっているが、内側では鋼球と軟鋼板が固着しているので、相対すべりがなく擦過跡もない。しかし外側では相対すべりが大きいにもかかわらず、圧力が小さいので、擦過跡のはっきり現れていないものと思われる。

締付力: 16 kg, 回転角: 0.002 rad

図10 接 触 面

図11 回転角とすべり領域比との関係

この写真による観察結果によって、球と平面を接触させ、相対的なねじり運動をさせると接触面上で局部すべりが存在することが明らかになった。また球に作用するトルクと回転角との関係を表している図9と球に作用するトルクと固着比 β の関係を表している図7とから図11のような関係が求まる。この図によると、締付力には関係なく、両対数グラフ上で1本の直線で表すことができる。このことから、接触面の局部すべりの程度を表す固着比 β は球と平面が同じ材質の場合、締付力の大きさには関係なく、球と平面の相対回転角 θ のみに依存する。 β が0.13から0.95の範囲では $\theta = 10.7(1.1 - \beta)^{1.49} / 400$ で表すことができる。ここで θ の単位は rad である。この式を用いると回転角 θ を固着比 β に変換することができる。次に前述した実験装置および実験方法に従って式(24)を用いて求めたエネルギー消散率と初期回転角との関係を求めた結果、エネルギー消散率は初期回転角の増加とともに増加する傾向を示した。このエネルギー消散率と初期回転角との関係を図11に求められた θ と β の関係を用いて、エネルギー消散率と固着比 β との関係

図 12 減衰能とすべり領域との関係

に整理したのが図 12 である。この図で実線は式 (18) によって計算した理論曲線である。横軸の $1-\beta$ はすべりの程度を表す量で、すべり領域比という。このすべり領域比の増加とともにエネルギー消散率が増加する傾向がある。この結果は局部すべりは減衰能をもつことを示している。以上のことから、球の半径、球と平面との接触面間の介在物やそれらの材質によって決まる摩擦係数、そして球と平面の縦弾性係数が決まれば、球に作用するトルクと回転角との関係を用いて、球と平面の相対回転角 θ と固着比 β との関係が求まり、球と平面の接触面上の局部すべりによる減衰能であるエネルギー消散率を求めることができる。したがって、回転角 θ と固着比 β との関係が求まれば、接触面の局部すべりによる減衰能であるエネルギー消散率を求めることができ、そのエネルギー消散率は局部すべりの程度を表す固着比 β に依存する。

5. 結 論

機械構造の結合部の接合面での減衰能の発生機構を明らかにするために、単純なモデルの球と平面の接触の状態での減衰能を解析的に評価し、これを実験で確かめた結果つぎのようなことが明らかになった。

- (1) 球と平面を接触させて、相対的なねじり運動をさせると、接触面上では局部すべりが存在する場合があります、その局部すべり運動は減衰能をもつ。
- (2) 接触面の局部すべりの程度を表す固着比 β は球と平面が同じ材質で鋼の場合、締付力の大きさには関

係なく球と平面の相対回転角 θ のみに依存する。

- (3) 結論 (2) の回転角 θ と固着比 β の関係が求まれば、接触面の局部すべりによる減衰能であるエネルギー消散率を求めることができ、そのエネルギー消散率は局部すべりの程度を表す固着比 β に依存する。

おわりに、この研究を行う機会を与えていただいた琉球大学・平敷兼貴教授ならびにこの研究を行うことに終始協力していただいた新川和夫君に感謝の意を表す。

文 献

- 1) 鈴木栄司: 構造物における固体摩擦による構造減衰について (第 1 報), 日本機械学会論文集, 43, 366 (1977) 504.
- 2) 鈴木栄司: 構造物における固体摩擦による構造減衰について (第 2 報, 第 3 報), 日本機械学会論文集, 43, 366 (1977) 1290.
- 3) S. W. E. Earles & D. F. Beards: Some Aspects of Frictional Damping as Applied to Vibration Beams, Int. J. Mach. Tool Des. Res., 10, (1970) 123.
- 4) 橋本文雄, 久米靖文: カップリング状モデルの矩形波応答発生限界, 精密機械, 38, 10 (1972) 844.
- 5) 久米靖文, 橋本文雄: カップリング状モデルの矩形波状応答領域での振動特性, 精密機械, 投稿中.
- 6) L. E. Goodman: A Review of Progress in Analysis of Interfacial Slip Damping, Structural Damping, Pergamon Press, N. Y., (1960) 35.
- 7) L. E. Goodman & J. H. Klumpp: Analysis of Slip Damping with Reference to Turbine-blade Vibration, J. Appl. Mech., 23, (1956) 421.
- 8) K. L. Johnson: Surface Interaction between Elastically Loaded Bodies under Tangential Forces, Proc. Roy. Soc., A, 230, (1955) 531.
- 9) L. E. Goodman & G. E. Bowie: Experiments on Damping at Contacts of a Sphere with Flat Plates, Experimental Mechanics, (1961) 48.
- 10) L. E. Goodman & C. B. Brown: Energy Dissipation in Contact Friction Constant Normal and Cyclic Tangential Loading, J. Appl. Mech., Trans. ASME, (1962) 17.
- 11) R. D. Mindlin: Compliance of Elastic Bodies in Contact, J. Appl. Mech., Trans. ASME, (1949) 259.
- 12) J. L. Lubkin: The Torsion of Elastic Spheres in Contact, J. Appl. Mech., Trans. ASME, (1951) 73.
- 13) 例えば, Timoshenko & Goodier: Theory of Elasticity, McGraw-Hill, N. Y., (1951) 372.
- 14) バウデン・テイパー (曾田範宗訳): 固体の摩擦と潤滑, 丸善 (1961) 312.