研究

突き合わせ接着継手の力学特性*

坂田 興 亜** 碓井 雄 一**

Mechanical Properties of Adhesive Bonded Butt Joint

Okitsugu SAKATA and Yuichi USUI

This paper deals with to make clear the mechanical properties such as apparent axial modulus of elasticity and strength, of the adhesive bonded butt joints of tubular type. Theoretical results on the apparent axial modulus calculated with the extended G.H. Lindsey's method, are compared to the results in experimental tensile tests of butt joints bonded with epoxy-polyamide adhesive. It is shown both in theoretical calculation and experiment that the apparent axial modulus of elasticity of joint fairly increases along with the increase of thick-

ness of adhesive layer for the large Poisson's ratio. However, the modulus measured in the experimental test does not always coincide with the theoretical results as far as the thickness of adhesive layer is kept extremely thinner, because of the increase of unhomogeneity of the adhesive layer. Concerning of joint strength, joint fracture is brought when the strain in an adhesive layer that is comparatively thick, attains to a constant level. And the maximum shear stress in it also increases with the increase of adhesive layer.

Key words: adhesive bonded joint, butt joint, apparent axial modulus of elasticity, epoxy-polyamide adhesive, joint strength, tensile strength.

1. 緒 言

接着によって機械構造物を製作するには、接着継手部の強度と変形特性を知ることが必要である。接着継手の強度には接着剤の性能のみならず、被着体のぬれ特性及び粗さ・形状、硬化条件、接着剤層の厚み等の因子が影響を及ぼす。継手の変形については、接着剤自体の物性や継手部の形状が重要となる。本研究は中空円筒型の突き合わせ接着継手を解析の対象とし、主に継手の変形特性を軸方向弾性率によって評価する。その場合、継手強度（接着強度）に密接に関係する接着剤の厚みがこの弾性率にどのような影響を及ぼすかを理論と実験の両面から追求する。

円筒型突き合わせ接着継手において、接着剤層内の応力分布を初めて解析したのは Lindsey である¹⁾。これは正確には接着継手でなく、高分子材料を剛性の高い中実円筒形で挟むように接着し、軸方向に力を加えて材料内部に3軸応力場を形成したいわゆる Triaxial pocketchin test として知られている試験方法で、材料内部の応力状態を解析したものであった。Lindsey の解析を中空円筒突き合わせ接着継手に適用したのは杉林・池上ら²⁾³⁾で、接着剤強度試験と接着剤内部応力との関係を

知る目的で応力解析を行っている。

本研究は同じく Lindsey の解析を発展させたものであるが、彼らが未検討である金属接着を対象とした同継手の軸方向弾性率を示す理論式を導いた。なお解析モデルに中空円筒型突き合わせ接着継手を選んだのは、現実のパイプ状の突き合わせ継手に対して解析を行うということ以外に、継手の伸び測定をより正確に行うため継手中心部にセンサを固定する必要があったためであった。

解析のなかで使用した主な記号は以下に示すとおりである。

$2h$: 接着剤層の厚み

r_i : 継手の内半径

r_o : 継手の外半径

r : 継手の半径方向軸

z : 継手の軸方向の軸

θ : z 軸のまわりの回転

u : 接着剤層の r 軸方向変位

w : 接着剤層の z 軸方向変位

ε : 継手の軸方向伸び

$g(r)$: 接着剤層内部の r 方向変位関数

$e_{ij}(r)$: 接着剤層内部のひずみ

$\sigma_{ij}(r)$: 接着剤層内部の応力

$\bar{\sigma}_{ij}(r)$: z 軸方向平均化応力

$(\sigma_{rz})_{\max}$: 最大せん断応力

E : 接着剤の縦弾性率

E^* : 継手の軸方向弾性率（見かけの弾性率）

* 原稿受付 昭和 58 年 2 月 19 日、昭和 53 年度精機学会秋季大会学術講演会（昭和 53 年 10 月 3 日）および昭和 54 年度精機学会秋季大会学術講演会（昭和 54 年 10 月 11 日）にて発表。

** 正 会 員 機械技術研究所（茨城県新治郡桜村並木 1-2）

Fig. 1 Analytical model of adhesive bonded butt joint

ν : 接着剤のポアソン比

I_0, I_1 : 第1種変形ベッセル関数

K_0, K_1 : 第2種変形ベッセル関数

2. 継手の軸方向弾性率と接着剤層内部の応力

通常, 鉄系金属に対し接着剤の縦弾性率は $1/200 \sim 1/500$ 位小さい. 本研究は金属接着継手を対象とするため, 被着体を剛体であると仮定し, 図1のように円柱座標を使った応力-ひずみ関係式と z 軸方向に平均化した r 軸方向釣合い方程式から接着剤単体の縦弾性率 E に対する継手の軸方向弾性率 (みかけの弾性率) E^* を Lindsey の式¹⁾ を発展させて下式のように導いた (付録参照).

$$\frac{E^*}{E} = \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} - \frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \gamma \quad (1)$$

ただし

$$\gamma = \frac{4}{3} \frac{1}{(r_o^2 - r_i^2)} \{ A \{ r_o I_0(r_o \sqrt{M}) - r_i I_1(r_i \sqrt{M}) \} + B \{ r_o K_1(r_o \sqrt{M}) - r_i K_1(r_i \sqrt{M}) \} \} \quad (2)$$

$$A = \frac{\gamma_0(\gamma_4 - \gamma_2)}{\gamma_1\gamma_4 - \gamma_2\gamma_3}, \quad B = \frac{\gamma_0(\gamma_3 - \gamma_1)}{\gamma_1\gamma_4 - \gamma_2\gamma_3}, \quad M = \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \frac{1}{h^2} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} r_o &= \frac{3}{2} \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \\ \gamma_1 &= \alpha_0 I_0(r_o \sqrt{M}) - \beta_0 I_1(r_o \sqrt{M}) \\ \gamma_2 &= \alpha_0 K_0(r_o \sqrt{M}) + \beta_0 K_1(r_o \sqrt{M}) \\ \gamma_3 &= \alpha_0 I_0(r_i \sqrt{M}) - \beta_1 I_1(r_i \sqrt{M}) \\ \gamma_4 &= \alpha_0 K_0(r_i \sqrt{M}) + \beta_1 K_1(r_i \sqrt{M}) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{(1+\nu)} \sqrt{\frac{3}{2} \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)}} \cdot \frac{E}{h} \quad (5)$$

$$\beta_0 = \frac{E}{r_o(1+\nu)}, \quad \beta_1 = \frac{E}{r_i(1+\nu)} \quad (6)$$

式(1)で $h \rightarrow 0$ の場合には E^*/E は右辺第1項のみに

Fig. 2 Relationship between apparent axial modulus of elasticity E^* and thickness of adhesive layer $2h$, obtained by theoretical calculation

等しくなる. すなわち右辺第1項は接着剤層が三軸応力場になっていることを示す. また各軸方向の応力成分は次のようになる (付録参照).

$$\sigma_{rr} = \lambda \left\{ -(1-\nu) \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right) g'(r) - \nu \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right) \frac{g(r)}{r} + \nu \frac{\epsilon}{h} \right\} \quad (7)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda \left\{ -(1-\nu) \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right) \frac{g(r)}{r} - \nu \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right) g'(r) + \nu \frac{\epsilon}{h} \right\} \quad (8)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda \left\{ -\nu \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right) g'(r) - \nu \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right) \frac{g(r)}{r} + (1-\nu) \frac{\epsilon}{h} \right\} \quad (9)$$

$$\sigma_{rz} = 2\mu \frac{z}{h^2} g(r) \quad (10)$$

ただし

$$\lambda = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{1-2\nu}{2} \lambda$$

$$g(r) = A I_1(r \sqrt{M}) + B K_1(r \sqrt{M}), \quad g'(r) = \frac{\partial g(r)}{\partial r} \quad (11)$$

3. 計算結果

図2は式(1)~(6)において $r_o = 12 \text{ mm}$, $r_i = 4 \text{ mm}$ としポアソン比 ν をパラメータとして, 接着剤の厚み $2h$ を変えた場合の E^*/E を計算した結果である. 一般に接着継手を形成する接着剤の厚みは約 1 mm 以下である. 鉄を含め金属のポアソン比が $0.3 \sim 0.4$ であるのに対し, プラスチックのポアソン比はそれ以上 0.5 に近い値をもつものが多い. したがって接着継手は, 接着剤固有の縦弾性率 E に比較してかなり大きな継手軸方向弾性率 E^*

Fig. 3 Deformation of adhesive layer in r direction をもつことになる。

$2h/r_0$ が十分大きな状態をみてみると、 ν の値に関係なく E^* は E に等しくなることがわかる。逆に $2h/r_0$ が十分小さいと ($2h/r_0 < 0.01$) 三軸応力場 ($e_{rr} = e_{\theta\theta} = 0$) における E^* に等しくなる。これは式 (1) の右辺の第 1 項のみが有効な状態になるからである。

接着剤層に対し z 方向へ ε の伸びを与えたとき、接着剤層の r 方向の変形がどのようなになるかを調べた結果を図 3 に示す。 h/r_0 が小さいときの変形は内径端、外径端で対称となる。 h/r_0 が $2/3 \sim 1$ と大きい場合には、変形量は小さいため図では明りょうではないが、非対称で接着剤層中心線 $r/r_0 = 2/3$ に対し外径端では h/r_0 が小さい場合と同様に内側に、内径端では逆に外側に彎曲する。この現象は h/r_0 が大きくなると接着剤の変形が被着体の拘束からぬけて、影響を受けないようになることを示している。ただし $h/r_0 = 2/3 \sim 1$ の値は接着継手では非現実的であり、このような現象は起こらない。

式 (7)~(11) を使って最大、最小主応力 σ_1, σ_2 を計算し、 r 方向における最大せん断応力 $(\sigma_{rz})_{\max}$ の分布を $(\sigma_{rz})_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$ として求め、接着剤層の厚みとポアソン比をパラメータにとって示したものが図 4 と図 5 である。図中の σ_0 は平均負荷応力で $\sigma_0 = E^* \varepsilon / h$ を意味する。実線は被着体と接着剤層との界面 ($z/h = 1$) における $(\sigma_{rz})_{\max}$ であり、点線は接着剤層の中間線 ($z/h = 0$) における $(\sigma_{rz})_{\max}$ を示す。被着体と接着剤層との界面には常に大きな $(\sigma_{rz})_{\max}$ が存在し、特に接着剤層両端部 ($r/r_0 = 2/6, 6/6$) に最大の応力集中がある。接着剤層の厚み変化に対する $(\sigma_{rz})_{\max}$ の分布をみると、厚みの大きいほど $(\sigma_{rz})_{\max}$ が増加する傾向にある。もし突き合わせ接着継手の破壊基準が、最大せん断応力によって設定されうると仮定すれば、この結果は接着剤層の厚み増加が継手強度の低下をもたらすということの意味する。ただし図では、継手内径端 $r/r_0 = 2/6$ の近傍で、 $z/h = 1$ の実線が $h/r_0 = 1/3$ と $1/6$ で逆転している。これは

Fig. 4 Distribution of maximum shear stress in adhesive layer

Fig. 5 Distribution of maximum shear stress in adhesive layer

図 3 で記述したように接着剤層の変形が h/r_0 が小さい場合の変形から転移するためであると考えられる。

ポアソン比の変化に対する $(\sigma_{rz})_{\max}$ の分布について検討すると、応力集中部である ($z/h = 1, r/r_0 = 2/6$), ($z/h = 1, r/r_0 = 6/6$) ではポアソン比による $(\sigma_{rz})_{\max}$ の差はない。なお最大主応力の分布についてもほぼ同様の結果が得られた。

4. 突き合わせ接着継手の引張試験と考察

4.1 実験の条件と方法

試験片は SCM 3 の中空円筒形 ($r_o = 12$ mm, $r_i = 4$ mm, 接着面積 402 mm²) のものと、これと同じ外径寸法で中空円筒形のものでエポキシ・ポリアミド系接着剤 (アラルダイト A 剤 AW 106, B 剤 HV 953 U) によって突き合わせ接着し作成した。なお接着剤の重量混合比は A 剤 10, B 剤 8 の場合と、A 剤 10, B 剤 6 の 2 例とし

Fig. 6 Measurement method of load and elongation

Fig. 7 Fracture surface of adhesive joint

た。2例にした理由は、理論解析の適用範囲をさぐる意味から継手が、① 塑性的変形を伴う場合、② 弾性的のみ変形する場合について検討するためである。ただし②の場合のみ接着剤混合後真空脱泡処理を行った。

接着に先がけ、被着体は研削により $R_{max}=2.4 \pm 0.1 \mu\text{m}$ に仕上げ、アセトンによる 10 min 間の超音波洗浄を行った。試験片の硬化条件は $73 \sim 75^\circ\text{C}$, 90 min である。試験片の接着剤層厚みのばらつき誤差は 10% 以内である。

引張試験は図 6 の方式に従って、引張速度 0.1 mm/min でロードセルにより荷重を、試験片内に設置された渦電流型ギャップセンサで伸びを測定した。ただしこの伸び測定法では接着剤層のみならず被着体の伸びも同時に測定されるため、解析の際に被着体の伸びを削除した。

4.2 実験結果および理論解析との比較

4.2.1 継手が塑性的変形を伴う場合

試験片破断面の顕微鏡による拡大写真 (20 倍) を図 7 に示す。接着剤層 ($2h=153 \mu\text{m}$) の破断面からわかるように、層にはかなりの気泡が存在し、欠陥部を形成している。破壊形式は被着体と接着剤層との間の破壊である界面破壊と、接着剤層内部の破壊である凝集破壊が混在

Fig. 8 Relation between tensile load and elongation at tensile test of adhesive bonded butt joint

Fig. 9 Variation of tensile strength of adhesive bonded butt joint along with the changes of thickness of adhesive layer

している。界面破壊だと思われるところでも、3 000 倍の走査型顕微鏡で観察したところ、被着体表面凹部に接着剤が存在し、完全な界面破壊でないことを確認した。また凝集破壊でも、接着剤層の中間部で破壊するのでなく、接着剤層の極く薄い層が剥離したものが被着体に付着している。

引張試験によって得られた伸び-荷重曲線を図 8 に示す。厚み $100 \mu\text{m}$ 以下では接着剤の伸びは弾性的挙動をするが、厚みがこれ以上になると非線形になり塑性的変形を伴う。この図から接着剤層の厚みに対する引張強さについて整理すると、図 9 となる。引張強さは層厚の増加につれて対数関数的に減少する。これは前節で得た「層厚が増加すれば最大せん断応力が増加する」という結果を裏付けるものである。また一般的に欠陥が層厚の増加につれて対数関数的に増加するという金丸の指摘とも一致し、欠陥の分布の状態が継手強度に重要にかかわってくる。

図 8 から接着剤層の厚みと破断点における伸びの関係をみると、厚み $100 \mu\text{m}$ 以下ではほぼ伸びは一定である

Fig. 10 Strain of adhesive layer when the joint fractured

が、100 μm 以上では急伸している。しかし、これを接着剤層の厚みと破断点におけるひずみとの関係に直すと、図 10 に示すように傾向が逆になる。接着剤層の厚み 50 μm 以上では、ひずみが 5~14% ではほぼ一定に対し、厚み 10 μm 以下ではひずみは 90~160% と急増している。ただし 10 μm 以下の領域では厚みが極小のため伸びが小さく、測定誤差も比較的に大きくなるものと考えられる。

層厚 50 μm 以上では、接着剤層に一定量のひずみが生じた場合に接着破壊が起きることがわかる。この場合の引張強さは、一定量のひずみを生ぜしめるための接着剤層に作用する負荷であり、層厚の増加につれて対数関数的に減少するものと考えられる。理論解析によれば、引張力が同じでも層厚の増加につれて最大せん断応力が増加するのであるから、層厚の増加につれて接着剤層に作用する破壊に要する負荷すなわち引張力は小さくなる。

応力-ひずみ曲線が非線形なため E^* を計算結果と比較することは無理であるが、参考のために図 8 の原点における E^* を算出し、厚みに対する E^*/E として示したのが図 11 の○印である。曲線はポアソン比 ν をパラメータとした理論計算結果である。ただし、 ν はダンペル状試験片の試験から約 0.45 を得た。 E はこの試験でも非線形であるため求められず、継手の引張試験での接着厚みの最大のものの E^* を用いた。試験結果○印は $\nu=0.45$ の曲線近傍に集まっているものの、相当の数の点がこの曲線から離散している。特にごく薄い接着層の領域では理論解析とは合わない。

4.2.2 継手が弾性的にのみ変形する場合

図 12 は接着剤の A 剤と B 剤の混合比が 10 : 6 の場合の試験片を試験した結果で、伸びと引張荷重との関係を示す。図の関係はいかなる接着剤層厚でもほぼ線形であ

Fig. 11 Relationship between thickness of adhesive layer and apparent axial modulus of joint

Fig. 12 Relationship between tensile load and elongation at tensile test of adhesive bonded butt joint

Fig. 13 Variation of tensile strength of adhesive bonded butt joint along with the changes of thickness of adhesive layer

り、理論解析結果との対比が可能であることを示している。図から接着剤層厚と引張強さとの関係を読み取り、整理し直すと、図 13 になる。前記 4.2.1 項の場合と同様

Fig. 14 Relationship between apparent axial modulus of elasticity E^* and thickness of adhesive layer $2h$
Curves present theoretical calculation

にこの場合も、接着剤層の厚みの減少に対し、引張強さは対数関数的に増加する。増加原因についても前記 4.2.1 項のとおりに推定できる。

図 14 に図 12 から継手軸方向弾性率 E^* を読み取り、接着剤層の厚み $2h/r_0$ に対する E^*/E として表示したものを○印で、理論解析から得られた結果を曲線で示す。 E および ν の値はダンベル状試験片の引張試験から、それぞれ 920 MPa と 0.45 の値を得た。ただしポアソン比についてはばらつきが大きく 0.43~0.5 の測定値の平均値である。

実験値はかなり離散的であるが、比較的に厚みが大きい領域で理論値とほぼ一致し、ポアソン比 $\nu=0.455\sim 0.485$ の範囲に集まっている。2 液混合形接着剤では非定常な気泡の混入が不可避的である。本試験片でも接着前に接着剤の脱泡を行っているが、微小な気泡が取りきれなかった。これがダンベル状試験片の試験でのポアソン比 ν のばらつき、継手の本試験でも継手の軸方向弾性率測定値 E^* の一定のばらつきにつながっていると思われる。また厚さが小さい領域では厚さの変化に対する E^*/E の理論値と実験値は逆の傾向にあり一致していない。その原因として厚さの不均一性、伸びが小さいことによる相対測定誤差の増加等が考えられるが、接着剤層の極く薄い領域での欠陥部の増加⁴⁾ などもあるかもしれない。

なお図中の×印は市販のポリウレタン樹脂を円筒状に加工し、本実験で使用した接着剤でこのポリウレタンを SCM3 の被着体にサンドイッチ状に接着した試験片を製作し、本実験と全く同一の条件で引張試験を行った結果

である。ポリウレタンの材質が均一のため、図のように理論曲線にかなりよく一致している。したがって均一な材質の接着剤を用意できれば、より一層理論に合致する。

5. 結 論

中空円筒型突き合わせ接着継手を対象として理論解析を行い、継手の軸方向弾性率を示す式および接着剤内部に分布する応力に関する式を導き、その特性を検討して次の結果を得た。

- (1) 継手の軸方向弾性率は接着剤単体の縦弾性率より常に大きい。
- (2) 接着剤層の厚みが小さいほど、またポアソン比が大きいほど継手の軸方向弾性率は大きくなり、厚みが極小になれば接着剤層は三軸応力状態になる。
- (3) 接着剤層の最大せん断応力は、接着剤層両端で、かつ被着体-接着剤層界面に応力集中があり、それは接着剤層が増加するにつれて大きくなる。

また 2 液混合形接着剤の混合比を変えることによって、引張試験で塑性的変形を伴う接着継手と弾性的にのみ変形する接着継手の 2 種類を、解析モデルと同一寸法形状で作成した。これを引張試験することによって次の結果を得た。2 種類の継手に共通していえることは、

- (4) 接着剤層の厚みを減少することによって引張強さが対数関数的に増加する。この結果は理論解析における結論 (3) から一部裏づけられる。
- (5) 接着剤層が比較的に厚いと、継手のひずみが一定に達したとき継手は破壊する。

塑性的変形を伴う継手では、

- (6) 継手の軸方向弾性率の実験値は一部理論値と合致するものの総体的にずれる。

弾性的にのみ変形する継手では、

- (7) 継手の軸方向弾性率の実験値は離散的であるが、比較的に接着剤の厚みが大きい領域で理論値の傾向とほぼ一致する。ただし厚みが小さい領域では実験値と理論値は逆の傾向になる。

おわりに本研究は通産省大型技術開発研究「超高性能レーザー応用複合生産システム」の一環として行われたものであり、御支援を賜った機械技術研究所次長木村誠博士、同生産工学部長尾崎省太郎博士、同機械加工課長村田良司博士と同生産システム課長大野幸彦博士に感謝の意を表します。また実験に協力していただいた元東京農工大学学生菊池悟、植竹貞雄の両君に感謝します。

〔付 録〕 本文関係式の導出

本文図 1 の解析モデルに対し、応力-ひずみ関係およびひずみ成分を円柱座標で表せば、

$$e_{rr}E = \sigma_{rr} - \nu(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}) \quad (\text{a-1})$$

$$e_{\theta\theta}E = \sigma_{\theta\theta} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{rr}) \quad (\text{a-2})$$

$$e_{zz}E = \sigma_{zz} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \quad (\text{a-3})$$

$$e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad e_{\theta\theta} = \frac{u}{r}, \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad e_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \quad (\text{a-4})$$

被着体を剛体であると仮定し、境界条件を考慮して u , w を次式のように置く.

$$u = -\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right)g(r) \quad (\text{a-5})$$

$$w = \varepsilon \frac{z}{h} \quad (\text{a-6})$$

ε は加えられる軸方向伸びである. 式 (a-1)~(a-6) から応力 σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz} , σ_{rz} の関係式である本文の式 (7)~(11) が得られる. z 方向に平均した応力成分は、これら本文の式 (7)~(11) から

$$\bar{\sigma}_{rr} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_{rr} dz = \lambda' \left(\frac{\varepsilon}{h} - \frac{2}{3} g'(r) - \frac{2}{3} \frac{g(r)}{r} \right) - \frac{4}{3} \mu g'(r) \quad (\text{a-7})$$

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_{\theta\theta} dz = \lambda' \left(\frac{\varepsilon}{h} - \frac{2}{3} g'(r) - \frac{2}{3} \frac{g(r)}{r} \right) - \frac{4}{3} \mu \frac{g(r)}{r} \quad (\text{a-8})$$

$$\bar{\sigma}_{zz} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_{zz} dz = \lambda' \left(\frac{\varepsilon}{h} - \frac{2}{3} g'(r) - \frac{2}{3} \frac{g(r)}{r} \right) + 2\mu \frac{\varepsilon}{h} \quad (\text{a-9})$$

$$\bar{\sigma}_{rz} = 2\mu \frac{z}{h^2} g(r) \quad (\text{a-10})$$

ただし、 $\mu = E/2(1+\nu)$, $\lambda' = \nu E/(1-2\nu)(1+\nu)$ である. 一方、 z 軸方向に平均した半径方向の釣合い方程式は、

$$\frac{1}{2h} \int_{-h}^h \left(\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} \right) dz = 0 \quad (\text{a-11})$$

式 (a-7)~(a-10) と本文の式 (7)~(10) を使って式 (a-11)

を整理すると、

$$g''(r) + \frac{1}{r} g'(r) - \left(M + \frac{1}{r^2} \right) g(r) = 0 \quad (\text{a-12})$$

式 (a-12) は変位関数 $g(r)$ に関する変形ベッセル方程式である. Lindsey は以上の過程を経て、Triaxial pocker-chin test の $r_i = 0$ の場合である (a-12) の解

$$g(r) = A I_1(r/\bar{M}) \quad (\text{a-13})$$

を得ている. ただし A は定数.

本研究では $r_i \neq 0$ の場合であるから (a-12) の解を

$$g(r) = A I_1(r/\bar{M}) + B K_1(r/\bar{M}) \quad (\text{a-14})$$

とおく. ただし B は定数. A, B を決める境界条件は

$$\bar{\sigma}_{rr}(r_o) = 0, \quad \bar{\sigma}_{rr}(r_i) = 0 \quad (\text{a-15})$$

式 (a-7) と (a-14) を使って (a-15) の両式を整理して定数 A, B が本文の式 (3) のように決定される.

継手の軸方向弾性率 E^* は

$$\frac{E^*}{E} = \frac{1}{E} \frac{2\pi \int_{r_i}^{r_o} \bar{\sigma}_{zz} dr}{\pi (r_o^2 - r_i^2)} \frac{\varepsilon}{h} \quad (\text{a-16})$$

と定義できるので、式 (a-9) を使って計算を実行すれば本文の式 (1) が導出される.

参 考 文 献

- 1) G. H. Lindsey: Triaxial Fracture Studies, J. Appl. Phys., **38**, 12, (1967) 4843.
- 2) 杉林俊雄, 池上皓三, 白鳥英亮: 円筒突合せ試験片による接着強度試験法 (第1報, 接着層の応力解析), 日本接着協会誌, **17**, 2 (1981) 50.
- 3) 杉林俊雄, 池上皓三, 白鳥英亮: 円筒突合せ試験片による接着強度試験法 (第2報, 試験法と試験寸法の提案), 日本接着協会誌, **17**, 4 (1981) 136.
- 4) 金丸 競: 接着ハンドブック, 日刊工業新聞社 (1971) 141.