表面おうとつを考慮した球面と平面の 接触変形 (第1報)

——接触円直径と接触応力分布——

塚田 忠夫** 阿武 芳朗**

On the Approach between a Sphere and a Rough Surface (1st Report)

——Analysis of Contact Radius and Interface Pressure——

Tadao TSUKADA, Yoshiro ANNO

An analysis of deformation between a sphere and a rough surface in contact is very complicated, because the asperities in contact deflect nonlinearly. Assuming that the asperities in contact deform elastically and plastically, the deformation theory of asperities which the authors had derived from the contact between two rough planes was applied to the contact problems between a sphere and a rough plane. In the first report, we investigated the contact radius of sphere which could be measured experimentally. The materials of specimens were SUJ2 for spheres and SK3 for flat test pieces. The contact radius of sphere was measured after etched by the corrosive of ethanol + 0.5% HNO_3 . The theoretical results were very close to the experimental ones of contact radius. Furthermore it was made clear quantitatively that the interface pressure distribution and the maximum pressure depend greatly on the surface asperity height.

1. 緒 言

球面と平面の接触変形問題は工作機械等のボールガイド部の剛性、球状うねりをもつ接合面の剛性、球状測定子による寸法測定の精度、弾性流体潤滑における応力状態の推定等にとって重要であるが、機械加工されて表面に微小なおうとつをもつ球面と平面の接触変形問題は、表面おうとつの接触変形が接触応力に対して非線形であるため¹⁾に非常に複雑なものとなっている。

従来、球面と平面の接触問題は表面おうとつの接触微小突起が弾性変形または塑性変形するものとして解析されてきた。例えば、Greenwood²⁾は接触微小突起を球状としそれが弾性変形するものとして微小突起の変形と接触母材の変形を適合させて解いており、また Nuri³⁾は同様の前提で個々の接触微小突起の位置と高さを仮定し、築添⁴⁾は接触微小突起は塑性変形するものとして解析を試みている。石垣⁵⁾は微小突起が弾性変形する場合と塑性変形する場合について母材の変形を高次関数であてはめ解析しており、さらに加藤⁶⁾は接触後の微小おうとつの塑性変形量から接触応力分布を求める実験を

行っている。いずれも接触微小突起が弾性変形（突起が硬いときに生じやすい）あるいは塑性変形（突起が軟らかいときに生じやすい）することを前提としているが、一般の構造用鋼材では弾塑性変形するものとして解析する必要がある。

以上のような微小突起の接触問題に対し、本研究は2平面接触部の表面おうとつによる弾塑性変形に関する実用式⁷⁾を応用して表面おうとつの存在する球面と平面の接触変形を実験解析するものである。一般に球の径に対し接触円直径（球と平面の接触円内は突起の接触部以外は大部分空間であるので見掛け上の接触円直径であるが、ここでは接触円直径と呼ぶことにする）は非常に小さいために接触応力、突起の接触状態等を実験的に確かめることは困難である。これに対し接触円直径および球と平面の近寄り量を測定することは可能である。ここでは接触母材が塑性変形しない範囲内で種々の機械加工された平面と球面の接触における接触円直径について実験解析した結果を報告する。なお本研究で使用した平面の加工法は平面研削加工、旋削加工、正面フライス加工、ラップ加工である。

2. 球面と平面の接触変形機構

2.1 表面おうとつの接触変形

機械加工された2平面の表面おうとつによる垂直方向

* 原稿受付 昭和53年8月19日。昭和51年度精機学会秋季大会学術講演会（昭和51年10月13日）にて発表。

** 正会員 東京工業大学工学部（東京都目黒区大岡山2-12-1）

表1 A_e, A_s, p_0 の値の例 (計算値)
研削加工面, $2R_0=0.5 \text{ mm}$, $Hv=250$

$\sigma_e (\mu\text{m})$	$A_e (\mu\text{m})$	$A_s (\mu\text{m})$	$q_0 (\text{kgf/mm}^2)$
0.04	0.30	0.015	0.0025
0.10	0.71	0.047	0.0093
0.40	1.79	0.46	0.049
1.00	3.01	1.53	0.125
2.50	5.90	4.26	0.347

接触変形量は次式で与えられる⁷⁾。

$$\begin{aligned} \delta_E(q) &= A_e \{ (q+q_0)^{0.09} - q_0^{0.09} \} \\ \delta_S(q) &= A_s \{ (q+q_0)^{0.18} - q_0^{0.18} \} \end{aligned} \quad (1)$$

ここで, δ_E, δ_S : 接触変形量の弾性変形成分と塑性変形成分, A_e, A_s : 表面おうつの大きさ σ_e と接触部材のかたさ Hv および表面の加工法によって決まる定数, σ_e : 接触2部材の表面粗さの高さに関する標準偏差を σ_1, σ_2 とするとき $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ で与えられる値, q : 接触応力, q_0 : 表面おうつの接触開始位置により決まる定数。これらの値は接触円直径 $2R_0$ を 0.5 mm としたとき表1のようなものとなる。

式(1)の変形は表面おうつが存在するために生ずるもので, 表面おうつのない $\sigma_e=0$ では $A_e=A_s=0$ となる。なお, この式の適用は表面おうつの高さの確率密度関数が正規分布で近似される場合であり⁸⁾, また, δ_E, δ_S が関係する表面からの変形深さは接触突起の平均間隔に近いものである⁹⁾。

2.2 球面と平面の接触

本研究では接触母材が塑性変形しない範囲を対象としているため大変形を考える必要がなく, したがってここでは接触部のせん断力は無視できるものとし, 接触面に垂直方向の成分のみを対象として考える。

半無限体上に集中荷重 p が作用したときの表面の弾性変形量は次式で与えられる¹⁰⁾。

$$\frac{1-\nu^2}{\pi E} \frac{p}{r} \quad (2)$$

ここで, ν : ポアソン比, E : 縦弾性係数, r : 表面上の荷重点からの距離。

いま図1のように半径 R の円内に等分布応力 q_i が作用し, その中心 O から R_k 離れた位置 A での表面変位 $\delta(R_k, R, q_i)$ は式(2)より次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \delta(R_k, R, q_i) &= \frac{1-\nu^2}{\pi E} q_i \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \int_{r_B}^{r_C} \frac{1}{r} r dr d\theta \\ &= \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} q_i R_k \int_0^{\theta_0} \sqrt{(R/R_k)^2 - \sin^2 \theta} d\theta, \\ (\theta_0 &= \sin^{-1} \frac{R}{R_k}, R_k > R) \end{aligned}$$

図1 円 O に等分布応力 q_i が作用したときの A 点の変位を考える説明図

図2 接触部縦断面と記号

$$\begin{aligned} &= \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} q_i R_k \int_0^{\theta_0} \sqrt{1 - (R/R_k)^2 \sin^2 \theta} d\theta, \\ (\theta_0 &= \pi/2, R_k \leq R) \end{aligned} \quad (3)$$

表面おうつの接触変形を平均化した式(1)の実用式が適用できれば, 表面おうつの方向性の問題は式(1)に含まれているためここでは考慮しなくてもよくなり, 球面と表面おうつのある平面の接触は軸対称問題として取扱えることになる。図2のように接触円直径 $2R_0$ を $2n$ 等分し, 幅 $\Delta R = R_0/n$ の n 個のリングと中心部の直径 ΔR の円を考える。このように分割されたリングおよび円には等分布荷重 $q_1, q_2, \dots, q_{n+1}$ がそれぞれ作用し, 各リングの変位は幅 ΔR の中央で代表させ $u_1, u_2, \dots, u_{n+1}$ とする。式(3)より i 番目のリングの荷重によって生ずる k 番目のリングでの変位 $\delta_{(k,i)}^*$ は次式となる。

$$\begin{aligned} \delta_{(k,i)}^* &= \delta(R_k, R_i + \Delta R/2, q_i) \\ &\quad - \delta(R_k, R_i - \Delta R/2, q_i), (i \neq 1) \\ &= \delta(R_k, R_i + \Delta R/2, q_i), (i=1) \end{aligned} \quad (4)$$

表面おうつの接触変形に寄与する表面からの深さは平均接触突起間隔に近いものでかなり小さいため⁹⁾, 表面おうつの取扱いを図3のように考える。すなわち, 式(1)の変形をするばねが球面または平面上に互いに独立に存在するものとする。このとき, 球面と平面の材質が同じものとすれば同一接触箇所での両者の母材の変位は等しい。したがって, 図2の k 番目のリングにおける

図3 表面おうとつの変形の扱い

変位 u_k はこれら母材の変位と表面おうとつの変形量の和となる.

$$u_k = 2 \sum_{i=1}^{n+1} \delta_i^* + \delta_E(q_k) + \delta_S(q_k) \quad (5)$$

また球面と平面が接している条件は、球の直径を D 、図2の幾何学的重複量を y_k において

$$u_k - u_{n+1} = y_k = \sqrt{(D/2)^2 - R_k^2} - \sqrt{(D/2)^2 - R_{n+1}^2} \quad (6)$$

球にかかる全荷重 Q は

$$Q = 2\pi \sum_{k=2}^{n+1} R_k \Delta R q_k + \frac{\pi}{4} \Delta R^2 q_1 \quad (7)$$

となる.

2.3 数値計算法

式(5),(6)を満足する $q_1, q_2, \dots, q_n, (q_{n+1}=0)$ を解析的に得ることは難しく、本研究ではそのために数値計算によって求めることとした。まず分割数 $n=40$ ($n \geq 30$ であれば解にほとんど差がみられない) とし、任意の R_0 を与え、次に q_k に適当な初期値を設定して式(6)の誤差 $s = y_k - (u_k - u_{n+1})$ を求め、 $|s| \leq 10^{-3} \mu\text{m}$ に入るまで q_k を修正する繰返し計算を行った。式(1)の A_e, A_s は文献7)から導かれるが、表面おうとつの接触開始位置を示す q_0 は表面おうとつの母集団の大きさ、ここでは接触面積 πR_0^2 の大きさに依存する¹¹⁾。本研究では与えた R_0 に対して文献7)により q_0 を求めるようにしたが、 R_0 が小さくなるにつれて πR_0^2 に含まれる表面おうとつが少なくなり、 q_0 の信頼性は多少低下してくる¹¹⁾。

以上の計算法を検定するために表面おうとつのない理想状態で接触応力の計算を行った結果は Hertz の解に対して 0.5% 以内に入るものであった。

3. 実験方法および実験条件

接触円直径を実験する方法として本研究では図4の方法をとった。すなわち、40~45°Cのエタノール+0.5% HNO₃ (容積比)に荷重 Q で接触させた球と平面を浸し、狭いすきまにも液が入るように超音波洗浄器により 50 kHz の超音波を与えた。この方法で一定時間エッチングした後、接触部を干渉顕微鏡で観察した結果、実験したいずれの場合も接触領域は図6にみられるようにはぼ円形とみなせることがわかった。以上のことから接触部の最大外接円を接触円直径として測定することにした。図

図4 エッチング法による接触円直径の実験

図5 接触円直径の実験値の検定

5(a)は超仕上げされて表面おうとつが無視できる平面と鋼球の接触円直径の実験結果の例で、エッチング時間は 25 min 以上であれば十分であることを示している。図5(b)は種々の荷重 Q に対してエッチング時間 25 min¹⁾で得た結果である。なお、破線は同じ条件の接触に対する Hertz 理論による計算値である。

平面試料は SK 3, $\phi 18 \times 16$, $H_V = 240 \sim 790$ で研削加工、旋削加工、正面フライス加工、ラップ加工され、表面おうとつの高さの標準偏差 σ_1 が $0.1 \sim 2 \mu\text{m}$ になるよ

図6 接触部の観察写真例

旋削加工面
 $\sigma_e = 0.35 \mu\text{m}$
 $D = 10 \text{ mm}$
 $Q = 17.4 \text{ kgf}$
 $H_V = 240$

うにされている。鋼球はSUJ2, $H_V = 900$, $R_{\max} \leq 0.1 \mu\text{m}$ で $D = 3 \sim 20 \text{ mm}$ を使用した。

4. 実験結果

4.1 表面おとつの大きさと接触円直径

荷重 $Q = 17.4 \text{ kgf}$ で接触させてエッチングした接触部の写真を図6に示す。このようにして得られた接触円直径 $2R_0$ の例を図7, 図8に示す。図中の実線は式(5)~(7)による計算値, 破線は表面おとつのない理想状態に対する計算値である。なお, σ_e は $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ を表し, 本研究では σ_1 (平面試料の表面おとつの高さの標準偏差) に対して σ_2 (球表面の標準偏差) が非常に小さいので $\sigma_e \approx \sigma_1$ である。図7, 図8のいずれも σ_e の大きいものほど $2R_0$ は大きく, 本研究における計算値は実験値に非常に近いことがわかる。なお, 旋削加工面あるいは正面フライス加工面の表面おとつは周期性が強く, かつ方向性があるため, 接触円内に含まれるおとつは少なくなる。一方, 本研究で使用した式(1)は微小突起の弾塑性変形を多量の表面おとつの統計量で総合した平均的なものであるので, 旋削加工面等への適用が危ぶまれたが, 図8からもわかるように計算値は実験値に近く十分に適用できることが認められた。特に図8(a)の $\sigma_e = 2.1 \mu\text{m}$ ($R_{\max} \approx 11 \mu\text{m}$) の実験値は図9にみるように大きな突起が数個関与しているだけである。

本研究では接触母材が塑性変形しない範囲を対象としているが, 接触母材が塑性変形を開始する条件は表面おとつのない理想状態に対して次式で与えられる⁴⁾。

$$\frac{Q}{\pi R_0^2} \geq 1.1Y \quad (8)$$

ここで, Y : 単純引張りにおける弾性限度。

表面おとつが存在する場合には式(8)は応力状態が異なるためそのまま適用できないが, 本実験では荷重の上限として式(8)を目安とした。ただし, 図7(b), (c)で

図7 接触荷重 Q と接触円直径 $2R_0$ の関係

図8 各種加工面における接触荷重 Q と接触円直径 $2R_0$ の関係

は式(8)の荷重を越えて実験したため、荷重の大きいところで計算による近似度が多少悪くなっている。以上のように計算値は実験値にかなり近いことから、計算結果により次の事項を検討する。

4.2 接触部材のかたさの影響

表面おうとつの接触微小突起の塑性変形量は突起のかたさに影響され、軟らかいものほど塑性変形量は大きくなり、一方、突起の弾性変形量は硬いものほど増大する。図10は $H_v=250, 500, 800$ に対する接触円半径 R_0

図9 粗い旋削加工面における接触部の観察写真

図10 かたさの影響 ($H_v=250, 500, 800$ に対する計算値)

と接触最大応力 $q_{\max}$ の計算値を示したものである。かたさによってほとんど影響を受けていないが、これは上述したように接触表面おうとつの塑性変量と弾性変形量がかたさに対して相反する挙動を示し、両者の和がほぼ一定しているためである。

4.3 接触部の応力分布

接触円内での接触応力 q の分布は図11のようになる。 σ_e の増加に伴って接触円が大きくなり最大応力 $q_{\max}$ が減少することがわかる。

図11のような応力分布の最大応力 $q_{\max}$ と接触円半径 R_0 が荷重 Q によって変化する状態を図12に示す。ここで $q_{\max H}, R_{0H}$ は表面おうとつのない理想状態での $q_{\max}, R_0$ を意味する。なお、本研究で扱った研削加工面以外の加工面についても検討したが、その結果は図12と一致するものであったため、ここでは研削加工面での結果で代表し、また図10にみるようにかたさの影響も少ないので図12では省略してある。図12からわかるように荷重の小さいところで表面おうとつの影響が著しく、例えば $D=10\text{ mm}$, $\sigma_e=0.4\text{ }\mu\text{m}$ ($R_{\max} \approx 2\text{ }\mu\text{m}$) の場合、 $Q=2\text{ kgf}$ で $q_{\max}/q_{\max H} \approx 0.7$, $Q=10\text{ kgf}$ で $q_{\max}/q_{\max H}$

図 11 表面おうとつによる接触応力分布 (計算値)

図 12 接触荷重 Q に対する接触円半径 R_0 と最大接触応力 $q_{\max}$ (計算値)

≈ 0.85 となる。また、表面おうとつの影響は球径によって変化し図 13 のようになる。同一荷重では球径の小さいところで表面おうとつの影響が小さくなっているが、これは球径が小さくなるにつれて接触応力 q が増大し、 q の大きい場合には式 (1) の $\delta E, \delta S$ の増加率が小さくなるためである。同様のことは図 12 にみられるように荷重が大きくなった場合にもいえる。

5. 結 言

表面おうとつがある場合の平面と球面の接触問題で、まず実験によって確認できる接触円直径について、母材が塑性変形しないと考えられる範囲で検討した結果次の

図 13 球径 D と接触円半径 R_0 および最大接触応力 $q_{\max}$

ような結論を得た。

- (1) 2 平面接触で得た表面おうとつの弾塑性変形の実用式は球面と平面の接触問題にも十分適用できる。
 - (2) 本研究で用いたエッチング法は接触円直径を求めるのに有効な手段であった。
 - (3) 同一荷重では接触円直径は表面おうとつの大きいものほど大きく、特に軽接触荷重で著しい。
 - (4) 接触円直径は接触部材のかたさ ($H_V = 250 \sim 800$) の影響をほとんど受けない。
 - (5) 接触応力分布形は表面おうとつの影響を受け、最大接触応力は表面おうとつが大きいほど低下する。
- 終わりに本研究の実験に協力していただいた当時の学生川崎達夫君に謝意を表します。

文 献

- 1) 塚田忠夫: 表面あらさと接触変形問題, 潤滑, **19**, 2 (1974) 135.
- 2) J. A. Greenwood and J. H. Tripp: The Elastic Contact of Rough Spheres, Appl. Mech., March (1967) 153.
- 3) K. A. Nuri: The Normal Approach between Curved Surfaces in Contact, Wear, **30**, (1974) 321.
- 4) 築添 正: 球面と平面の接触機構, 日本機械学会論文集, **41**, 346 (1975) 1909.
- 5) 石垣博行, 木原利喜, 川口 格: あらさを有する平面と球の接触に関する研究 (第 1 報), 精密機械, **41**, 4 (1975) 385.
- 6) 加藤 仁, 山口勝美, 加藤隆雄: 表面あらさ変化による金属接触面の圧力分布測定, 日本機械学会論文集, **44**, 381 (1978) 1742.
- 7) 塚田忠夫, 阿武芳朗: 機械加工された 2 平面接触部の変形機構 (第 5 報), 日本機械学会論文集, **40**, 336 (1974) 2389.
- 8) 塚田忠夫, 阿武芳朗: 表面おうとつによる接触部剛性 (第 2 報), 日本機械学会論文集, **37**, 304 (1971) 2387.
- 9) 塚田忠夫, 阿武芳朗: 表面おうとつによる接触部剛性 (第 4 報), 日本機械学会論文集, **37**, 304 (1971) 2400.
- 10) S. Timoshenko and J. N. Goodier: Theory of Elasticity, McGraw-Hill, New York, N. Y., (1951) 96.
- 11) 塚田忠夫, 阿武芳朗: 表面おうとつによる接触部剛性 (第 3 報), 日本機械学会論文集, **37**, 304 (1971) 2394.