定荷重研削切断加工に関する研究 (第2報)*

——切断特性の定常確率過程解析——

長谷川 素由** 中西 佑二***

Study on the Abrasive Cut-off Operation by
the Constant Load (2nd Report)
—Characterization of Abrasive Cut-off Operation
by Stationary Stochastic Process—

Motoyoshi HASEGAWA and Yuji NAKANISHI

The feed rate and the grinding ratio for abrasive cut-off process of S50C steel were analyzed 100 times in terms of different combination of grinding conditions. The analysis included the length of cut and the load. The tests were carried out at the wheel speed of 4800 m/min in order to investigate the optimal abrasive cut-off system. Autoregres-

sive-moving average model, ARMA(2, 1) is developed to represent the stochastic process of the feed rate and the grinding ratio. The feed rate and the grinding ratio are optimum when the pressure between the wheel and the workpiece is 6.67 N/mm². Best abrasive cut-off performance by the constant load system is obtained by using the length of cut of 15 mm and the load of 300 N with the height of workpiece of 22 mm at the wheel speed of 4800 m/min.

Key words: abrasive cut-off operation, feed rate, grinding ratio, autoregressive-moving average model, optimal system.

1. 緒 論

定荷重研削切断システムの最適加工条件を明らかにするため、前報¹⁾においては、実験計画法に基づき炭素鋼を100回連続研削切断し、切断条件と特性値との関係を多変量解析によって定量的に明らかにした。その結果、砥石周速度は、4800 m/minに設定することが望ましいことが明らかにされた。ところで、定荷重研削切断加工システムの大きな特徴は、その切れ味が時々刻々変化するることである。従って、定荷重研削切断の加工特性は切断回数とともにランダムに変動し、その不規則変動特性は、確率過程とみなすことができる。本報は、砥石周速度4800 m/min下での鋼の最適研削切断システムを加工条件との関係から明らかにするため、被削性の代表的特性値である送り速度と研削比を取り上げ、切断回数に対するこれら特性値の変動特性を定常確率過程解析によって解明しようと試みた。

2. 研削切断加工システムの定常確率過程モデル

切断回数に対する送り速度および研削比のランダム応答を、正規性白色雑音を入力とする線形システムの出力として切断回数 t で定義された定常確率過程 Y_t で表すと、応答 Y_t は次式で表される²⁾。

$$Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-2} \cdots \phi_n Y_{t-n} = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \cdots - \theta_m e_{t-m} \quad (1)$$

$$E[e_t] = 0, \quad E[e_t e_{t-k}] = \begin{cases} \sigma_e^2 & (k=0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$$

ここで、 e_t は正規性誤差、 σ_e^2 は誤差の分散、 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ は自己回帰パラメータ、 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ は移動平均パラメータである。これは離散型自己回帰移動平均確率過程で、記号ARMA(n, m)で表す。実測データについてモデルが決定すると、システム特性が判別できるグリーン関数 G_j は次式で求められる。

$$G_j = \sum_{k=1}^n \lambda_k^j \theta_j(\lambda_k), \quad j < m \quad (2)$$

$$= \sum_{k=1}^n \lambda_k^j \theta_m(\lambda_k), \quad j \geq m \quad (3)$$

上式で $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ は式(1)の特性根である。特性根 λ_i と自己回帰パラメータ ϕ_i および移動平均パラメータ θ_j との間には次の関係が成立する。

$$\lambda^n - \phi_1 \lambda^{n-1} - \phi_2 \lambda^{n-2} - \cdots - \phi_n = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) \quad (4)$$

$$\theta_j(\lambda_k) = - \sum_{r=0}^j U_r \lambda_k^{n-1-r} \theta_r, \quad (j=0, 1, 2, \dots, m) \quad (5)$$

$$\theta_0 = -1$$

上式で U および U_k は次式で表される。

$$U = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^n (\lambda_i - \lambda_j) \quad (6)$$

* 原稿受付 昭和56年7月6日、昭和56年度精機学会春季大会学術講演会(昭和56年3月28日)にて発表。

** 正 会 員 防衛大学校(横須賀市走水1-10-20)

*** 正 会 員 東京都立工業高等専門学校(東京都品川区東大井1-10-40)

Table 1 Experimental conditions

No.	l mm	W N	Symbols	Remarks
1	5	100	5-100	Grinding wheel; A 30 TB (406×3×25.4) Workpiece material; Steel S 50 C
2	5	200	5-200	
3	5	300	5-300	
4	10	100	10-100	Dimensions; Height of workpiece; $h=22$ mm Width of workpiece; $b=3$ mm
5	10	200	10-200	
6	10	300	10-300	
7	15	100	15-100	Wheel velocity; $V=4800$ m/min
8	15	200	15-200	
9	15	300	15-300	Grinding fluid; none
10	20	400	20-400

Fig.1 Schematic diagram of the abrasive cut-off operation

$$U_k = (-1)^{k+n} \prod_{\substack{i,j=1 \\ i,j \neq k}}^n (\lambda_i - \lambda_j), \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

ここで、実データから計測された ARMA(n, m) モデルが安定なシステムとなるためには、次式の条件を満足しなければならない。

$$\left. \begin{aligned} |\lambda_k| &\leq 1, & k=1, 2, \dots, n \\ \lambda_i &\neq \lambda_j, & i \neq j \\ |\lambda_i| &= |\lambda_j| < 1, & i, j=1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

以上より安定な切断加工システム ARMA(n, m) モデルとその適正加工条件との関係が判定できる。

3. 実験

3.1 実験条件および実験方法

表1は、定荷重研削切断加工特性の確率過程モデルを計測するために採用した実験条件を示している。ここで砥石周速度は既述の理由から4800 m/min一定に保った。表の l は被削材の高さであり、 W は荷重である。実験は前報¹⁾と同じ装置を使用した。図1に装置の概要を示す。送り速度の測定は、工具動力計(佐藤工機製)の信号を電磁オンシログラフに記録し、その波形から求めた。また、砥石半径損耗量は、砥石外周を8等分割した8か所で精度1/100 mmのマイクロメータで測定し、その平

Fig.2 Experimental results of the feed rate against the number of cuts

均值で表した。荷重は、本装置で設定できる最大荷重まで用いた。

3.2 定常確率過程モデルの次数決定法

定常確率過程 ARMA モデルの次数決定にあたっては、推定法によって次数が異なることに留意して、ここでは既に報告されている次数推定法のなかから FPE 法³⁾、誤差級数法 G. K. 4), および AIC 法⁵⁾をそれぞれ採用し、原則的に計算結果のうちで誤差の少ない次数を最適モデルと同定した。

4. 実験結果および定常確率過程解析

4.1 送り速度

図2は、表1の実験条件で炭素鋼 S 50 C を100回切断したときの送り速度の変動特性を示した一例である。いま、切断回数 t に対する送り速度 v の変動過程を ARMA モデルで計測すると表2のようになる。図3は、計測結果をもとに式(2)~(8)を用いて定荷重研削切断システムのグリーン関数 G_j を計算した結果である。図には表1の加工条件のうち収束する安定なシステムのみが描かれている。これ以外の実験条件はすべて発散して収束しない不安定なシステムとなる。すなわち、安定なシステム

Table 2 The ARMA models of the feed rate

No.	Symbols	AR(<i>n</i>)	ARMA(<i>n</i> , <i>m</i>)			Green functions <i>G_j</i>
		FPE	G. K.	AIC	Optimal models	
1	5-100	2	(2, 1)	(2, 1)	(2, 1)	*
2	5-200	2	(2, 1)	(2, 1)	(2, 1)	*
3	5-300	3	(2, 2)	(2, 2)	(2, 2)	
4	10-100	7	(4, 1)	(2, 3)	(2, 3)	
5	10-200	0	(2, 2)	(2, 2)	(2, 2)	
6	10-300	1	(2, 4)	(2, 1)	(2, 1)	
7	15-100	2	(2, 2)	(2, 1)	(2, 2)	
8	15-200	1	(2, 4)	(2, 2)	(2, 4)	*
9	15-300	3	(2, 1)	(2, 1)	(2, 1)	
10	20-400	7	(5, 2)	(3, 4)	(3, 4)	

Remarks: * indicates the stable system

Fig. 3 The Green function of the feed rate calculated by the ARMA(2, 1) model

は、表1のNo. 1, 2, 9の三つである。また、これらの送り速度の定常確率過程モデルは、下記の ARMA(2, 1) モデルで記述でき、モデルの自己回帰パラメータはいずれも $-1 < \phi_1, \phi_2 < 0$ の範囲におさまっている。

$$\text{No. 1; } Y_t = -0.650Y_{t-1} - 0.258Y_{t-2} + e_t + 0.025e_{t-1} \quad (9)$$

$$\text{No. 2; } Y_t = -0.650Y_{t-1} - 0.172Y_{t-2} + e_t + 0.336e_{t-1} \quad (10)$$

$$\text{No. 9; } Y_t = -0.626Y_{t-1} - 0.283Y_{t-2} + e_t + 0.384e_{t-1} \quad (11)$$

4.2 研削比

図4は、同じ実験条件に対し、切断回数5回ごとに研削比 G (被削材除去容積と砥石損耗容積との比) を測定した結果の一例である。この研削比の値を図2の結果と対応させてみると、面圧を一定に保つと平均送り速度 $\bar{v}$ はほぼ一定になるが、そのときの平均研削比 $\bar{G}$ は一定値を示していない。平均研削比からは、加工条件 No. 1 のシステムが最適だが、切断回数に対応する研削比の応答特性はそれぞれ複雑な変動を示しており、平均研削比のみでは判定しがたい面がある。そこで、送り速度と同様に研削比の変動特性を一つの定常確率過程と考えて、参考のためにこの ARMA モデルを計測すると表3のようになった。表からわかるようにいろいろの次数の確率過

Fig. 4 Experimental results of the grinding ratio against the number of cuts

Table 3 The ARMA models of the grinding ratio

No.	Symbols	AR(n)		ARMA(n, m)		
		FPE	G. K.	AIC	Optimal models	
1	5-100	20	(3, 1)	(2, 1)	(2, 1)	
2	5-200	20	(2, 1)	(2, 2)	(2, 2)	
3	5-300	20	(2, 4)	(4, 4)	(4, 4)	
4	10-100	20	(3, 1)	(2, 2)	(2, 2)	
5	10-200	20	(2, 2)	(3, 1)	(3, 1)	
6	10-300	20	(3, 1)	(3, 1)	(3, 1)	
7	15-100	20	(2, 1)	(4, 3)	(4, 3)	
8	15-200	20	(2, 1)	(5, 3)	(5, 3)	
9	15-300	20	(3, 1)	(3, 1)	(3, 1)	
10	20-400	20	(2, 1)	(2, 1)	(2, 1)	

程が計測されるが、実験データが20個である点と次数推定法の計算精度とを考慮あわせて、ここでは送り速度と同様に研削比の確率過程をすべて ARMA(2, 1) モデルで同定した。いま、この ARMA(2, 1) モデルを用いてグリーン関数 G_j を計算すると、図5のようになる。表1の条件のうちで図に記述されていないものは発散してしまい、その加工条件は安定なシステムを構成しない。すなわち、図5の結果から表1の加工条件のうちNo. 9, 1, 10, 3, 8 および7が安定なシステムであり、また、この順に収束性がよいことがわかる。

4.3 送り速度および研削比の変動係数

Fig. 5 The Green function of the grinding ratio calculated by the ARMA(2,1) model

Table 4 The characteristic values of the feed rate and the grinding ratio

No.	Symbols	$\bar{v}$ mm/s	σ_v mm/s	$C_v = \sigma_v / \bar{v}$	$\bar{G}$	σ_g	$C_g = \sigma_g / \bar{G}$
1	5-100	22.19	1.297	0.058 (3)	4.12	1.25	0.30 (4)
2	5-200	37.93	2.309	0.061 (4)	5.53	2.15	0.39 (8)
3	5-300	59.35	5.461	0.092 (7)	2.53	0.77	0.31 (5)
4	10-100	10.02	1.673	0.167 (9)	0.41	0.28	0.69 (9)
5	10-200	21.84	1.628	0.075 (6)	2.28	0.59	0.26 (3)
6	10-300	33.07	1.456	0.044 (2)	0.81	0.25	0.31 (5)
7	15-100	5.13	1.215	0.237 (10)	4.96	1.55	0.31 (5)
8	15-200	13.24	0.956	0.072 (5)	2.79	0.34	0.12 (2)
9	15-300	20.94	0.889	0.043 (1)	1.47	0.16	0.11 (1)
10	20-400	24.22	2.632	0.109 (8)	0.80	0.24	0.95 (10)

Remarks: σ_v, σ_g are the standard deviation of the feed rate and the grinding ratio. "-" means the expectation. The number in the parenthesis indicates the order of the characteristic values

次に、システムの安定判別に関する簡便な計測法である変動係数を調べてみる。表4は、各実験条件に対して100回切断後の平均送り速度 $\bar{v}$ とその標準偏差 σ_v および変動係数 $C_v (= \sigma_v / \bar{v})$ と、また、平均研削比 $\bar{G}$ とその標準偏差 σ_g および変動係数 $C_g (= \sigma_g / \bar{G})$ の計測結果を示している。この表からわかることは、平均送り速度は荷重の増加とともに増大し、被削材の高さが増加するとともに減少していることである。一方、平均研削比は、荷重および被削材の高さの増加に対して一定の傾向を示さない。 C_v から判断すると、加工条件No. 9, 6, 1が、 C_g に関しては、加工条件No. 9, 8, 5, 1がそれぞれその変動が少ないことがわかる。ここで興味あることは、加工条件No. 1, 5, 9, 10の面圧を計算すると、ともに6.67 N/mm²と一定していることである。そこで、面圧6.67 N/mm²一定条件のもとで加工システムの安定性をグリーン関数と変動係数とから整理すると表5のようになった。この表から、最も安定しているシステムはNo. 9(加工条件: $l=15$ mm, $W=300$ N)であり、次はNo. 1(加工条件: $l=5$ mm, $W=100$ N)であることがわかる。

Table 5 The classification of stability for abrasive cut-off systems

No.	Symbols	G_j		Coefficient of variation		Decision
		v	G	C_v	C_g	
1	5-100	Stable	Stable	2	3	(2)
5	10-200	Stable	Stable	3	2	(3)
9	15-300		Stable	1	1	(1)
10	20-400		Stable	4	4	(4)

Remarks: The number in the parenthesis indicates the order of the systems

5. 考 察

5.1 送り速度の振動特性

前節で得られた適正加工システムの連続確率過程モデルから送り速度の振動特性を検討する。確率過程の連続モデルは次式で表される。

$$\frac{d^2 Y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dY(t)}{dt} + \omega_n^2 Y(t) = Z(t) \quad (12)$$

$$E[Z(t)] = 0$$

$$E[Z(t)Z(t+u)] = \delta(u)\sigma_z^2$$

上式で、 ζ は減衰比、 ω_n は固有振動数、 $Y(t)$ は応答、 $Z(t)$ は正規性誤差である。また、 $\delta(u)$ はDiracのデルタ関数、 σ_z^2 は分散である。

いま、先に得られた次のARMA(2,1)モデル

$$Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-2} = e_t - \theta e_{t-1} \quad (13)$$

と式(12)のパラメータ間には、条件 $\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$ 、サンプリング間隔が1のとき次式の関係が成立することがわかっている⁶⁾。

$$\zeta = \frac{\sqrt{[\ln(-\phi_2)]^2}}{\sqrt{[\ln(-\phi_2)]^2 + 4\left[\cos^{-1}\left(\frac{\phi_1}{2\sqrt{-\phi_2}}\right)\right]^2}} \quad (14)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{[\ln(-\phi_2)]^2}{4} + \left[\cos^{-1}\left(\frac{\phi_1}{2\sqrt{-\phi_2}}\right)\right]^2} \quad (15)$$

式(14), (15)からシステムNo. 9, No. 1の送り速度に関する減衰比 ζ および固有振動数 ω_n を計算するとそれぞれ下記ようになった。

i) システムNo. 9の場合

$$\zeta = 0.276$$

$$\omega_n = 2.289$$

ii) システムNo. 1の場合

$$\zeta = 0.287$$

$$\omega_n = 2.365$$

以上の計算結果から、両者の減衰比はほぼ同じであるが、固有振動数を比較すると、No. 1の方がNo. 9よりも少し大きい。また、 $\zeta\omega_n > 0$ になるからこの連続型モデルは減少型の安定システムである。このことから定荷重研

Table 6 Transition probability of the feed rate

State	Increase	Decrease
Increase	P_{11}	P_{12}
Decrease	P_{21}	P_{22}

削切断加工の安定システムは、減衰比が0.27~0.29, 固有振動数が2.29~2.37程度であることがわかる。

5.2 被削性の推移確率特性

図2に示した送り速度の離散的な観測結果は、点 $t=1, 2, \dots$ において次々に状態が変化しており、その状態を観察すると次の4つの推移過程に分類できる。

- i) 増加から増加 ii) 減少から増加
iii) 減少から減少 iv) 増加から減少

この推移過程は、各点で取りうる状態が有限個であり、点 $t-1$ で状態 E_i にある系が次の点 t で状態 E_j に移行する確率は、 E_i と E_j だけに依存して決まる有限マルコフ連鎖と考えられる。送り速度の変動の原因は、砥石の磨耗形態と密接に関係するが、推移過程i), ii)は、送り速度の増加過程に、iii), iv)は、送り速度の減少過程にそれぞれ対応している。従って、被削性は推移過程i), ii)の発生する確率が高いシステム程良好である。そこで、現時点で状態 i にある送り速度が次の点で状態 j に移行する推移確率 P_{ij} を計測してみよう。4つの推移過程の推移確率は表6のように整理できる。従って、系全体の推移確率行列 P は

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \quad (16)$$

で表されるから、これを基に状態 i にある系がそれより n 単位経過後に状態 j に移行する n 次推移確率 $P^{(n)}$ は式(16)で

$$P_{11}=1-\alpha, \quad P_{12}=\alpha, \quad P_{21}=\beta, \quad P_{22}=1-\beta \quad (17)$$

$$(0 < \alpha, \beta < 1)$$

と置き換えると下記のように導ける⁷⁾。

$$P^{(n)} = P^n = \frac{1}{\alpha+\beta} \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} + \frac{(1-\alpha-\beta)^n}{\alpha+\beta} \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\beta & \beta \end{pmatrix} \quad (18)$$

ここで、 $n \rightarrow \infty$ の場合を考えると、 $|1-\alpha-\beta| < 1$ であるから推移確率は式(18)から次のようになる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \frac{1}{\alpha+\beta} \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad (19)$$

従って、被削性の状態確率分布 $\omega^{(n)}$ の極限分布は、初期状態分布 $\omega^{(0)}$ に対して次のように表される。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega^{(0)} P^n = \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}, \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \right) \quad (20)$$

図2の結果に対して、推移確率 α, β を計算し、被削性が増加状態になる確率 $P_{up}=\beta/(\alpha+\beta)$ 、および減少状態に

Table 7 Transition probability of the machinability of steel, S 50 C

Symbols No.	α	β	$P_{up}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}$	$P_{down}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$
1	$\frac{25}{49}$	$\frac{25}{51}$	0.49	0.51
5	$\frac{25}{52}$	$\frac{13}{24}$	0.53	0.47
9	$\frac{11}{25}$	$\frac{14}{25}$	0.56	0.44
10	$\frac{15}{23}$	$\frac{15}{27}$	0.46	0.54

なる確率 $P_{down}=\alpha/(\alpha+\beta)$ を計算すると表7のようになる。被削性の観点からみても、加工システムNo.9が最適であることがよくわかる。

6. 結 論

炭素鋼を定荷重研削切断するときの適正加工条件を明らかにするため、送り速度と研削比について定常確率過程解析した結果を要約すると下記ようになる。

- (1) 100回切断した研削過程の送り速度および研削比の不規則応答を定常確率過程解析した結果、安定した加工システムは自己帰帰移動平均確率過程ARMA(2, 1)で表される。
- (2) 砥石周速度4800 m/minで炭素鋼S 50 Cを切断加工する場合の適正加工条件は、砥石と工作物との面圧を6.67 N/mm²一定に保持したときに得られる。
- (3) 砥石周速度4800 m/minで炭素鋼S 50 Cを切断するときの最適加工条件は、送り速度および研削比をグリーン関数の収束性と変動係数や、また、送り速度の減衰比、固有振動数および被削性が増加する推移確率などから分析した結果、被削材の高さを15 mm、幅を22 mm、荷重を300 Nに設定した場合に得られる。このとき、被削性が増加状態へ推移する極限確率は0.56になる。

文 献

- 1) 長谷川素由, 中西佑二: 定荷重研削切断加工に関する研究(第1報), 精密機械, 47, 6 (1981) 688.
- 2) S. M. Wu: Dynamic Data System: A New Modeling Approach, J. Engg. Ind., Trans. ASME, Ser. B, 99, 8, (1977) 708.
- 3) 赤池弘次, 中川東一郎: ダイナミックシステムの統計的解析と制御, サイエンス社 (1972) 51.
- 4) D. J. Krause and D. Graupe: Identification of Prediction and Filter Parameters by Autoregressive Moving Average Model, Int. J. Control, 17, (1973) 1021.
- 5) 赤池弘次: 情報量基準とは何か, 数理科学, 153 (1976) 5.
- 6) S. M. Pandit and S. M. Wu: Characterization of Abrasive Tools by Continuous Time Series, J. Engg., Trans. ASME, Ser. B, 95, 3, (1973) 821.
- 7) 小山昭雄: マルコフ過程とその周辺, 東洋経済新報社 (1971) 85.