円筒形希土類磁石による反発力系の動特性 (第2報)*

—自由度1の強制振動系の挙動—

小 島 宏 行** 山 川 出 雲**

Dynamic Characteristics of the Repelling Force System Consisting
of the Cylindrical Rare-earth Magnets (2nd Report)

—Behavior of Forced Vibrations of the One-degree-of-freedom System—

Hiroyuki KOJIMA, Izumo YAMAKAWA

The dynamic responses to the sinusoidal displacement of a vertical repelling force system with cylindrical type rare-earth magnets are investigated. The analysis is made under an assumption that the repelling force is inversely proportional to the n -th power of the center distance between the two magnets and is expressed by a series in powers of the relative displacement of the magnets. The results from the numerical calculation and the experiment are concluded as follows:

- (1) When the mass is suspended by a repelling force of the magnet on its bottom face, the response curve shows composite characteristics; i.e., the curve changes its form gradually from the soft spring character to the hard spring one with the growth of the amplitude, and the unstable regions are found on both sides of the back-bone curve in the case of subharmonic resonance.
- (2) When the mass is interposed between the repelling forces on top and bottom, the response curve takes the hard spring characteristics and the shorter the distance between the fixed magnets, the more remarkable its tendency becomes.
- (3) The neutral line of the vibration shifts to the upward direction by a definite degree depending upon the amplitude as well as the unsymmetry of the repelling forces acting on the vibrating mass.

1. 緒 言

円筒形希土類磁石を、同種の極が対向するように一直線上に並べると、逆磁界に対し安定な極めて強い反発力が磁石間に作用する。この反発力はいろいろな機器に有効に用いられ¹⁾、たとえば磁気軸受²⁾、磁気動吸振器^{3)~5)}の研究などが散見されるが、このような反発力系の挙動を系統的に解析した研究は筆者らの知る限り見当たらない。

先にいくつかの磁石について実験的および解析的⁵⁾⁶⁾に調べた結果によれば、反発力特性は磁石中心間距離の逆 n 乗に比例するものとみなしうることを知った。本研究はこれをテイラー展開した式⁵⁾を出発点として、反発力の非線形性および非対称性を考慮した振幅応答を、調和バランス法⁸⁾によって求めるとともに安定解析を行い、さらにこれらを数値計算例により考察し、それらの一部を実験結果と照合したものである。

2. 理 論 解 析

2.1 運動方程式

図1は、主質量の上下に反発力が作用する自由度1の変位励振型強制振動系のモデルである。このような系の

$$x = y_1 - y_{10} = y_{20} - y_2, \quad y_1 + y_2 = y_{10} + y_{20} = l$$

図1 自由度1の変位励振型反発力系

* 原稿受付 昭和53年5月22日。昭和53年度精機学会春季大会学術講演会(昭和53年3月31日)にて発表。

** 正 会 員 群馬大学工学部(桐生市天神町1-5-1)

主質量の運動方程式は、図の記号を用いれば次のように書ける⁵⁾。

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + \alpha z - \beta z^2 + \gamma z^3 = m\Omega^2 u_0 \cos(\Omega t + \phi) \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} w &= k_1 y_{10}^{-n_1} - k_2 y_{20}^{-n_2} \\ \alpha &= k_1 n_1 y_{10}^{-(n_1+1)} + k_2 n_2 y_{20}^{-(n_2+1)} \\ \beta &= (1/2) \{ k_1 n_1 (n_1+1) y_{10}^{-(n_1+2)} \\ &\quad - k_2 n_2 (n_2+1) y_{20}^{-(n_2+2)} \} \\ \gamma &= (1/6) \{ k_1 n_1 (n_1+1) (n_1+2) y_{10}^{-(n_1+3)} \\ &\quad + k_2 n_2 (n_2+1) (n_2+2) y_{20}^{-(n_2+3)} \} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここに、 m は質量、 w は重量、 c は粘性係数、 $z (=x-u)$ は相対振動変位、 α, β, γ は復元力の各項の係数、 Ω は励振角振動数、 u_0 は励振変位、 ϕ は位相角、 y_{10}, y_{20} は磁石静止時の中心間距離、 k_1, k_2 は特性係数、 n_1, n_2 は特性指数である。次に、新変数 $q (=z - \beta/3\gamma)$ を用いて式(1)を変換したうえ無次元化すると次式が得られる。

$$\ddot{q} + 2\mu\omega_n \dot{q} + aq + bq^3 = G + \Omega^2 u_0 \cos(\Omega t + \phi) \quad (3)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \mu &= c/2\sqrt{ma}, \quad \omega_n = \sqrt{\alpha/m}, \quad a = (\alpha - \beta^2/3\gamma)/m \\ b &= \gamma/m, \quad G = \{ (2\beta^3/27\alpha\gamma^2) - (\beta/3\gamma) \}/m \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

2.2 基本調波振動

まず、基本調波振動については、近似解を次のように置く。

$$q = p_0 + z_0 \cos \Omega t \quad (5)$$

ただし、 p_0 は振動基線のずれを示す項で、 p_0 および z_0 はともに時間の関数とする。この式を式(3)に代入し、二次以上の微小項を無視すれば、両辺の定数項および $\cos \omega t$, $\sin \omega t$ の各項の係数から次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} 2\mu\omega_n \dot{p}_0 + ap_0 + b(p_0^3 + \frac{3}{2}p_0 z_0^2) &= G \\ 2\mu\omega_n \dot{z}_0 + \left\{ (a - \Omega^2) + b(3p_0^2 + \frac{3}{4}z_0^2) \right\} z_0 &= \Omega^2 u_0 \cos \phi \\ 2\Omega \dot{z}_0 + 2\mu\omega_n \Omega z_0 &= \Omega^2 u_0 \sin \phi \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

上式において $\dot{p}_0 = \dot{z}_0 = 0$ とすれば定常解が以下の形で得られる。

$$\left. \begin{aligned} ap_0 + b(p_0^3 + \frac{3}{2}p_0 z_0^2) &= G \\ \left\{ (a - \Omega^2) + b(3p_0^2 + \frac{3}{4}z_0^2) \right\}^2 z_0^2 &= (\Omega^2 u_0)^2 \\ \phi &= \tan^{-1} \left\{ \frac{2\mu\omega_n \Omega}{(a - \Omega^2) + b(3p_0^2 + \frac{3}{4}z_0^2)} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\text{振動変位: } x = x_0 \cos(\omega t + \delta) + D_0 \quad (8)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= (z_0^2 + 2u_0 z_0 \cos \phi + u_0^2)^{1/2} \\ D_0 &= p_0 + \frac{\beta}{3\gamma} \\ \delta &= \tan^{-1} \left(\frac{u_0 \sin \phi}{z_0 + \cos \phi} \right) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

振動の安定性に関しては、定常解 p_0, z_0 からの微小なずれを ξ, κ とすれば式(6)から直ちに次の関係式を得る。

$$\left. \begin{aligned} Q_1 \xi + 2\mu\omega_n \dot{\xi} + 3bp_0 z_0 \kappa &= 0 \\ 6bp_0 z_0 (Q_2 - \Omega^2) \xi + \{ (Q_2 - \Omega^2)(Q_3 - \Omega^2) \\ &\quad + (2\mu\omega_n \Omega)^2 \} \kappa + 2\mu\omega_n (Q_2 + \Omega^2) \kappa = 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= a + b(3p_0^2 + \frac{3}{2}z_0^2) \\ Q_2 &= a + b(3p_0^2 + \frac{3}{4}z_0^2) \\ Q_3 &= a + b(3p_0^2 + \frac{9}{4}z_0^2) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ここで、

$$\xi = \xi_0 e^{st}, \quad \kappa = \kappa_0 e^{st} \quad (12)$$

とおけば、 S に関する特性方程式として、

$$\begin{aligned} 4\mu^2 \omega_n^2 (Q_2 + \Omega^2) S^2 + 2\mu\omega_n \{ (Q_2 - \Omega^2)(Q_3 - \Omega^2) \\ + Q_1(Q_2 + \Omega^2) + (2\mu\omega_n \Omega)^2 \} S \\ + Q_1 \{ (Q_2 - \omega^2)(Q_3 - \omega^2) + (2\mu\omega_n \Omega)^2 \} \\ - 18b^2 p_0^2 z_0^2 (Q_2 - \Omega^2) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

が得られ、その安定判別は Routh-Hurwitz の条件に従って行えばよい。他方、共振曲線の垂直接線との接点の軌跡は、式(13)の定数項をゼロと置いた式に一致し次のようになる。

$$\begin{aligned} Q_1 \{ (Q_2 - \Omega^2)(Q_3 - \Omega^2) + (2\mu\omega_n \Omega)^2 \} \\ - 18b^2 p_0^2 z_0^2 (Q_2 - \Omega^2) = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

また、背骨曲線は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} z_0^2 &= \frac{2(G - ap_0^2 - bp_0^3)}{3bp_0} \\ 5bp_0^3 + (a - 2\Omega^2)p_0 + G &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

2.3 分数調波振動

主題の系は減衰が小なる場合、式(1)に明らかなように 1/2 および 1/3 分数調波振動を発生する可能性がある。

まず、1/2 分数調波振動については式(3)において $\Omega = 2\omega$ とすることにより次式で近似される。

$$q = r_p + r_0 \cos \omega t + z_0 \cos(2\omega t + \phi) \quad (16)$$

ここで、 r_p は基線のずれ、 r_0, z_0 は振動振幅とする。以下基本調波の場合と同様な手法で取扱うために、基本調波は線形とみなし次のように置いた。

$$z_0^2 = \frac{\Omega^2 u_0}{\omega_n^2 - \Omega^2} \quad (17)$$

このような前提で導かれた定常解は、

$$\left. \begin{aligned} ar_p^2 + b \left(r_p^4 + \frac{3}{2} r_p^2 r_0^2 \right. \\ \left. + \frac{3}{2} r_p^2 z_0^2 + \frac{r_0^2 H_1}{4b} \right) &= r_p G \\ H_1^2 + (2\mu\omega_n\omega)^2 &= (3br_p z_0)^2 \\ \phi &= \tan^{-1} \left(\frac{-2\mu\omega_n\omega}{H_1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

安定判別についても前節とまったく同様な方法ですみ次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} H_1 \left\{ 2ar_p - G + b \left(4r_p^3 + \frac{3}{2} r_p r_0^2 + 3r_p z_0^2 \right) \right\} \\ + 2br_p (2H_1 + 3bz_0^2) \left(\frac{3}{8} r_0^2 - 3r_p^2 - \frac{H_1}{2b} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

なお、背骨曲線は式(15)中の Ω を 2ω でおきかえることによって求まる。

さらに、1/3分数調波振動についても取扱いは前述とまったく同様で、 s_p および s_0, z_0 をそれぞれ1/3分数調波振動の基線のずれおよび振幅とすれば、その近似式は、

$$q = s_p + s_0 \cos \omega t + z_0 \cos(3\omega t + \phi) \quad (20)$$

定常解；

$$\left. \begin{aligned} as_p + b \left(s_p^3 + \frac{3}{2} s_p s_0^2 + \frac{3}{2} s_p z_0^2 \right) &= G \\ H_2^2 + 4\mu^2 \omega^2 \omega_n^2 &= \left(\frac{3}{4} b s_0^2 z_0^2 \right)^2 \\ \phi &= \tan^{-1} \left(\frac{-2\mu\omega_n\omega}{H_2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

ここに、

$$H_2 = (\omega^2 - a) - b \left(3s_p^2 + \frac{3}{4} s_0^2 + \frac{3}{2} z_0^2 \right) \quad (22)$$

安定判別の式；

$$\left(H_2 + \frac{3}{8} b z_0^2 \right) \left\{ a + b \left(3s_p^2 + \frac{3}{2} s_0^2 + \frac{3}{2} z_0^2 \right) \right\} - 12bs_p^2 H_2 = 0 \quad (23)$$

および式(15)において Ω を 3ω でおきかえた形の背骨曲線の式がそれぞれ得られる。

3. 数値計算結果と実験結果

3.1 数値計算結果

理論計算で導かれた振幅の式は、すべて非線形連立方程式となった。なお、本研究では共振曲線に及ぼすパラ

表1 供試磁石 (円筒形希土類磁石) の諸元

試料	n	k (kg・mm ⁿ)	内径 (mm)	外径 (mm)	厚み (mm)	磁化の 強さ (kG)	外径と 厚みの 比	内径と 外径の 比	体積 (mm ³)
a	3.96	2.17×10^7	8.11	32.44	32.44	10.0	1.0	0.25	3.14×8000
b	3.28	8.03×10^5	10.22	40.87	20.44	10.0	2.0	0.25	3.14×8000
c	2.26	6.29×10^3	16.22	64.88	8.11	10.0	8.0	0.25	3.14×8000
d	2.54	1.88×10^4	14.00	45.00	15.00	8.1	3.0	0.31	8.62×10^4

表2 倍率曲線の数値計算諸元 (試料 b)

A(磁石1組)及びB(磁石2組)				Aの場合	Bの場合		
w (kg)	u_0 (mm)	$n_1=n_2$	$k_1=k_2$ (kg・mm ⁿ)	y_{10} (mm)	y_{10} (mm)	y_{20} (mm)	l (mm)
1.0	2.0	3.28	8.03×10^5	63.1	49.8	60.2	110

図2 μ をパラメータとする基本調波の倍率曲線

メータ μ の影響のみに注目した。ここで、共振曲線ならびに安定判別曲線を得るための計算はいずれも反復法によった。ただし後者については、振幅の式と安定判別の式とから μ を消去して得られる式を用いた。数値計算における磁石の諸元は表1および表2のとおりである。計算結果を磁石1組の場合と2組の場合を対応させて示したものが図2～図5である。ここで磁石1組の場合(A)とは、上面の磁石(BB')を取り去り下面の磁石(AA')の反発力だけで浮上している場合、磁石2組の場合(B)とは、主質量が上下2組の磁石(AA', BB')の反発力で支持されている場合である。図2は基本調波振動の共振曲線を示すもので、磁石1組の場合は振幅の比較的小さい範囲では軟化ばね特性 (soft spring character) を示しているが、振幅の増大に伴い次第に硬化ばね特性 (hard spring character) に推移している。これに対し磁石2組の場合は、顕著な硬化ばね特性を示している。後者の

図3 μ をパラメータとする基本調波の振動基線のずれ 図5 μ をパラメータとする1/3分数調波の倍率曲線 図4 μ をパラメータとする1/2分数調波の倍率曲線

前者に対する著しい相違は、主質量の上下に働く反発力の差の形で復元力が作用するために、変位の2乗項がほぼ相殺され、非対称性が磁石1組のそれに比べて軽微となるためである。図3は基本調波振動の振動基線のずれを倍率の形で示したもので、その値はいずれも共振近傍において、著しく大きいことがわかる。他方、磁石が2組の場合のずれは1組の場合のそれに比べ極めて小さい。図4は1/2分数調波振動の倍率曲線を示したもので、磁石1組の場合は硬化ばねおよび軟化ばねの両特性をあわせもち、かつ背骨曲線の両側に不安定領域が存在する。これに対し、磁石2組の場合は典型的な硬化ばね特性と

なっている。図5は1/3分数調波振動についての計算例で、1/2分数調波振動の場合とほぼ同様な傾向がある。

次に固定磁石中心距離 $l(=y_1+y_2)$ 、主質量 w および磁石の形状などの諸因子が強制振動応答に及ぼす影響を、1/2分数調波振動の背骨曲線により推論してみたい。

まず図6(a)は他の量を固定し、中心距離 l を無限大(磁石1組に該当)から段階的に減少させた場合の背骨曲線の変化を示したものである。本図から l の減少は、非線形性を強める反面、非対称性を軽微ならしめることがわかる。次に図6(b)は、磁石1組の場合の主質量 w の影響を示す例で、非線形性は w の増加に伴いより顕著となるが、非対称性についてはほとんど変化のないことがわかる。図6(c)は、同一体積で形状の異なる三つの磁石(表1, a, b, c)についての計算例であるが、目立った変化は認められない。

3.2 実験結果

筆者らがこのたび用いた実験装置は図7のとおりで、主質量と1組の磁石とからなる自由度1の反発力系を変位で励振し、かつアルミ板と磁石の組合せによる渦電流によって、系に減衰を与えるようにしてある。この場合減衰の大きさは、アルミ板の厚みおよび磁石とのギャップとによって調整できる。なお反発力および渦流制振に用いた磁石は、表1(d)のような諸元を有する同一規格の円筒形希土類磁石である。図8は、制振用のアルミ板を除去したときの実験結果で、予想どおりの分数調波振動が発生した。この場合、1/2分数調波振動は振動数を高域側から減少させる場合のみ生起したが、逆に振動数を低域側から増大させる場合には現れなかった。これ

(a) 中心距離 l (mm) の影響 (b) 主質量 w (kg) の影響 (c) 磁石形状の影響

図6 1/2 分数調波共振曲線のパラメータによる変動

1: 磁石, 2: 主質量, 3: 制振用磁石, 4: 渦流制振用アルミニウム板, 5: 振動台, 6: 変速モータ

図7 実験装置概略図

試料: d, 磁気減衰なし
図8 共振曲線の実験結果と計算値 (1)

試料: d, 磁気減衰あり
図9 共振曲線の実験結果と計算値 (2)

は低域側の共振曲線の立上がり部分に不安定領域が存在することによる。また1/3分数調波共振については、外部から軽い衝撃を加えることによってのみ跳躍的に発生した。このことは、この調波共振が小振幅領域では現れないことを示す理論曲線の正しさを肯定している。図9は、渦流制振力をわずかに作用させた場合で、1/3分数調波共振の発生は見られなかった。渦流制振力をさらに強めると図10に示すように、分数調波共振は消失し基本調波共振だけとなる。また図11は、振動基線のずれを示す実験結果で、その値は共振時において特に大きいことを実証している。なお連続カメラによって撮影した振動波形の一、二の例を図12に示しておく。

4. 結 言

円筒形希土類磁石の反発力をばね作用としてもつ自由度1のたて型非線形系の強制振動応答を基本調波および1/2, 1/3分数調波共振について理論的に調べ、数値計算結果の一部を実験結果と対照することにより、次のことが明らかになった。

- (1) 磁石1組の場合、すなわち主質量が片面にのみ反発力を受けて浮上している場合の共振曲線は、基本調波および分数調波のいずれに対しても振動数と振幅の増大に伴い、軟化ばね特性から次第に硬化ばね特性に移行する。また分数調波共振は、次数の低い

試料: d, 磁気減衰あり

図10 共振曲線の実験結果と計算値(3)

図11 振動基線のずれの実験結果と計算値(図9の場合)

ものほど発生しやすい傾向があり, その背骨曲線の両側に不安定領域をもつ。

- (2) 磁石2組の場合, すなわち主質量が上下に反発力を受けて浮上している場合の共振曲線は, 基本調波および分数調波のいずれを問わず固定磁石間距離 l が比較的小さい範囲では, 典型的な硬化ばね特性を示し, l の増大とともに磁石1組の場合の特性に近づく。
- (3) 鉛直型磁気反発力系では, 磁石1組及び磁石2組のいずれについても振動基線が上方にずれるが, その傾向は前者の方が後者の場合より顕著である。かつその値は共振時において特に大きい。

おわりに, 実験に際し何かと協力いただいた群馬大学工学部武田定彦講師および井開重男技官に対し深甚の謝意を表するとともに, 磁石の提供はじめ数々の御助言を賜った日立金属(株)前川弘氏ならびに日本サーボ(株)池田真治氏に厚く御礼申し上げる。なお, 本研究は文部省科学研究費補助金(一般研究D)によるものであることを付記する。

(a) 基本調波共振(励振振動数: 3.6Hz, 振幅: 17.6mm)

(b) 1/2分数調波共振(励振振動数: 7.1Hz, 振幅: 19.9mm)

(c) 1/3分数調波共振(励振振動数: 10.6Hz, 振幅: 21.2mm)

図12 強制振動波形例

参考文献

- 1) 山川和郎: 希土類コバルト磁石とその応用, 精密機械, **43**, 5 (1977) 621.
- 2) 倉掛幸隆: 磁気力を受ける物体の運動について——磁気力により浮かされた物体の垂直方向の強制振動について, 佐世保工高専研究紀要, **6** (1970) 1.
- 3) 倉掛幸隆: 磁気力で結合された2物体系の振動について——垂直方向の強制振動, 佐世保工高専研究紀要, **8** (1971) 15.
- 4) 山川出雲, 柴田圭一: 磁性反ばつ力を利用した動吸振器, 精密機械 **38**, 12 (1972) 1030.
- 5) 山川出雲, 武田定彦, 小島宏行: 3個の永久磁石よりなる新型動吸振器の挙動, 日本機械学会論文集, **42**, 364 (1976) 3815.
- 6) 小島宏行: 円筒形希土類磁石による反発力系の動特性(第1報)——反発力の解析, 精密機械, **44**, 5 (1978) 609.
- 7) P.A.Studer: A Practical Magnetic Bearing, IEEE Trans. Mag., **13**, 5, (1977) 1155.
- 8) C. Hayashi: Nonlinear Oscillations in Physical Systems, McGraw-Hill, New York, N.Y., (1964).