円筒形希土類磁石による反発力系の動特性 (第3報)*

—うず電流制振力の解析—

小島 宏行** 山川 出雲**

Dynamic Characteristics of the Repelling Force System Consisting of the Cylindrical Rare-earth Magnets (3rd Report)

—Analysis of the Eddy Current Damping—

Hiroyuki KOJIMA and Izumo YAMAKAWA

Characteristics of the eddy current damping generated between the cylindrical rare-earth magnet and the conducting material, cylindrical and flat in shape, are investigated. The analysis is made under the assumption that the magnet is homogeneous and magnetized uniformly along the axial direction. The numerical results are compared with the experimental ones with good coincidence and

the results obtained are concluded as follows: (1) The damping coefficient may be considered to be in proportion to the product of two quantities; i. e., the square of the strength of magnetization, and the characteristic function determined by the dimension and relative position of the magnet and the conducting material. (2) The most effective damping may be obtained by taking the aspect ratio of the longitudinal section of the magnet as a value nearly equal to unity when the diameter ratio (inside to outside) is small ($\sigma \leq 0.25$).

Key words: eddy current damping, magnetic damper, rare-earth magnet, damping characteristics, damped vibration, repelling force system.

1. 緒 言

磁石と導体の相互運動によって生ずるうず電流制振力は、運動速度に正確に比例し、かつ無接触で作用するなどの大きな利点を有している。ここで、近年とみに注目されている希土類磁石を用いれば、その強力な磁気エネルギーと良好な温度特性とによって、経時変化の極めて少ない大きな値の制振力を得ることができる。このようなうず電流制振は、在来の振動計などにも見られるほか、①永久磁石の同種磁極間に働く反発力をばね要素として用いた磁気動吸振器^{1)~3)}、②在来の金属ばねによる動吸振器⁴⁾、③電磁石の吸引力を利用した無制御型磁気軸受⁵⁾などのダンピング要素として応用されている。

一方、うず電流制振力に関しての理論的研究はすでにいくつか見られるが^{4)~8)}、それらはいずれも磁束分布が均一であるとの前提で取扱っており、磁束分布が一律でない永久磁石と導体の組合わせによる磁気ダンパについては、解析的に調べられていないように思われる。

本研究は、均一でない軸対称磁場を持つ円筒形希土類磁石に筒状または板状導体を組合わせた磁気制振機構の基本特性を解析し、その数値計算例を実験結果と対照したものである。

主な記号の説明

r, θ, z : 円筒座標系, m, rad, m

x, y : 直角座標系, m

J : 磁化の強さ, Wb/m²

v : 磁石と導体の相対速度, m/s

B_r, B_z : 磁束密度の半径方向および軸方向成分, Wb/m²

di : 筒状導体中の要素電流, A

di_0 : 板状導体中の電流密度, A/m²

F_e : うず電流制振力 (筒状導体の場合), N

F_p : うず電流制振力 (板状導体の場合), N

g : 重力加速度 ($=9.80665$ m/s²)

C_e : うず電流に基づく減衰係数 (筒状導体), N·s/m

$\bar{C}_e$: 同上. 工学単位系 ($=C_e/g$), kg·s/m

C_p : うず電流に基づく減衰係数 (板状導体), N·s/m

$\bar{C}_p$: 同上. 工学単位系 ($=C_p/g$), kg·s/m

$\bar{C}_m$: 機械的要因による減衰係数, kg·s/m

ρ : 導体の抵抗率, $\Omega \cdot m$

k : 楕円積分母数

$K(k), E(k)$: 第1種および第2種完全楕円積分

t_m : 磁石の軸方向長さ, m

a_1, a_2 : 磁石の内径および外径, m

m : 磁石縦断面のアスペクト比 ($=t_m/(a_2-a_1)$)

* 原稿受付 昭和54年10月10日. 昭和54年度精機学会関西地方定期学術講演会 (昭和54年7月12日) にて発表.

** 正会員 群馬大学工学部 (桐生市天神町1-5-1)

図1 円筒形希土類磁石と筒状導体を組合わせた磁気ダンパ

σ : 磁石の内・外径比 ($=a_1/a_2$)

V : 磁石の体積, m^3

l_c : 筒状導体の長さ, m

t_c, t_p : 筒状および板状導体の肉厚, m

G_c, G_p : 磁石と、筒状ならびに板状導体とのギャップ, m

2. 理論解析

2.1 筒状導体を用いたダンパ

図1は、磁石と筒状導体が同一軸上に配置された形のモデルを円筒座標を用いて示したもので、両者の相互運動によって後者の材料内にうず電流が生じ、これが磁場と作用して制振力が得られる。以下の解析では第1報¹⁾と同様に磁石は軸方向に一樣な強さで磁化されているものとする。また、うず電流はモデルの軸対称性から z 軸を中心とする円周にそって流れることになる。

従って、筒状導体を分割した微小な環状部分に流れる要素電流 di は、図の記号を用いて電磁誘導理論から次のように書ける。

$$di = \frac{1}{\rho} v B_r dr dz \quad (1)$$

この微小部分に作用する制振力 dF_c は、Lorentz 力の原理から次のように示される。

$$dF_c = 2\pi r B_z di \quad (2)$$

制振力 F_c は、式(2)を導体の断面について積分することにより得られる。この場合の減衰係数 $C_c (=F_c/v)$ は、磁束密度 B_z に第1報の解析結果を適用して次のように求められる。

$$C_c = \frac{J^2}{\rho} f_c \quad (3)$$

ここに、

$$f_c = \frac{1}{2\pi} \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \left[\int_{b_1}^{b_2} \{f_{br}(a_2, r, z-\xi)\} \right]$$

図2 円筒形希土類磁石と板状導体を組合わせた磁気ダンパ

図3 磁束密度の軸方向成分 B_z の分布

$$-f_{br}(a_1, r, z-\xi) \} d\xi \}^2 dr \quad (4)$$

$$f_{br}(a, r, z) = \frac{z}{\sqrt{(a+r)^2 + z^2}} \left\{ \frac{a^2 + r^2 + z^2}{(a-r)^2 + z^2} E(k) - K(k) \right\} \quad (5)$$

$$k^2 = \frac{4ar}{(a+r)^2 + z^2} \quad (6)$$

なお、式(5)中の $K(k)$ および $E(k)$ は、それぞれ第1種および第2種の完全楕円積分を表している。

2.2 板状導体を用いたダンパ

図2は、板状導体が磁石の磁極面に平行に置かれた形のモデルを、円筒座標を用いて示したもので、磁極面と板状導体とが一定のギャップ G_p を保ったまま、 x 方向に相対速度 v で平行運動を行う。ダンパの形状から、うず電流は z 軸に直交する平面に平行に流れるものと考えてよい。なお解析の便宜上、導体は限りなく広いものと仮定して取扱うことにする。

まず磁石が軸対称であることから、磁束密度も図3のように軸対称となる。この磁束が図2の板状導体に作用することになる。この板に作用する制振力は、図3に示すような薄い筒状の磁束(磁束密度 B_z 、内径 r 、厚み dr) が単独で微小厚さ dz の板状導体に作用するときの制振力を半径方向および板厚方向(z 方向)に積分することによって得られる。この場合、筒状磁束が厚さ dz の板状導体に及ぼす制振力は次のように考えることができる。すなわち、半径が r および $r+dr$ 、磁束密度がいずれも B_z であるような二つの円柱状磁束のそれぞれが板状導体に及ぼす制振力の差として求められる。ここで、半径 r 、磁束密度 B_z の円柱状磁束と、限りなく広いものとした厚み dz の板状導体との間に働く制振力を、図4のモデルを用いて次のように考える。図において、磁束変化は半径 r の円周上だけに生ずるので、周上の点の座標を特に $x=\xi$, $y=\eta$ で表すことにすれば、周上の任意

図4 円柱状磁束によって厚みの微小な板状導体に流れるうず電流

の点 $Q(\xi, \eta)$ での磁束変化 $vB_z d\eta$ によって円内の任意の点 $P(x, y)$ に誘導されるうず電流は、導体が無限に広いという前提条件から $\bar{r}$ を半径とする円周上を流れることになる。この場合、点 P に流れる電流密度 di_0 の値は、電磁誘導理論から次のように書くことができる。

$$di_0 = \frac{vB_z d\eta}{2\pi \bar{r}} \quad (7)$$

さらに、点 P における体積素 $dx dy dz$ に作用する制振力をベクトル量 $d\mathbf{F}$ で表せば、Lorentz 力の原理により、点 Q から点 P に向かう単位ベクトルを $\mathbf{n}_0$ とすると、 $d\mathbf{F}$ は次式で与えられる。

$$d\mathbf{F} = B_z di_0 dx dy dz \times \mathbf{n}_0 \quad (8)$$

式(8)を磁場の作用する半径 r の円内全領域について積分すると、制振力は x 方向成分 F だけとなり、次式のようにになる。

$$F = \frac{vr^2 B_z^2 dz}{\rho} \delta \quad (9)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{-1}^1 \left\{ \frac{\sqrt{1-\eta^2}+x}{(\sqrt{1-\eta^2}+x)^2 + (y-\eta)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{1-\eta^2}-x}{(\sqrt{1-\eta^2}-x)^2 + (y-\eta)^2} \right\} d\eta \\ &= \pi/2 \end{aligned} \quad (10)$$

上式の積分値が $\pi/2$ となることは理論的に得られたものであるが、その過程については紙面の都合上省略する。従って、図3の斜線で示されている筒状磁束が厚さ dz の板状導体に及ぼす制振力(減衰力) dF_p は、式(9)から次のように表される。

$$dF_p = \frac{\pi v r B_z^2 dr dz}{\rho} \quad (11)$$

よって、減衰係数 $C_p (= F_p/v)$ は、磁束密度 B_z に第1報の解析結果を適用し、式(11)を導体の断面について

表1 実験に用いた磁石の諸元

J	0.835 Wb/m ² (=8.35 kG)	t_m	15.0×10 ⁻³ m
a_1	7.0×10 ⁻³ m	V	21.55×10 ⁻⁶ m ³
a_2	22.5×10 ⁻³ m	m	0.968
		σ	0.311

図5 供試磁石の磁束分布についての計算結果

B_z の符号を考慮して積分することによって次のように書ける。

$$C_p = \frac{J^2}{\rho} f_p \quad (12)$$

ここに、

$$f_p = \frac{1}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} dz \int_0^\infty r f_z(r, z) |f_z(r, z)| dr \quad (13)$$

$$f_z(r, z) = \int_{\delta_1}^{\delta_2} \{ f_{bz}(a_2, r, z - \xi) - f_{bz}(a_1, r, z - \xi) \} d\xi \quad (14)$$

$$f_{bz}(a, r, z) = \frac{1}{\sqrt{(a+r)^2 + z^2}} \left\{ \frac{a^2 - r^2 - z^2}{(a-r)^2 + z^2} E(k) + K(k) \right\} \quad (15)$$

3. 実験結果と数値計算結果

実験に用いた磁石は、サマリウム・コバルト系の希土類磁石(最大エネルギー積=18 MOe)で、その主要諸元を表1に示す。この磁石の磁束分布についての計算結果は図5のとおりで、磁束が導体を切って流れている様子が視覚的にとらえられている。また図6および図7は、筒状ならびに板状のそれぞれの場合のうず電流制振力に寄与する磁束密度の半径方向および軸方向成分について、実験値を計算値と対照したもので、両者はかなり良く一致している。なお図5～図7における数値計算は、第1報で導いた計算式によった。

うず電流制振力の測定に用いた実験装置の概略を図8

図6 磁束密度の半径方向成分

図7 磁束密度の軸方向成分

図9 減衰自由振動波形例

図10 筒状導体の場合の減衰係数

(a) 筒状導体の場合 (b) 板状導体の場合

1: 円筒形希土類磁石, 2: 筒状導体, 3: 板状導体, 4: バネ, 5: ベアリング, 6: 筒状導体保持器, 7: おもり, 8: うず電流型変位計, 9: ペン書きオシログラフ

図8 実験装置概略図

図11 板状導体の場合の減衰係数

に示す。筒状導体の場合は、導体を固定して磁石が上下に動くように、また板状導体に対しては、磁石を固定し導体が動くようにそれぞれ設計し、案内部等のクーロン摩擦ができるだけ小さくなるように構成した。なお、振動変位の測定には、うず電流型無接触変位計を用いた。図8の装置により実測された減衰自由振動波形の一例を図9に示す。この波形から求まる減衰係数は、機械的要因に基づいた $\bar{C}_m$ とうず電流制振力による $\bar{C}_c, \bar{C}_p$ との和である。

次に、うず電流制振力についての実験結果を図10および図11に示す。筒状導体(耐食アルミニウム合金第1種, A2 X1, $\rho = 0.4926 \times 10^{-7} \Omega \cdot m$)⁹⁾の外径を一定とし、内径を変えた場合の実験値を計算値と比較したものが図10であるが、両者は良く一致しており、減衰係数 $\bar{C}_c$ は導体の肉厚の増加とともに大きくなっている。図11は、磁石の断面積に比べてかなり広い板状導体(アルミ

ニウム第3種, A1 X3, $\rho = 0.2834 \times 10^{-7} \Omega \cdot m$)¹⁰⁾を用いた場合の減衰係数 $\bar{C}_p$ に関するもので、 $\bar{C}_p$ は導体と磁石間のギャップを増減することにより容易に調整できることがわかる。また実験値と計算値は、かなり良好な一致を見せている。

式(3)および式(12)からわかるように、うず電流制振力に基づく減衰係数は、磁石と導体の配置と寸法で定まる特性関数(f_c, f_p)を計算することによって求まる。この場合、磁石の形状が減衰係数($\bar{C}_c, \bar{C}_p$)に及ぼす影響は磁石縦断面のアスペクト比 m と磁石の内・外径比 σ とから定量的に知ることができる。ここでは、実用面から考えて磁石の体積 V を $8\pi \times 10^{-8} m^3$ とした場合について、いくつかの m の値に対する減衰係数を計算してみた。なお、磁化の強さ J を $1 Wb/m^2 (= 10 kG)$ 、導体を純アルミニウム材($\rho = 0.2655 \times 10^{-7} \Omega \cdot m$)とした。図12は筒状導体に対する磁石の形状効果で、減衰係数 $\bar{C}_c$ 。

図12 アスペクト比 m をパラメータとした筒状導体の場合の減衰係数

図13 アスペクト比 m をパラメータとした板状導体の場合の減衰係数

は導体の長さ l_c が大きくなるにつれ急激に増大するが、 m (従って磁石の軸方向長さ t_m) に対応する l_c の値で、ほぼ一定値に達している。また m の値が約 1 のときに、最も効果的な減衰力が得られることが示されている。ただし、導体と磁石とのギャップ G_c および導体の厚み t_c は、一定として計算してある。

次に、平板状導体の場合については図13に示すとおり、減衰係数 C_p は磁石と導体間のギャップ G_p の増加とともに連続的に減少し、磁石の最適な形状は前と同様に $m=1$ であることが示されている。

以上は磁石が筒型の場合 ($\sigma=0.25$) であったが、円孔が無い短円柱型の場合についても、最も効果的なうず電流制振力は、 $m=1$ のときに得られることが確認されている。

4. 結 言

円筒形希土類磁石と筒状ならびに板状導体との相互運動によって生じるうず電流制振力について、理論解析を行い、数値計算結果を実験結果と対照することによって、次のことが明らかになった。

- (1) 数値計算結果と実験結果とは良く一致し、本論文で導いた理論式の妥当性が確かめられた。
- (2) うず電流制振力、従ってその減衰係数 C は、 $C=(J^2/\mu_0)f$ なる式によって算出することができる。ただし、 J は磁化の強さ、 μ_0 は真空透磁率、 f は磁石と導体との相互配置・寸法によって定まる特性関数である。
- (3) 一定磁石体積のもとでうず電流制振力の値を最大ならしめるためには、円筒内・外径比 σ の値が $\sigma \leq 0.25$ の場合、磁石縦断面のアスペクト比 m (縦・横比) をほぼ 1 に近い値に設計することが望ましい。

おわりに、本研究に対し何かと力添えいただいた本学武田定彦講師、井開重男技官をはじめ実験に際しての元本学学生小林義弘、川崎光雄両君の御協力に感謝の意を表します。また供試磁石の提供と有力な御助言をいただいた日立金属(株)前川弘氏ならびに日本サーボ(株)池田真治氏に厚く御礼申し上げます。なお本研究は、文部省科学研究費補助金(一般研究D)によったものであることを付記する。

文 献

- 1) 小島宏行: 円筒形希土類磁石による反発力系の動特性(第1報)——反発力の解析, 精密機械, **44**, 5(1978)609.
- 2) 小島宏行, 山川出雲: 円筒形希土類磁石による反発力系の動特性(第2報)——自由度1の強制振動系の挙動, 精密機械, **45**, 3(1979)305.
- 3) 山川出雲, 武田定彦, 小島宏行: 3個の永久磁石よりなる新型動吸振器の挙動, 日本機械学会論文集, **42**, 364(1976)3815.
- 4) 背戸一登, 山之内三男: 磁気ダンピングを有する定数可変形動的吸振器の研究, 日本機械学会論文集, **44**, 378(1978)542.
- 5) 川本広行, 安田 出, 新井啓治: 磁気軸受と組合せたうず電流式ダンバの基礎的検討(第1報), 日本機械学会講演論文集, No.741-2(1974)77.
- 6) 萩原尊禮: 磁気制振器に就て, 東京大学地震研究所彙報, **12** (1934)482.
- 7) L. B. Cherry: Electro-magnetic Induction Damping of Vibratory Motion, Noise Control, Sept./Oct. (1960) 8.
- 8) M. R. Weinberger: Drag Force of an Eddy Current Damper, IEEE Trans., AES-13, 2, (1977) 197.
- 9) T. Lyman (ed.): Metals Handbook, Amer. Soc. for Metals, (1948) 820.
- 10) 日本機械学会編: 機械工学便覧, 日本機械学会(1960)5-70.