研究

PWM 方式増幅器を用いたサーボ系の 等価周波数伝達関数*

神谷 好承** 岡部 佐規一** 横山 恭男**

Equivalent Linearized Transfer Function of PWM-mode Servo Systems

Yoshitsugu KAMIYA, Sakiichi OKABE
and Yasuo YOKOYAMA

Accounting for the development of automation, PWM (pulse width modulation)-mode amplifiers have been used in many servo mechanisms. The merits of PWM-mode amplifiers are low cost because of the recent development of high power transistors and low loss of energy. But it is difficult to find the quantitative characteristics of the PWM-mode amplifier in the closed loop that includes the PWM-mode amplifier, because the PWM-mode amplifier has the nonlinear dynamic characteristics. In this study we find the equivalent linearized transfer func-

tion of the PWM-mode amplifiers according to analyzing the relation between the input and the output signals of the PWM-mode amplifiers in the frequency domain. As the results of this study, it is found that the dynamic characteristics of the equivalent linearized transfer function are well agreed with the dynamic characteristics of the PWM-mode amplifier on the step responses and the frequency characteristics of the PWM-mode amplifier by the analog simulation of the PWM-mode amplifier. And it is also shown that the carrier frequency of the PWM-mode amplifiers shows the dither effect for the solid friction.

Key words: PWM-mode amplifier, equivalent linearized transfer function, dither effect.

1. 序 論

自動平衡式記録計, 計算機周辺装置から NC 工作機械, 産業用ロボット, マニピュレータに至る各種自動機械の主要構成要素はそのサーボ系であり, そのサーボ技術の優秀さがその機械の総合性能に与える影響は非常に大きい。しかも近年電気サーボ系は取扱いの容易さから油圧サーボ系より随所に適用され, そのサーボ系の高速・高精度化はますます要求されている。こうした電気サーボ系の発展と普及の要因は, その代表的電気-機械系アクチュエータとしてのサーボモータの高性能化もさることながら, それを駆動するサーボアンプにサイリスタあるいはパワートランジスタを用いた高性能な PWM 方式増幅器が開発されたことによるところが大きい (PWM; Pulse width modulation)。それは近年のすぐれた半導体技術によって大出力の半導体が非常に安価に入手できるようになっていることと, それに加えこうしたスイッチング素子による PWM 方式増幅器はエネルギー損失が非常に小さいといった特徴をもつためである。

しかし PWM 方式による増幅器は元来非線形であるためサーボ系に組み入れたとき, 増幅器のゲインなどその性質が定量的に把握できない。従って各状態変数のフ

ードバックゲインを理論的に求めることができず, このため不安定なサーボ系を構成することもあり, サーボ系を構成するのに勘と経験に頼る試行錯誤的な手法を用いなければならない。これでは高速・高精度なサーボ系を効率よく構成することができない。またこうした PWM 方式増幅器では増幅器に用いる比較信号波の周波数は入力信号周波数に比べ十分大きいことが必要であると言われているが, どの程度の周波数の隔たりが必要であるかもわかっていない。

本研究では PWM 方式増幅器の入力と出力の関係を周波数成分の観点においてとらえ, 線形近似されたその等価周波数伝達関数を求めた。そして入力信号の周波数が増幅器に用いる比較信号波の周波数に近づくにつれて増幅器のゲインが下がる様子をも明らかにした。また PWM 化した時の搬送波成分が固体摩擦に対するディザ (Dither) 効果¹⁾を示すことも明らかにした。

2. 理論解析

2.1 PWM 方式増幅器

入力信号の大きさをパルス幅の大きさに変調する PWM 化の方法にも各種考えられるが, 代表的なものは図 1 に示すような二つの方法である。図 1(a)は油圧サーボバルブの駆動²⁾に多く用いられているもので, ディザ効果に対する配慮から, 油圧シリンダのように固体摩擦の大きなものに適している (PWM 方式 I)。図 1(b)は DC

* 原稿受付 昭和 55 年 9 月 11 日, 昭和 55 年度精機学会春季大会学術講演会 (昭和 55 年 3 月 30 日) にて発表。

** 正 会 員 金沢大学工学部 (金沢市小立野 2-40-20)

図1 PWM化の方法

図2 変調されたパルス列

サーボモータの駆動に多く用いられているもので、図1(a)に比べ比較信号波の1サイクル中においてエネルギーの無駄がない(PWM方式II)。このPWM方式IIによる駆動ではディザ効果は期待できない。

2.2 PWM方式増幅器の等価周波数伝達関数

ここではまず、図2のように出力パルス列が入力信号によって少し変調されているときを考える。図2(a)のパルス列Iはパルス上底の幅が入力信号によって $T_0/2$ (T_0 ; 比較信号波周期)から τ に変調されたパルス列であり、比較信号波周期 T_0 で繰り返されている。このパルス列Iにおいて比較信号波1サイクル中における正の部分の半周期と負の部分の半周期の差がマクロな物体の運動の駆動力となる。一方このパルス列Iにおいて正の部分と負の部分のパルスでそれぞれ τ だけのパルス幅をもったパルス列はその幅が τ' に変調されたパルス列であり、図2(b)のようなパルス列IIとして与えられる(この τ だけのパルス幅をそれぞれパルス上底と下底にもったパルス列IIが固体摩擦に対するディザ効果を示す)。パルス列IはPWM方式Iに従うものであり、パルス列Iからパルス列IIを引いたものがPWM方式IIとして与えられるものである(図2(c)参照)。

(パルス列I)のフーリエ展開は

$$\begin{aligned} \frac{e_1(t)}{2A} &= \frac{1}{2T_0}(2\tau - T_0) \\ &+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\omega_0 \tau}{2} \cdot \cos n\omega_0 t \end{aligned} \quad (1)$$

(パルス列I)-(パルス列II)のフーリエ展開は

$$\begin{aligned} \frac{e_1(t) - e_2(t)}{2A} &= \\ \frac{1}{2T_0}(2\tau - T_0) &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left\{ 2 \sin \frac{n\omega_0 \tau}{2} - [1 - (-1)^n] \right. \\ &\times \sin \frac{n\omega_0 \tau'}{2} \left. \right\} \cos n\omega_0 t \end{aligned} \quad (2)$$

となる。以降の数学的取扱においては、PWM方式Iの等価周波数伝達関数はPWM方式IIの一部としてすべて求まるため、PWM方式IIについて考える。

ここで、周期 T_s (振動数 f (Hz)、角振動数 ω (rad/s))、振幅 E_a なる正弦波入力信号 $E_a \sin \omega t$ によって図2のパルス列が変調されるものとする。パルス列Iのパルス上底の幅は $\tau = \tau_0(1 - \kappa E_a \sin \omega t)$ のように、またパルス列IIのパルス幅はほぼ $\tau' = \tau_0(1 - \frac{\kappa E_a}{2} + \frac{\kappa E_a}{2} \cos 2\omega t)$ で近似される($\tau_0 = T_0/2$)。(τ が $\tau = \tau_0(1 - \kappa E_a \sin \omega t)$ のように変調されるとき、 τ' はパルス列Iにおいて正の部分と負の部分からそれぞれパルス幅 τ をもつパルス列IIを引き去るパルス列を構成する必要がある。このため正確には $\tau' = \tau_0(1 - \kappa E_a |\sin \omega t|)$ でなければならないが、本研究では解析を更にすすめるためその近似値として $\tau' = \tau_0(1 - \frac{\kappa E_a}{2} + \frac{\kappa E_a}{2} \cos 2\omega t)$ を用いる。)ここに κ はパルスの変調の程度を示す比例定数で最大変調度は $\kappa E_a (< 1)$ で表される。このとき対称幅変調が行われているため、任意のパルスの中心を時間の原点に選べば、時間の原点でのパルスから第 m 番目のパルス幅 τ, τ' は

もつパルス列IIを引き去るパルス列を構成する必要がある。このため正確には $\tau' = \tau_0(1 - \kappa E_a |\sin \omega t|)$ でなければならないが、本研究では解析を更にすすめるためその近似値として $\tau' = \tau_0(1 - \frac{\kappa E_a}{2} + \frac{\kappa E_a}{2} \cos 2\omega t)$ を用いる。)ここに κ はパルスの変調の程度を示す比例定数で最大変調度は $\kappa E_a (< 1)$ で表される。このとき対称幅変調が行われているため、任意のパルスの中心を時間の原点に選べば、時間の原点でのパルスから第 m 番目のパルス幅 τ, τ' は

$$\tau = \tau_0(1 - \kappa E_a \sin m\omega T_0) \quad (3)$$

$$\tau' = \tau_0 \left(1 - \frac{\kappa E_a}{2} + \frac{\kappa E_a}{2} \cos 2m\omega T_0 \right) \quad (4)$$

のように変調される。変調されたパルス列は T と T_0 の最小公倍数 T_a を周期として同一パルスが繰り返される。変調されたパルス幅が式(3),(4)で表されるようなパルスは T_a の周期の間にただ一つだけあり、 T_a を周期としてこのようなパルスが繰り返される。従って変調された第 m 番目のパルスについてのフーリエ展開は式(1),(2)において T_0, ω_0 の代わりに $T_a, \omega_a (= 2\pi/T_a)$ を代入すれば求められる。これより式(2)は

$$\frac{e_m(t)}{2A} = \frac{1}{2T_a}(2\tau - T_a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left\{ \sin \frac{n\omega_a \tau}{2} - [1 - (-1)^n] \right.$$

$$\times \sin \frac{n\omega_a \tau'}{2} \Big\} \cos n\omega_a(t - mT_0) \quad (5)$$

のようになる。ここに τ, τ' は式 (3), (4) で与えられるものである。変調パルス列 $e(t)$ は周期 T_a の間に含まれる $e_m(t)$ の総和であるから

$$\frac{e(t)}{2A} = \sum_{m=0}^{f_0 T_a - 1} \left\{ \frac{e_m(t)}{2A} \right\} \quad (6)$$

を求めなければならない。これより少し計算すれば

$$\begin{aligned} \frac{e(t)}{2A} = & \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\omega_a \tau_0}{2} \cdot J_0 \left[\frac{n\omega_a \tau_0 \kappa E_a}{2} \right] \right. \\ & \times \sum_{m=0}^{f_0 T_a - 1} \cos n\omega_a(t - mT_0) \Big\} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{4}{n\pi} \sin \frac{n\omega_a \tau_0}{2} \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ J_{2s} \left[\frac{n\omega_a \tau_0 \kappa E_a}{2} \right] \right. \right. \\ & \times \sum_{m=0}^{f_0 T_a - 1} \cos 2s\omega_m T_0 \cos n\omega_a(t - mT_0) \Big\} \Big\} \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{4}{n\pi} \cos \frac{n\omega_a \tau_0}{2} \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ J_{2s+1} \left[\frac{n\omega_a \tau_0 \kappa E_a}{2} \right] \right. \right. \\ & \times \sum_{m=0}^{f_0 T_a - 1} \sin(2s+1)\omega_m T_0 \cos n\omega_a(t - mT_0) \Big\} \Big\} \\ & - \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\omega_a \tau_0}{2} \left(1 - \frac{\kappa E_a}{2} \right) \cdot J_0 \left[\frac{n\omega_a \tau_0 \kappa E_a}{4} \right] \right. \\ & \times \sum_{m=0}^{f_0 T_a - 1} \cos n\omega_a(t - mT_0) \Big\} \\ & - \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{4}{n\pi} \sin \frac{n\omega_a \tau_0}{2} \left(1 - \frac{\kappa E_a}{2} \right) \right. \\ & \times \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ (-1)^s J_{2s} \left[\frac{n\omega_a \tau_0 \kappa E_a}{4} \right] \right. \\ & \times \sum_{m=0}^{f_0 T_a - 1} \cos 4s\omega_m T_0 \cos n\omega_a(t - mT_0) \Big\} \Big\} \\ & + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{4}{n\pi} \cos \frac{n\omega_a \tau_0}{2} \left(1 - \frac{\kappa E_a}{2} \right) \right. \\ & \times \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ (-1)^s J_{2s+1} \left[\frac{n\omega_a \tau_0 \kappa E_a}{4} \right] \right. \\ & \times \sum_{m=0}^{f_0 T_a - 1} \sin 2(2s+1)\omega_m T_0 \cos n\omega_a(t - mT_0) \Big\} \Big\} \quad (7) \end{aligned}$$

となるため、各項について解析、考察をする。第1項と第4項は比較信号波とその高調波の出力成分を表す。また第2項は入力信号の2次、4次、…の高調波成分を、第3項は入力信号の1次、3次、…の高調波成分を、第5項は入力信号の4次、8次、…の高調波成分を、第6項は入力信号の2次、6次、…の高調波成分をそれぞれ表す。従って等価周波数伝達関数としては入力正弦波と同じ周波数の出力成分を持つ項に注目する必要がある。これより第3項の式から、入力正弦波 $(-E_a \sin \omega t)$ と

同じ周波数の出力成分として

$$-\frac{2\omega_0}{\omega\pi} \cdot \cos \left(\frac{\omega T_0}{4} \right) \cdot J_1 \left[\frac{\omega T_0 \kappa E_a}{4} \right] \sin \omega t \quad (8)$$

が求まる。また代表的出力波形ひずみとして、基本波の2次の高調波は、第2項と第6項の式から

$$\begin{aligned} & \frac{\omega_0}{\omega\pi} \sin \left(\frac{\omega T_0}{2} \right) \cdot J_2 \left[\frac{\omega T_0 \kappa E_a}{2} \right] \cos 2\omega t \\ & + \frac{\omega_0}{\omega\pi} \cos \left(\frac{\omega T_0}{2} \right) \left(1 - \frac{\kappa E_a}{2} \right) J_1 \left[\frac{\omega T_0 \kappa E_a}{4} \right] \sin 2\omega t \quad (9) \end{aligned}$$

として与えられる。一方、比較信号波と同じ周波数の出力成分は

$$\frac{2}{\pi} \left\{ J_0 \left[\frac{\kappa E_a \pi}{2} \right] - \sin \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\kappa E_a}{2} \right) J_0 \left[\frac{\kappa E_a \pi}{4} \right] \right\} \cos \omega_0 t \quad (10)$$

である。

以上の解析結果から式 (8) により、入力正弦波と同じ周波数の出力成分に注目した PWM 方式増幅器での等価周波数伝達関数は

$$G(j\omega) = \frac{8A}{E_a} \cdot \frac{1}{\omega T_0} \cos \left(\frac{\omega T_0}{4} \right) J_1 \left[\frac{\kappa E_a \omega T_0}{4} \right] \quad (11)$$

となる。更に通常の使用条件下 ($\omega T_0 \ll 1, \kappa E_a < 1$) では上式はもっと簡単に

$$G(j\omega) \doteq A\kappa \quad (12)$$

で表され、線形近似された PWM 方式増幅器での等価周波数伝達関数が求まる。この等価周波数伝達関数の結果は PWM 方式 I²⁾ でも全く同じものである。

PWM 方式増幅器に正弦波を入力した時の出力波形の周波数スペクトラムを図 3 に示す。図 3 (a), (b) は PWM 方式 I の, (c), (d) は PWM 方式 II の周波数スペクトラムである。おのおのの入力信号として、10 Hz と 60 Hz の正弦波を入力した場合を示してある。このときの比較信号波は 300 Hz の三角波であり、また変調度は $\kappa = 0.2$ である。図 3 からいずれの PWM 方式においても信号と搬送波の分離状態はよく、従ってその分離も比較的容易にできることがわかる。

3. 実 験

PWM 方式増幅器を用いたサーボ系をアナログ計算機上に構成しそのシミュレーションを行った。そしてその系の動特性としてステップ応答と周波数特性を測定した。この時用いたシミュレーション回路を図 4 に示す (図 4 の中で PWM 回路としては、PWM 方式 I のときは同図 (a) の回路を、PWM 方式 II のときは同図 (b) の回路を用いる)。図 5 (a) にこの回路によるステップ応答を、また図 6 には周波数特性を示す。図 5 (b) は PWM 方式増幅器の線形近似された等価周波数伝達関数による

(a) PWM 方式 I による変調 (入力信号周波数 10 Hz)

(b) PWM 方式 I による変調 (入力信号周波数 60 Hz)

(c) PWM 方式 II による変調 (入力信号周波数 10 Hz)

(d) PWM 方式 II による変調 (入力信号周波数 60 Hz)

図3 PWM方式増幅器による出力波形の周波数スペクトラム

系のステップ応答波形である。この線形化された等価周波数伝達関数を用いたステップ応答波形の結果はPWM方式増幅器によるステップ応答波形とよく一致していることがわかる。一方PWM方式増幅器によるステップ応答では図5(a)に現れているようにディザにより微動していることがわかる(PWM方式I)。図6にはPWM方式増幅器を用いたサーボ系の周波数特性が示されているが(○印)、この結果も線形近似された等価周波数伝達関数による系の周波数特性(実線)とよく一致していることがわかる。なおPWM方式IとPWM方式IIによる波形の相違はディザを除いてほとんどなかった。

4. 考 察

このPWM方式増幅器では変調度と入力信号振幅が一定($\kappa E_a = \text{const}$)であっても入力信号周波数が比較信号周波数に近づくにつれて増幅度が低下してくる。しかも増幅度が大きいほど、すなわち $A\kappa$ の値が大きいほどその増幅度の低下も著しい。これらの様子を図7に示す。しかし通常($T/T_0 < 0.2$)のPWM方式増幅器の使用状態ではその増幅度は $A\kappa$ で十分近似できることもわかる。なお実験ではPWM方式増幅器の増幅度が線形近似された等価周波数伝達関数によって十分近似できることを示したが、これらの実験条件はすべて通常のPWM方式増幅器の使用条件内にあったこともわかる。

一方PWM方式増幅器では搬送波の周波数成分が固体摩擦に対するディザ効果を示す。図4に示されているサーボ系のシミュレーション回路に固体摩擦のシミュレーション回路を付加して実験を行った。図8(a)は線形アンプによるシミュレーション結果、(b)はPWM方式IによるPWM方式増幅器を用いたシミュレーション結果、(c)はPWM方式IIによるPWM方式増幅器を用いたシミュレーション結果である。この結果からPWM方式Iによればディザ効果を期待できることがわかる。PWM方式IIでは線形アンプのように固体摩擦による不感帯のために定常偏差を生じてしまう。

5. 結 論

本研究では元来非線形であるPWM方式増幅器の解析を行った。これによって得られた結果を次に列挙する。

図 4 PWM 方式増幅器を用いたサーボ系のアナログシミュレーション回路

図 5 PWM 方式増幅器を用いたサーボ系のステップ応答と等価周波数伝達関数を用いた解析結果

図 6 PWM 方式増幅器を用いたサーボ系の周波数特性と等価周波数伝達関数を用いたときの解析的結果

図7 PWM方式増幅器での増幅度

- (1) PWM方式増幅器の線形近似された等価周波数伝達関数を求めた. その結果PWM方式増幅器の増幅度は近似的に Ax で与えられる.
- (2) PWM方式増幅器を用いたサーボ系のシミュレーション回路を構成し, その系の動特性としてステップ応答と周波数特性を調べた. この結果は線形近似された等価周波数伝達関数による理論的結果とよく一致している.
- (3) PWM方式Iの方がPWM方式IIに比べエネルギー損失は多いが固体摩擦に対してディザ効果を示す.
- (4) PWM方式増幅器では入力信号周波数が比較信号周波数に近づくにつれ増幅度が低下する. しかも増幅度が大きいほどその低下の割合も著しい.

PWM方式増幅器では一般に比較信号周波数は入力信号周波数に比べ十分に大きいことが必要である. しかし固体摩擦を含む系においてディザ効果を期待するときには比較信号周波数を系の共振周波数よりあまり大きくすることはできない. これよりPWM方式増幅器を用いる場合, 増幅という機能以外に固体摩擦に対するディザ効果をも期待するときには上に述べたような性質から比較信号波の周波数を注意深く選ばなければならない.

終わりに本研究を行うにあたり御指導を賜った東京大学高野政晴教授に感謝申し上げます. また本研究は昭和52年度文部省科学研究費補助金(奨励研究(A))の交付を受けて行ったことを付記する.

参考文献

- 1) 中野和夫: Dither に関する一提案, 計測と制御, 3, 4

(a) 線形アンプを用いたときのステップ応答

(b) PWM方式Iによる増幅器を用いたときのステップ応答

(c) PWM方式IIによる増幅器を用いたときのステップ応答

図8 PWM方式増幅器をサーボ系に用いたときの固体摩擦に対するディザ効果

(1964) 262.

- 2) 沢村泰造, 花房秀郎, 乾 喬: PWM方式を用いた電気-油圧サーボの周波数特性, 制御工学, 3, 6 (1959) 364.