任意分布点群による自由曲面の一創成法*

塩 谷 景 一** 牧之内 三郎*** 山 縣 敬 一***

A Method of Generating a Curved Surface from Arbitrarily Distributed Data Points

Keiichi SHIOTANI, Saburou MAKINOUCHI
and Keiichi YAMAGATA

This paper describes a method of generating a curved surface by using the data at the arbitrarily distributed points. In this method, the heights of the surface at the rectangular grid points are firstly estimated from those data at the arbitrarily distributed points, and then a curved surface is generated from the estimated heights at the grid points by using Bézier, B-spline or Coons rectangular

patches. For assuring the validity of the method in this paper a curved surface is generated by using the data at the arbitrarily distributed points of an analytically well-known surface, and the error of the generated surface is analyzed. Since arbitrarily distributed data points can be handled for generating a curved surface, it is possible to collect more data from the surface of a clay model with higher curvature.

Key words: curved surface, arbitrarily distributed data points, grid points, clay model, CAD, sculptured surface.

1. は じ め に

家電製品, 自動車, 航空機などの外形表面は, 一般に自由曲面で構成されている. 自由曲面の CAD システムの開発は, 設計の初期段階において, クレイモデルなどの実体モデルを用いずに進められている. しかし, 現在ではクレイモデルなど実体モデルを作製して, 自由曲面をもつ製品の形状を決定する場合が多い. すなわち, 三次元測定機を用いて測定したモデル表面上の各点の座標値を CAD システムに入力している.

Coons, Bézier などの曲面式を用いて自由曲面を創成する場合には, 与えられた各点の xy 平面への投影点は格子状に並んでいなければならない. すなわち, 四辺形パッチが自由曲面を創成するための基本要素である (図 1(a) 参照). したがって, 図 1(b) に示すように, 与えられた各点の xy 平面への投影点が xy 平面上で任意に分布する (以下, 簡単に「任意に分布する点」と呼ぶ) 場合にはこれら各点の座標値をそのまま用いて Coons などの曲面式を直ちに決定することはできない.

Barnhill ら¹⁾²⁾ は, 三角形パッチを曲面の基本要素とする手法を提案しているが, 本研究では任意に分布した点群を近似的に等価な格子状の点群におきかえて, 曲面を創成する一手法を提案する.

2. 任意に分布した点群から格子状の点群を求める手法

本論文で提案する曲面創成法は次の 2 段階で構成される.

- (1) 任意に分布した点群を用いて, 近似的に等価な格子状の点群を求める.
- (2) この格子状の点群のデータを用い, 一般の曲面理論式に基づいて, 四辺形パッチ内部を補間する.

段階 (2) では, Coons, Bézier, B-spline などの理論式を使用する. 段階 (1) の手法については, 5×5 の 25 格子点群を求める計算例を用いながら以下に説明する.

まず, 任意に分布した点群を内部に含む直方体を考える. $x-y-z$ の座標系は, 直方体の稜線方向に設定する. 次に, x —一定の平面 (yz 平面に平行な平面), y —一定の平面 (zx 平面に平行な平面) で直方体を適当に分割する (図 2(a) では, x —一定の平面で 4 分割, y —一定の平面で 4 分割の計 16 分割である). すなわち, この直方体を BXi ブロックと BYj ブロック ($i, j=1, 2, \dots$) の領域に分割する. この直方体を xy 平面に投影すると図 2(b) のような格子状パターンが得られる. ここで, x —一定, y —一定の平面で囲まれた小領域をアドレスとよぶことにし, $ADij$ とアドレスの識別名をつける. 図 2(b) の例では, BXi ブロックは $i=1 \sim 4$, BYj ブロックも $j=1 \sim 4$, アドレスの数は 16 である. 格子状に並んだ点群を次の手順で求める.

個々のブロック内において, 任意に分布する点群を通過する空間曲線をそれぞれ求める. 例えば, 図 3 に示す

* 原稿受付 昭和 57 年 5 月 21 日. 精機学会 昭和 55 年度関西地方定期学術講演会 (昭和 55 年 7 月 11 日) にて発表.

** 正 会 員 三菱電機 (株) (尼崎市塚口本町 8-1-5)

*** 正 会 員 大阪大学工学部 (吹田市山田丘 2-1)

Fig. 1 Distribution of points and rectangular patches

ように, BX_i ブロックが4個, BY_j ブロックも4個の場合, y 方向, x 方向ともに4本ずつの空間曲線を求める.

この結果, BX_i ブロック内に創成された空間曲線は BY_j ブロックの境界面(すなわち $y = \text{一定の平面}$)と交わり, BY_j ブロック内に創成された空間曲線は BX_i ブロックの境界面($x = \text{一定の平面}$)と交わる(図3における黒丸は交点, 点線は他方向ブロックの境界面を表している).

次に, 各ブロックの境界面上に得られた交点(図3の黒丸)を補間点とする補間曲線を個々の境界面上で求める. すなわち, 図2(a)の直方体を分割する平面上に曲線が得られたが, これらの曲線を創成したい自由曲面の近似的な断面曲線と見なすことにする.

この結果, 図4に示すように断面曲線と線分 L (図2における $x = \text{一定の平面}$ と $y = \text{一定の平面}$ との交線)との交点が求められる. 実際には, $x = \text{一定の平面}$ 上の断面曲線と線分 L との交点と, $y = \text{一定の平面}$ 上の断面曲線と線分 L との交点とは, 図4(b)の点A, Bに示すように, 一般には一致しない. したがって, 点A, Bの座標値の平均をとり, 図4(a)のように交点を求める. この点は, 近似的ではあるが, 格子状に並ぶ曲面上の点として得られたものである.

3. 本手法の検討

まず, 絶対誤差を次の手順で求める.

- (1) xy 平面上に任意に分布する点群を, 乱数を用いて定める. ただし, ここでは $0 \leq x, y \leq 10$ とする. 表1は, テストに用いた F1~F4 の4種類の曲面(関数 $z = f(x, y)$)を示しているが, これらの式によって各点の z 座標値をそれぞれ求める. 図5は, テストに用いた4つの曲面を図示している.
- (2) (1)の手順で得られた任意分布の点群から, 格子状に並ぶ点群の座標値を, 前章に述べた方法で計算す

Fig. 2 Summary of algorithm

Fig. 3 Summary of algorithm

○; Arbitrarily distributed data point, ●; Intersection of the other block boundary surface and the curve

Fig. 4 Calculation of grid point coordinate

る.

- (3) 各格子点における正しい z 座標値は, 表1の曲面の式について, それぞれ計算する.

Table 1 Curved surfaces used for testing

F 1	$z = \exp\{-(x-5)^2 + (y-5)^2\}$
F 2	$z = \exp\{-(x-5)^2 + (y-5)^2/4\}$
F 3	$z = \tanh(x+y-11)$
F 4	$z = 10 \exp\{-(x-5)^2 + (y-5)^2/2\}$

(4) (3)の手順で得られた格子点の z 座標値と, (2)の手順で推定された格子点の z 座標値との差の絶対値を求める.

(5) 手順(4)を, すべての格子点に対して行い, 得られた値の平均値を求める. 以下これを絶対誤差と呼ぶ.

次に, 本手法による計算結果を検討するため,

(1) 格子点の数を一定にして, 任意分布の点の個数を変化させ, 絶対誤差の変化を調べる.

(2) 任意分布の点の個数を一定にして, 格子点の個数を変化させ, 絶対誤差の変化を調べる.

3.1 空間曲線の創成

2章で述べたように, 点群を通過する空間曲線を創成する(すなわち, 点群を補間する)ことが, 本手法の中心となっている. 以下の数値例では, 線形補間, B-spline, Fergusonの3式を用いて点群を補間し, 絶対誤差を比較する.

以下に説明する空間曲線 $c_i(t)$ は, 式(1)に示すものである.

$$c_i(t) = [x_i(t), y_i(t), z_i(t)] \quad i=0, 1, 2, \dots \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (1)$$

線形補間の式

隣り合う2個の点を表す位置ベクトルを a_i, a_{i+1} とする. このとき, a_i と a_{i+1} の間の線形補間式は次式で表される.

$$c_i(t) = a_{i+1} \cdot t + a_i \cdot (1-t) \quad i=0, 1, 2, \dots \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (2)$$

$c^{[2]}$ 級 B-spline の式³⁾⁴⁾

形状制御多角形(Polygon)の頂点を表す位置ベクトルを V_i とすると,

$$c_i(t) = V_i \cdot \phi_0 + V_{i+1} \cdot \phi_1 + V_{i+2} \cdot \phi_2 + V_{i+3} \cdot \phi_3 \quad i=0, 1, 2, \dots \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (3)$$

$$\phi_0 = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{6}$$

$$\phi_1 = \frac{1}{2}t^3 - t^2 + \frac{2}{3}$$

$$\phi_2 = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{6}$$

(a) F1

(b) F2

(c) F3

(d) F4

Fig. 5 Curved surfaces used for testing

$$\phi_3 = \frac{1}{6}t^3$$

V_i は, 補間する点群の位置ベクトルを a_i とすると, 次式で計算される.

$$BV = A$$

ここで, B, V, A はマトリクスである.

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ & & & 1 & 5 \end{pmatrix}; \quad V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Ferguson の式⁵⁾

隣り合う2個の点を表す位置ベクトルを a_i, a_{i+1} , これらの2点における接線ベクトルをそれぞれ T_i, T_{i+1} とくと,

$$c_i(t) = a_i \cdot \phi_0 + a_{i+1} \cdot \phi_1 + T_i \cdot \phi_2 + T_{i+1} \cdot \phi_3 \quad i=0, 1, 2, \dots \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (4)$$

$$\phi_0 = 2t^3 - 3t^2 + 1$$

$$\phi_1 = -2t^3 + 3t^2$$

$$\phi_2 = t^3 - 2t^2 + t$$

$$\phi_3 = t^3 - t$$

となる.

3.2 数値例

数値例1 (曲面の種類*を変化させた場合)

図6に曲面の種類と絶対誤差の関係を示す. F1, F2などは, 表1に示したように, 曲面の種類を表す記号である. 任意に分布した点の個数を300, 格子点の個数を

* ここでいう「曲面の種類」は, 「創成したい曲面」のことである. 四辺形パッチに対する補間式 Coons, B-spline などの曲面式を示すのではない.

Fig. 6 Kind of curved surfaces and absolute errors

13×13とし、任意に分布する300個の点群を5種類用意して、各々の点群から絶対誤差を求めた。図6の縦軸は、求めた5種類の絶対誤差の平均値を示している。

Fergusonの式を補間式に用いた場合、もっとも絶対誤差が小さいことが図6から分かる。図5に示すように、F1はなだらかな曲面で、F4はかなり急激な変化を示す曲面である。そのため、F1は線形補間式を用いても、Fergusonの式を補間式として用いた場合と比較して、誤差の増大は少ない。F4では誤差の増大がかなり見られる。

数値例2 (格子点の個数を一定にした場合)

図2に示したアドレス数で144、ブロック数で $i=12$ 、 $j=12$ である格子点の個数を一定数13×13にした時の、任意に分布した点の個数と絶対誤差の関係を図7に示す。また、任意分布の点の個数と、実行に要した計算時間の関係を図8に示す。使用した計算機は、13 MIPSの処理能力を持つ。各データは、5種類の分布点群を用いて、5回計算を行った平均値である。テストに用いた曲面は表1のF3である。

格子点の個数を一定にした場合には、任意分布の点の個数がある値以上になると、絶対誤差の減少は期待できないことが図7から分かる。格子点の個数を13×13とした本実例では、任意分布の点の個数を500以上に増加しても絶対誤差の値は、ほぼ一定である。

計算時間は、線形補間の式を用いた場合に最も短く、任意に分布した点の個数に比例することが図8から明らかである。

数値例3 (任意分布の点の個数を一定にした場合)

任意分布の点の個数を一定 (=100個, 200個, 300個, ..., 600個) にした時の、格子点の個数 (アドレス数, ブロック数) と絶対誤差の関係を図9に示す。各データは、ほかの数値例と同様に、5種類の任意分布の点群を用いて絶対誤差を求め、それらの平均をとったものである。テストに用いた曲面は表1のF3であり、補間式として

Fig. 7 Number of arbitrarily distributed data points and absolute errors

Fig. 8 Number of arbitrarily distributed data points and CPU time

は Ferguson の式を用いた。

図9より、任意に分布した点の個数が一定の場合、格子点の個数が少なくても多くても、絶対誤差の増加が見られる。格子点の個数が少ない場合に誤差が増大することは、一般に考えられることである。格子点の個数が多い場合には、推定したい格子点の個数に対して、データとして与えられる分布点の個数が少なすぎるために、絶対誤差が増加するものと考えられる。

4. おわりに

任意に分布した点群を近似的に等価な格子状の点群におきかえ、曲面を創成する一手法を示し、次の結果が得られた。

- (1) 本手法は、点群を補間する空間曲線を創成し、平面あるいは線分との交点を計算するプロセスの繰返しである。そのため、13 MIPSの計算機で、600個の任意分布点から13×13個の格子点を推定するための計算時間は、4~7sである。
- (2) 本手法のプログラムはFORTRANで作成されて

Fig. 9 Number of grid points and absolute errors

おり, 大きさは 34 KW である。計算手法の簡便さも考慮に入れると, ミニコンピュータでも本手法を使用することが可能である。

- (3) 点群を補間する曲線式として, 種々の理論式を用いることが可能である。したがって, 補間使用する式を変えることによって, 許容される誤差を満足し, かつできるだけ短い計算時間で, 任意に分布した点群から近似的に等価な格子状の点群を求めることができる。

文 献

- 1) R.E. Barnhill, G. Birkhoff & W. J. Gordon: Smooth

Interpolation in Triangles, J. Approx. Theory, 8, (1973) 114.

- 2) R.E. Barnhill: Smooth Interpolation over Triangles, Computer Aided Geometric Design, Academic Press, New York, N.Y., (1974) 45.
 3) R. F. Riesenfeld: Applications of B-spline Approximation to Geometric Problems of Computer Aided Design, Available at Univ. of Utah, VTEC-CSc-73-126.
 4) W. J. Gordon & R. F. Riesenfeld: B-spline Curves and Surfaces, Computer Aided Geometric Design, Academic Press, New York, N.Y., (1974) 95.
 5) P.E. Bézier: Numerical Control - Mathematics and Applications, John Wiley & Sons, Inc., London, (1972).