研 究

機械的共振を考慮した位置決め制御の設計法*

西 村 国 俊** 金 子 英 治***

On the Design Method of Positioning Control System with
Mechanical Resonant Characteristics

Kunitoshi NISHIMURA, Hideharu KANEKO

This paper describes an optimal design method for positioning control using a dc servomotor. The positioning control system, using velocity and position feed back data, sometimes becomes unstable due to mechanical resonance of the shaft connecting motor with detector. An appropriate cutoff in high frequency of velocity is effective not only for stabilizing system but also for high transient response. Namely, it causes a 30 percent decrease in settling time for step input and 1.3 to 3 times increase in stability criteria. Finally, the procedure for optimal design is described.

Key words: positioning control, mechanical resonance, stability criteria, optimal design.

1. ま え が き

各種情報入出力機器において印字ヘッド送り、用紙送り等の機構部の制御を、DC サーボモータで制御することが盛んに行われている。しかしそこで使用されるサーボ構成は、対象となる機構部の構成により、また使用する検出器により大幅に異なり、その設計基準が明確なのはごく限られた理想化された系においてである。理想化された系においては機構部は完全剛体、すなわち駆動源と制御対象、駆動源と検出器間は剛体で接続されており、機械的な共振周波数は無限大である。しかし機器の高性能化が進むと機械的共振を無視することができず、それを認めた上で最適なサーボ構成法の検討が必要となる。

機械的な共振を考慮した設計法には中野らの論文¹⁾がある。中野は機械的共振特性をその粘性減衰比の大きさにより分類し、0.5より小さい場合電氣的なフィルタにより等価的に減衰比を引き上げることが可能としたが、フィルタの構成が複雑となり実用的でない。

本論文は、モータ軸に変位検出器のみを設け、その出力である回転角に比例した信号と、それを抵抗とコンデンサからなる簡単な回路により微分した速度信号で閉ループを構成する場合につき、モータと検出器間の軸共振に伴う発振の限界内で、整定時間を短くするための設計法を明らかにしたものである。

なお本制御法は、速度検出器を不要としているが、こ

こで述べる設計法は、位置検出器、速度検出器をもつ場合にも適用できる。また本回路構成法は、バングバング制御等のオープンループ制御の後、目標点付近で行う位置決め制御²⁾³⁾にも適用できる汎用性のある構成法である。

記 号

T	モータトルク	$\text{g}\cdot\text{cm}$
V	モータ端子間電圧	V
i_a	モータに流れる電流	A
R_a	モータ端子間抵抗	Ω
K_t	モータのトルク定数	$\text{g}\cdot\text{cm}/\text{A}$
K_s	モータの電圧定数	$\text{V}\cdot\text{s}$
L	モータのインダクタンス	H
T_m	モータの機械的時定数	s
β	モータの電氣的時定数	s
θ	モータ軸の回転角	rad
θ_s	検出器の軸の回転角	rad
E	指令電圧	V
θ_0	ステップ入力 of ステップ幅	rad
J_m	モータ軸の慣性モーメント	$\text{g}\cdot\text{cm}\cdot\text{s}^2$
J_s	検出器の軸の慣性モーメント	$\text{g}\cdot\text{cm}\cdot\text{s}^2$
k	モータと検出器間の軸のねじりばね定数	$\text{g}\cdot\text{cm}/\text{rad}$
c	モータと検出器間の軸の粘性摩擦係数	$\text{g}\cdot\text{cm}/\text{s}$
ρ	モータと検出器の慣性モーメントの比 $= J_m/J_s$	無次元
ω_m	軸のねじり固有角周波数	s^{-1}
η_m	軸の粘性減衰係数	s^{-1}
γ	軸の粘性減衰比	無次元
K_1, K_2	増幅率	V/rad
K_3, K_4	増幅率	無次元
α	微分器の時定数	s
ω_e	サーボ系の固有角周波数	s^{-1}
η_e	サーボ系の粘性減衰係数	s^{-1}
ζ	サーボ系の粘性減衰比	無次元

* 原稿受付 昭和54年2月23日。第21回自動制御連合講演会(昭和53年11月1日)にて発表。

** 正会員 日本電信電話公社横須賀電気通信研究所(横須賀市武1-2356)

*** 日本電信電話公社横須賀電気通信研究所

図1 制御回路ブロック図

2. 系の運動方程式

はじめに図1に示す回路ブロックの運動方程式を導く。ここでは検出器として位置に比例した出力を発生する位置検出器を用いている。

モータ軸および検出器の軸に関する運動方程式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} J_m \ddot{\theta} + k(\theta - \theta_s) + C(\dot{\theta} - \dot{\theta}_s) &= T \\ J_s \ddot{\theta}_s + k(\theta_s - \theta) + C(\dot{\theta}_s - \dot{\theta}) &= 0 \\ T &= K_t i_a \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

モータに流れる電流と端子間電圧の関係は

$$V = R_a i_a + L \dot{i}_a + K_s \dot{\theta} \quad (2)$$

で与えられる。

一方フィードバック回路における各電圧の関係は

$$e_1 = K_1 \theta_s \quad (3)$$

$$V = K_4 \{e_2 + K_3 (E - K_2 \theta_s)\} \quad (4)$$

である。 e_1, e_2 は微分器の入力および出力で、それらの関係は、

$$-e_1 = \frac{R_0}{R_1} \dot{e}_2 + \frac{1}{C_1 R_1} e_2 \quad (5)$$

である。

ここで

$$\rho = \frac{J_m}{J_s}$$

$$\omega_m = \sqrt{\frac{k}{J_m} (1 + \rho)}$$

$$\eta_m = \frac{C}{2J_m} (1 + \rho)$$

$$\gamma = \frac{\eta_m}{\omega_m}$$

$$\frac{\ddot{\theta}}{\theta_0} = \frac{1}{\omega_e} \cdot \frac{\alpha \omega_e \cdot s + 1}{\alpha \omega_e \cdot \beta \omega_e \cdot s^4 + (\alpha \omega_e + \beta \omega_e) s^3 + \left(1 + \frac{\alpha \omega_e}{\alpha T_m}\right) s^2 + (2\zeta + \alpha \omega_e) s + 1} \cdot \frac{1}{s} \quad (9)$$

$$\text{ただし, } s = S/\omega_e, \quad \omega_e = \sqrt{AK_d}, \quad \eta_e = (1/T_m + AK_v)/2, \quad \zeta = \eta_e/\omega_e$$

となり逆ラプラス変換すれば応答曲線が求められる。ここで α, β が小さい場合、 ω_e は系の固有角周波数、 ζ は粘

$$T_m = \frac{(J_m + J_s) R_a}{K_t \cdot K_s} \quad (6)$$

$$A = \frac{K_t}{(J_m + J_s) R_a}$$

$$\alpha = C_1 R_0$$

$$\beta = \frac{L}{R_a}$$

$$K_v = C_1 R_1 K_1 K_4$$

$$K_d = K_2 K_3 K_4$$

$$\theta_i = \frac{E_0}{K_2}$$

とき、式(1)~(5)をラプラス変換し $\tilde{\theta}$ について解けば、

$$\tilde{\theta} = \frac{1}{J} \cdot AK_d \cdot (1 + \alpha S) \times \left(\frac{1 + \rho}{\rho} S^2 + 2\eta_m S + \omega_m^2 \right) \cdot \tilde{\theta}_i \quad (7)$$

となる。ただし

$$\begin{aligned} A &= \alpha \beta S^5 + (2\eta_m \alpha \beta + \alpha + \beta) S^4 \\ &+ \left\{ 1 + 2\eta_m (\alpha + \beta) + \frac{1 + \rho}{\rho} \cdot \frac{\alpha}{T_m} + \omega_m^2 \alpha \beta \right\} S^3 \\ &+ \left\{ 2\eta_m + \frac{1 + \rho}{\rho} \cdot \frac{1}{T_m} + \frac{2\eta_m}{T_m} \alpha + \omega_m^2 (\alpha + \beta) \right\} S^2 \\ &+ \left\{ \omega_m^2 + \frac{2\eta_m}{T_m} + \frac{\alpha}{T_m} \omega_m^2 + 2\eta_m A (\alpha K_d + K_v) \right\} S \\ &+ \left\{ \frac{\omega_m^2}{T_m} + 2\eta_m AK_d + A \omega_m^2 (\alpha K_d + K_v) \right\} S \\ &+ AK_d \omega_m^2 \end{aligned} \quad (8)$$

である。

なお α の物理的意味は、式(5)より、その逆数が微分器の遮断周波数に相当することがわかる。以後 α を微分器の時定数とよぶことにする。また付図で示すように位置検出器と速度検出器を用いる制御回路構成の場合も $\alpha = R \cdot C^*$ 、 $K_v = K_1 K_4$ と定数を置き換えれば式(7)と同一式が求められる。

3. 応答性

ここでは、モータと検出器間の軸を剛体とみなし、入力にステップ入力が増えらる時の応答を、特に微分器の時定数 α の影響との関連において考察する。

式(7)において $\omega_m \rightarrow \infty$ 、 $\tilde{\theta}_i = \theta_0/S$ とおけば

性減衰比と考えることができる。

応答性を整定時間 t_s で評価する。整定時間 t_s は、最終的に

図2 整定時間(1)

図3 最小整定時間

$$\left| \frac{\theta(t_s) - \theta_0}{\theta_0} \right| \leq \delta$$

となる時間 t_s で定義する。

図2は、 $\alpha\omega_e$ をパラメータとして系の粘性減衰比 ζ の変化による整定時間の変化を示したものである。整定時間は、 ζ が0.6~1.0の範囲で最小となるが、その最小値は $\alpha\omega_e < 0.4$ の場合、 $\alpha\omega_e$ の大きい程小さく、最小値をとる ζ の値も小さくなるが、 $\alpha\omega_e$ がほぼ0.4より大きくなると最小整定時間は急に大きくなる。

図3は、整定時間が最小となるように ζ を選び、その最小整定時間が $\alpha\omega_e$ により変化する様子を示した図である。前述のように $\alpha\omega_e$ を大きくとり過ぎれば、整定時間が急に大きくなるため実用面からは使用できないのでその範囲内で示している。この図よりわかるように $\alpha\omega_e$ の効果は、モータの電氣的時定数 β を無次元化した値 $\beta\omega_e$ の小さい程大きく、 $\beta\omega_e = 0$ の場合は、 $\alpha\omega_e \approx 0.3$ とすることにより $\alpha\omega_e = 0$ の場合に比べ2~3割の整定時間の短縮が可能となる。また $\alpha\omega_e, \beta\omega_e$ を適当に組み合わせて得

られる整定時間の最小値は $\omega_e t_s \approx 3$ である。

4. 発振限界

式(8)において $I=0$ とおいた特性方程式の根の実数部の正負により系の安定、不安定が判別できる。ここでは安定、不安定の境界である純虚数根をもつ場合を考える。すなわち $S=j\omega$ とおき、実数部、虚数部がそれぞれ0であるとおけば次のようになる。

$$\begin{aligned} 2\gamma N^2 G_v + \{2\gamma(\alpha\omega_m)N^2 - 1\}G_d \\ = -(\alpha\omega_m)(\beta\omega_m)N^6 \\ + \left\{1 + \alpha\omega_m \left(2\gamma + \frac{1+\rho}{\rho} \cdot \frac{1}{T_m\omega_m}\right) \right. \\ + 2\gamma\beta\omega_m + \alpha\omega_m \cdot \beta\omega_m \} N^4 - \left(1 + \frac{\alpha\omega_m}{T_m\omega_m}\right) N^2 \\ G_v + (\alpha\omega_m + 2\gamma)G_d \\ = (2\gamma \cdot \alpha\omega_m \cdot \beta\omega_m + \alpha\omega_m + \beta\omega_m) N^4 \\ + \left\{2\gamma + \frac{1+\rho}{\rho} \cdot \frac{1}{T_m\omega_m} + \frac{2\gamma \cdot \alpha\omega_m}{T_m\omega_m} + \alpha\omega_m \right. \\ \left. + \beta\omega_m \right\} N^2 \end{aligned} \quad (10)$$

ただし

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\eta_m}{\omega_m} \\ N &= \frac{\omega}{\omega_m} \\ G_v &= \frac{1}{\omega_m} \cdot \left(AK_v + \frac{1}{T_m}\right) = \frac{2\gamma_e}{\omega_m} \\ G_d &= \frac{AK_d}{\omega_m^2} = \left(\frac{\omega_e}{\omega_m}\right)^2 \end{aligned} \quad (11)$$

である。 γ は軸の粘性減衰比、 N は発振周波数と軸の共振周波数の比、 G_v, G_d はそれぞれ速度のループゲイン K_v 、位置のループゲインを無次元化した値である。

式(10)は G_v, G_d に関する2元連立一次方程式であり、無次元化された発振周波数 N を適当に仮定して解けば、その値にて発振を生ずる G_v と G_d の関係が求められる。

4.1 発振限界曲線

図4に $\alpha = \beta = 0$ の場合の計算結果の一例を示す。

式(10)で与えられる特性曲線は安定、不安定の境界を示すにすぎないが、一般的に考え原点側に近い方が安定領域、遠い方が不安定領域である。図4よりモータと検出器をつなぐ軸の粘性減衰比 γ の増加により安定領域は著しく拡大することがわかる。

3章より最小整定時間が得られる大まかな目安である

図4 発振限界曲線 (1)

$\zeta=0.6\sim 1$ を式(11)の G_v, G_d により書き改めれば,

$$G_v/\sqrt{G_d}=1.2\sim 2 \quad (12)$$

となる。上式をやはり図4に示す。 $G_v\sim G_d$ 平面上で整定時間よりみて実際に使用する値の範囲は、図の斜線部の領域となる。発振周波数 N は、式(10)の第1式より

$$N^2 = \frac{G_v + 2\gamma G_d}{2\gamma + \frac{1+\rho}{\rho} \cdot \frac{1}{T_m \omega_m}}$$

であり、数値計算結果をやはり図4に点線で示す。これより実際に使用する領域での発振周波数 N はほぼ1, すなわち機械的な共振周波数とほぼ同じ周波数で発振することがわかる。

図5に $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ の場合の発振限界曲線の一例を示す。モータの無次元化された電気的時定数 $\beta \omega_m$ の増加に伴い G_d 方向の安定域は減少し、 G_v 方向の安定域は、 $\beta \omega_m$ がある程度までは拡大し、その後は減少する傾向にある。量的には $\alpha \omega_m, \beta \omega_m$ の値により様々である。

4.2 発振限界曲面

前節では、 $G_v\sim G_d$ 平面上における安定領域の大きさの点より考察したが、前述のように実用面から重要な $G_v\sim G_d$ 平面上の領域はごく一部である。そこでここでは代表的な値として $G_v=1.6/\sqrt{G_d}$ となる曲線と発振限界曲線が交差する点での G_d の値、すなわち式(11)の第4式からわかるように ω_e/ω_m の値に注目して微分器の時定数 α の影響を調べた。図6はその結果の一例である。

$\alpha=\beta=0$ の時の限界値に比べ、 $\alpha>0, \beta>0$ で限界値は著しく大きくなる。またある制御ループにおいて α, β が与えられればこの図より安定か不安定か判別ができる。

次に発振と応答性の面より考えてみる。

図7は、 $\beta=0$ の場合の発振限界曲線である。 $\beta=0$ の場合、応答性の面からは、図3より $\alpha \omega_e \approx 0.3$ が最適であるが、これを $\alpha \omega_m \cdot \omega_e/\omega_m = 0.3$ と書き直して図7に示す

図5 発振限界曲線 (2)

図6 発振限界曲面

図7 応答性と発振限界

すると点線のようになる。すなわち発振限界曲線群のうち点線より右側の部分は、応答性の面より適用できないことになる。よってある $\alpha \omega_m$ の値において、ループゲイン ω_e/ω_m を増加していく場合、点線より右側の部分においては、応答性の面より、左側の部分においては、発振により限界が生ずるとわかる。またステップ入力に対する

図8 特性方程式の根

最短応答を得るための発振限界値 ω_e/ω_m は、 $\beta=0$ の場合 $\alpha\omega_m$ を適当に設定することにより $\alpha\omega_m=0$ の場合に比べ、3倍 ($\gamma=0.005$)~1.3倍 ($\gamma=0.1$) 大きくなるとわかる。

4.3 発振限界曲面と安定度

前節の結果より、 α, β を適当に選択すれば発振限界値を高くできることがわかったが、その限界値以下においても安定度が低いと高次成分の過渡振動が長く続き実用上問題が生ずる。そこで本節では、その安定度を考察する。特性方程式 $I=0$ の6個の根を $\omega_m P_1 \sim \omega_m P_6$ とおけば、 $\theta_i = \theta_0/S$ の場合の式(7)の逆ラプラス変換後の一般形状は

$$\theta = \sum_{n=0}^6 C_n e^{\omega_m P_n t} \quad (13)$$

となる。

P_n は一般に複素数であるので

$$P_n = P_{rn} + iP_{in}$$

とおけば、式(13)は

$$\theta = \sum_{n=0}^6 C_n e^{P_{rn}\omega_m t} \cdot e^{iP_{in}\omega_m t} \quad (14)$$

となる。 $e^{iP_{in}\omega_m t}$ は振動成分であり、 $e^{P_{rn}\omega_m t}$ は安定度を示す指数と考えることができる。発振周波数が機械的な共振周波数に近いことから、ここでは P_{in} が1に近い根に注目し、それを $P_r + iP_i$ とおく。

さて $t=0$ で過渡的に生じた振幅 $C_n e^{P_r \omega_m t}$ が3章で定義された整定時間 t_s において $Z\%$ になる場合を考える。

$$C_n \cdot Z/100 > C_n e^{P_r \omega_m t_s}$$

一方、図3より

$$\omega_e t_s \doteq 3$$

であるから、この両式より

$$P_r < \frac{1}{3} \cdot \frac{\omega_e}{\omega_m} \cdot \ln(Z/100) \quad (15)$$

となる。

図9 整定時間(2)

図8は、特性方程式において式(12)の関係を保ったままゲイン $G_d = (\omega_e/\omega_m)^2$ を増加していった時の根 P_r の変化を示したものである。 P_r が負から正に変化する境界が図6の発振限界曲面として表されているわけである。式(15)は、図8の中で点線で示され、この線の下側で、整定時間 t_s において、高次成分が $Z\%$ 以下に減衰する。同図より時間0において生じた過渡振動の振幅を整定時に10%以下にするためには、発振限界値のおよそ半分に利得を設定する必要があることがわかる。

5. 実験

これまでの計算結果と実験結果の比較を④ 整定時間、⑤ 発振限界について行った。その結果を図9と図5に示す。いずれの場合も計算結果と実験結果はよく一致しており、計算手法の正しさが確認されたと考える。

6. 設計手順

以上の結果を実際の設計に応用する時の手順を図10に示す。整定時間等の仕様が決定すると図3より最小整定時間を得るための条件が求められる。例えば $\beta\omega_m=0$ の場合 $\omega_e t_s \doteq 3$, $\alpha\omega_m \doteq 0.3$ となり、 ω_e, α が計算できる。一方、与えられた仕様をもとにモータが選択されるが、その手順は文献(4)等で与えられるのでここでは省略する。次にモータと検出器を接続する軸の共振周波数を適当に仮定し、 $\alpha\omega_m, \beta\omega_m, \omega_e/\omega_m$ を計算し、図6,7に適用すれば安定か不安定か判断可能である。もし不安定と判断されれば ω_m をさらに大きく仮定すればよい。安定と判断された後は、ここで与えられた ω_e, ω_m をもとに制御回路の各ゲイン、軸径等を決定すればよい。

7. まとめ

位置に比例した信号とその信号を抵抗とコンデンサで微分した速度信号をフィードバックする位置決め制御法につき、整定時間を最小化するための設計法を、モータ・

図10 設計手順

検出器間の軸共振を考慮して述べた。この中で特に明確になった事項は以下の通りである。

- (1) 速度信号の周波数帯域を示す α (式(6)の第7式で定義)を適当に選択することにより $\alpha=0$ の場合に比べ整定時間を約3割短縮できる。最適な α は, $\alpha\omega_e \approx 0.3$ で与えられ, この時の整定時間は $\omega_e t_s \approx 3$ である。
- (2) モータ・検出器間の軸共振に起因する発振の限界は軸の粘性減衰比 γ , $\alpha\omega_m$, インダクタンスに関係

付図 制御回路ブロック図

した $\beta\omega_m$ (式(6)の第8式で定義)によって決まり, γ の大きい程安定域は急激に拡大する。

- (3) ステップ入力に対する最短応答を得るための発振限界値 ω_e/ω_m は, $\beta=0$ の場合, α を適当に設定することにより, $\alpha=0$ の場合に比べ3倍 ($\gamma=0.005$) ~ 1.3倍 ($\gamma=0.1$) 大きくなる。
- (4) 時間0において生じた過渡振動の振幅を整定時に10%以下にするためには, 発振限界値のおよそ半分以下に利得を設定する必要がある。

終わりに本研究の遂行にあたり終始ご指導をいただいた横須賀電気通信研究所宅内機器研究部・中野部長, 同部機構部品研究室・杉山室長, 藤本調査役, その他関係各位に深く感謝します。

文 献

- 1) 中野道雄ほか: サーボ機構における共振項の取扱い, 電気学会論文誌, **97**, 4 (1977) 59.
- 2) 藤本 功ほか: DIPS用新ラインプリンタの機構駆動制御方式, 研究実用化報告, **23**, 12 (1974) 2751.
- 3) 長倉恵一: DCサーボモータを用いた高速起動停止制御の研究, 精密機械, **43**, 9 (1977) 1056.
- 4) 西村国俊ほか: 高速XYプロッタの実用化, 電子通信学会機構部品研究会資料, EMC 76-18 (1976) 31.

書 評

レーザーの安全な使用

—米国規格 ANSI Z 136.1-1973 を利用する光学測定機関係者のために—
日本光学測定機工業会発行

本書は, 米国工業規格 (ANSI) に基づき, レーザを使った光学測定機を開発, 製造, 販売, 使用する人のためにレーザーの規格や安全基準を検討したものである。レーザーが工業, 医療, 教育分野などで広く使用されはじめた昨今, レーザ光が, その熱効果や光化学効果により目や皮膚に傷害を与えるといわれながら, いまだ独自の安全基準を持たない我が国において, レーザ光による傷害より使用者を守るための指標を明確にすることは, 緊急かつ重要なことといえる。ANSI の解説書としては, すでに日本電子機械工業会編のものが発行されているが, 現在入手不可能となっている。しかも, ANSI 原文も上記解説書もいわゆる規格文体であり理解しづらいものであ

る。

そこで, 本書は, 語句の説明, 管理尺度, 露光許容量の計算法等をわかりやすく示すとともに, 実際に使用されているザイゴ干渉計, 微小線幅測定装置, ホログラフィックカメラの安全対策例を図入りで詳細に説明してある。また, 上記 ANSI の解説書を附録として全文掲載しており, ANSI の必要部分の抜すいをはじめ, 解説, 語句の定義や用い方等安全基準を求める上で必要なことがらのすべてがわかるように配慮されている。

したがって, レーザの安全な利用法を検討する上での格好の手引書となっている。(1979年2月発行)

(矢野 雅昭)