最適化技法による円筒度の最小領域評価*

塚田 忠夫** 金田 徹***

Minimum Zone Evaluation of Cylindricity by Optimization Techniques

Tadao TSUKADA and Tohru KANADA

This report represents optimization techniques to evaluate the cylindricity according to ISO and JIS. Such the direct search methods as improved simplex method and Powell's method were applied and the algorithms were studied. Consequently,

it was made clear that the new algorithm for improved simplex method, which was developed in this research, was the most effective from the view point of the calculation time and the accuracy of cylindricity.

Key words: minimum zone, cylindricity, optimization, simplex method, Powell's method, algorithm.

1. 緒 言

真円度・円筒度は、ISO¹⁾、JIS²⁾等で定義され、国際間の整合性をはかるようになってきているが、その検証についてはまだ十分とはいえない。このような状況の中で、著者らは、真円度の評価が新しい工夫をしたシンプレックス法により効率よく行えることをすでに明らかにしてきた³⁾。一方、図1(a)に示すように、円筒度は上記規格で、円筒部分を二つの同軸の幾何学的円筒ではさんだとき、両円筒面の間隔が最小となる場合の両円筒面の半径差、すなわち最小領域法による値と定義されている。これを検証する方法として、3点法のVブロックと指針測微器を用いる方法⁴⁾、半径法の最小自乗法による近似解法およびミニマックス法⁵⁾等が試みられている。これらは、測定誤差が大きくなったり、評価値が過大になったりするおそれがあり、また最後の方法は、電子計算機処理が前提であるので、アルゴリズムの良し悪しにより計算時間が長くなることがある。

図1(a)において、円筒面に任意に内外接する同軸円筒の半径差 f を目的関数とすると、この目的関数を最小にするように軸を決定すれば円筒度が得られる。一般に、円筒形状を忠実に表す関数を得ることは難しいため、本研究は、円筒度を得る問題を最適化問題としてとらえ、目的関数の微係数を用いない直接探索法の適用につい

て、電子計算機の利用を前提として検討したものである。試みた直接探索法は、Nelder-Meadのシンプレックス法⁶⁾を著者が真円度解析用に改良した改良シンプレックス法³⁾、およびPowellの方法⁷⁾である。ここでは、これらの方法の円筒度解析への適用方法と効率のよいアルゴリズムについて報告し、さらに、最小自乗法による円筒度と最小領域法円筒度との関連についても検討する。なお、本研究では、目的関数の連続かつ微分可能性および単峰性は満足されているものとした。

2. 試料および測定方法

本研究で使用した円筒試料は、表1に示すような諸元で総数206本である。円筒形状の測定は、半径法測定で回転テーブル形円筒形状測定機を用い⁸⁾、円筒表面を逐次断面状およびスパイラル状に離散量として測定したデータを用いた⁹⁾(次ページ)。また、検出器は、旋削試料に対

Fig.1 Correction of measured data and definition of objective function

* 原稿受付 昭和58年4月8日、昭和58年度精機学会春季大会学術講演会(昭和58年3月28日)にて発表。

** 正会員 東京工業大学工学部(東京都目黒区大岡山2-12-1)

*** 学生会員 東京工業大学工学部

Table 1 Cylindrical specimens

Machining	Material	Number of specimens	Diameter mm	Length mm	Cylindricity μm
Turning	C 3601 BD	88	40	40	5-20
Precision turning		9	60	40	0.3-3
Contour milling by NC		5	30, 60	40	10-20
Grinding	SCM 3	104	30, 45, 60	100	0.2-10

して工具送りマークの影響を除くために静電容量形非接触変位計¹⁰⁾ (センサ径 0.5 mm および 1.7 mm) を用い、その他の試料に対しては球状スタイラス (先端直径 3.17 mm) の電気マイクロメータを用いた。

検出器からの信号は、ローパスフィルタ (カットオフ値 7 Hz, 1 周当たり 100 山成分の波長に相当) を通した後、円筒断面形状をできる限り忠実に表せるよう、試料 1 周当たり等分に 2000 個のデジタルデータに変換した³⁾¹¹⁾。一方、円筒の軸方向サンプリング間隔は 0.25~1.5 mm とした³⁾¹¹⁾。

3. 測定データの補正とデータ量の縮小

測定データには、回転テーブル上の円筒試料の取付誤差 (円筒軸の偏心と倒れ) と、検出器が軸方向移動をするための案内板の倒れが含まれる。これらの誤差を補正するために、最初の段階で測定データに対し、真円筒を最小自乗法であてはめることにした*。

最適化問題における目的関数は、図 1 (a) のように、内外接する同軸円筒の半径差 f で与えられ、円筒度は軸の姿勢を変化させて得られる f の最小値と定義できる。図 1 の記号を用いて、

$$f(a, b, c, d) = (r_{ij})_{\max} - (r_{ij})_{\min} \quad (1)$$

ここで、 i は軸方向、 j は円周方向の位置を示す。軸の姿勢を変化させたときの任意断面上では、図 1 の幾何学的関係を利用して、軸心 O に関するデータを s_{ij} 、軸心 O' に関するデータを r_{ij} として、

$$\left. \begin{aligned} r_{ij} &= s_{ij} - x_i \cdot \cos \theta_j - y_i \cdot \sin \theta_j \\ x_i &= z_i \cdot \frac{c-a}{z_N - z_1} + a, \quad y_i = z_i \cdot \frac{d-b}{z_N - z_1} + b \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

同軸円筒のうち外接円筒は、 r_{ij} の極大値が関与し、内接円筒は r_{ij} の極小値が関与することになる。したがって目的関数 f を計算するための r_{ij} は、極値をとる位置 (i, j) の組合せだけでよいことになる。一般に、 $a, b, c,$

† 測定方式の違いによるデータ間の差は、ほとんどないことが確かめられている⁹⁾。本研究は、解析手法が主体であるため、色々な種類のデータを扱うようにした。

* 本研究では、円筒試料にはテーパーがついていないものとし、文献^{8), 9)}の方法でデータを補正した。

Fig. 2 Developments and convergences of simplex

1, 2, 3; present simplex apexes, E; expanded apex (expansion step), R; reflected apex (reflection step), C1, C2; compressed apexes (compression step), Rd; reduced apexes (reduction step)

$d, r_{ij} \ll R_0 + R_i$ であるので**、極値をとる位置 (i, j) は、最小自乗法で補正した最初の段階のデータ s_{ij} で判定しても差し支えないものとする。このように、最初にデータ量を縮小 (本研究の範囲では、もとのデータ数に対して平均 1/10~1/20) し、無駄な計算時間を減らすようにした。

ここで、最初のシンプレックス (シンプレックス法という単体、三角形) の大きさを決める基準として、次式で与えられる円筒形状誤差の標準偏差を用いることにする。

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \left\{ \frac{N}{M} \sum_{j=1}^M (s_{ij} - \bar{s})^2 / (N \cdot M) \right\}^{1/2} \\ \bar{s} &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M s_{ij} / (N \cdot M) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで、 N : 円筒軸方向の測定断面数、 M : 1 断面当たりのデータ数。

4. 最適化技法の円筒度解析への応用

4.1 本研究で試みた最適化技法

試みた最適化技法は、(1) Nelder-Mead のシンプレックス法⁶⁾に基づいて真円度解析用に著者らが提案した改良シンプレックス法³⁾と、(2) Powell の方法⁷⁾である。ここでは、分かりやすくするために 2 次元空間 (2 変数) を対象として、それぞれの方法の特長を簡単に述べておく¹²⁾。一般に、目的関数が連続かつ微分可能な場合、これらの最適化技法は多次元空間に適用できる。

4.1.1 Nelder-Mead のシンプレックス法と改良シンプレックス法

前者は、図 2 において、最初に任意のシンプレックスを与えて、その頂点の位置での目的関数の値を求め、その大小に応じ、シンプレックスの鏡映・拡大・縮小・収

** R_0 は円筒半径に近い値で、データ s_{ij} は R_0 からの偏差として測定される。 R_i は最小自乗円筒をあてはめたときの R_0 からの移動距離を表す。

Fig. 3 Search technique of Powell's method

縮を行って, 探索点を順次解に近づけてゆく方法であり, 必ず解に収束してゆく性質をもっている⁶⁾。

一方, 改良シンプレックス法³⁾とは, 著者らが真円度解析用に Nelder-Mead 法を改良したものを指す。これは, 図2の鏡映・拡大・縮小の各ステップが繰返し採られるとき, 真円度特有の性質を考慮して, 解の存在しそうな方向に新しい探索点を設定し, シンプレックスを効率よく発展させてゆくものである。したがって, 本方法は一般性に欠けるが, 円筒表面の3次元形状を軸方向に正射影すれば, 円筒度は2次元空間の問題となり, 真円度と同様に得ることができる。

4.1.2 Powell の方法

Powell 法⁷⁾は, 目的関数が二次関数で近似できる場合に有効な, 次のような直接探索法である。図3のような目的関数の場合, まず探索開始点 V_0 と二つの一次独立なベクトル d_0^0, d_1^0 を用意し, d_0^0 方向に目的関数が極小になる位置を直線探索を行って求める。この探索は, 任意の3点の位置とその目的関数の関係を二次関数で近似し, 極小点の位置 V_1 を推定するが, 一般に囲込み法を利用して, 極小点の位置の推定精度を上げる¹²⁾。同様に d_1^0 方向に V_2 を決め, 次に, V_0 と V_2 を結ぶ方向 d_2^0 上で V_3 を決める。この操作を繰返し行って, $|V_{3n} - V_{3(n-1)}| (n=1, 2, \dots)$ が十分小さくなったところで解とする。

4.2 円筒度解析のためのアルゴリズム

目的関数を最小にする内外接同軸円筒の軸の姿勢は, 図1(a)のような直交座標系の場合, 軸の方向を定める2つの変数と位置を定める2つの変数の合計4変数に依存するが, これを4変数最適化問題として取り扱うことはできない。それは, 円筒表面は連続かつ微分可能であるものの, 円筒面と両端面の境界が微分不可能であるためである。したがって本研究では, 図1(a)のように両端面での軸の位置 $(a, b), (c, d)$ の二つの集合を考え, それぞれを2変数最適化問題として, 次のように取り扱う

(a) Two sets of simplex (b) Exchange of axis

Fig. 4 Simplex method for cylindricity

ことにした。

方法 [I]: 改良シンプレックス法を用い, 下記のステップを繰返し解を求める方法である。

ステップ (1): 図4(a)のように上下両端面の任意の位置に3辺の長さ $\lambda \cdot \sigma$ (λ : 係数) の初期シンプレックスを考える (この段階での円筒の軸は, 最小自乗法で得られたものを用いる)。

ステップ (2): 上端面のシンプレックスの k 番目 ($k=1, 2, 3$) の頂点の目的関数 f_k^U は, 上端面でこの点を通る軸を任意の方向に設定して得られる目的関数のうち, 最小のもので与えられる。この値は, 次のようにして得る。まず, 下端面上にシンプレックスを設定し, 各頂点の目的関数 f_n^L は, 各頂点 $n (n=1, 2, 3)$ と上端面の k 番目の点を通る軸に対して, 式(2)のデータ修正を行い, 式(1)から得る。下端面のシンプレックスを発展させ, 最小の目的関数 f_n^L を得れば, $f_k^U = f_n^L$ となる。

ステップ (3): 上端面のシンプレックスが十分な精度に収束した場合, 探索は終了し, 収束しない場合は, 上端面のシンプレックスの頂点の目的関数 $f_k^U, f_{k+1}^U, f_{k+2}^U$ の大小によって, 図2に示した操作に基づいて, 新しいシンプレックスを構成し, ステップ(2)へ行く。ここで, 収束条件は, 図4(a)の記号を用いて, 真円度の場合と同様に³⁾,

$$\text{Min}(l_k, l_{k+1}, l_{k+2}) / \text{Min}(f_k^U, f_{k+1}^U, f_{k+2}^U) \leq \epsilon_r \quad (4)$$

とする。 $\text{Min}(f_k^U, f_{k+1}^U, f_{k+2}^U)$ が小さいものに対しては, 式(4)のデューティがあがってしまい, 無意味な計算の繰返しをしてしまうおそれがあるので, 次式を用いる。

$$\text{Min}(l_k, l_{k+1}, l_{k+2}) \leq \epsilon_l \quad (5)$$

したがって, 繰返し計算は, 上の2式のうちのいずれかが満足されれば, 解が得られたものとして計算を打ち切る。

この方法は、上端面のシンプレックスの発展に伴って生ずる一つ一つの頂点の目的関数を、下端面のシンプレックスが収束するまで求めるため、計算時間が長くなるおそれがある。

方法〔II〕: 比較的計算時間の短縮が期待できる方法である。なお、シンプレックスの発展過程・収束条件は、方法〔I〕と同様とする。

ステップ(1): 図4(b)のように、上端面上に任意の点 C_s^U を設定する。本研究では、最小自乗法で得た軸の上端面上での位置を用い、この軸により得られる目的関数を f_s とする。

ステップ(2): 下端面上に初期シンプレックス(一辺の長さ $\lambda \cdot \sigma$ の正三角形)を設定し、各頂点と上端面上に設定された点 C_s^U を通る軸を考え、それぞれの軸についての目的関数からシンプレックスを發展させ、収束点 C_E^L の位置を得る。

ステップ(3): 下端面上の収束点 C_E^L を固定し、上端面でのシンプレックスの發展を、ステップ(2)と同様に行い、上端面上での収束点 C_E^U を得る。このときの目的関数を f_E とする。

ステップ(4): 下記の収束判定を行い、収束していなければ、 f_E を f_s に、 C_E^U を C_s^U にそれぞれ置き換え、ステップ(2)へ行く。収束判定条件は、図4(b)の記号を用いて、 $f_E < f_s$ および f_s の軸 $C_s^U - C_s^L$ と f_E の軸 $C_E^U - C_E^L$ との最大間隔 $\text{Max}(l^U, l^L)$ を考えた次のいずれかを満足すればよいものとする。

$$\text{Max}(l^U, l^L)/f_E \leq \varepsilon_r, \quad \text{Max}(l^U, l^L) \leq \varepsilon_l \quad (6)$$

方法〔III〕: 方法〔II〕で、改良シンプレックス法の代わりに Powell 法を用いた方法である。ただ、Powell 法では、探索精度をあげるために¹²⁾、計算の繰返し回数が多くなるおそれがある。収束条件は、図3の記号を用いて、

$$|V_{3n} - V_{3(n-1)}|/f(V_{3n}) \leq \varepsilon_r, \quad |V_{3n} - V_{3(n-1)}| \leq \varepsilon_l \\ (n=1, 2, \dots) \quad (7)$$

5. 計算結果による各方法の比較

5.1 収束条件と円筒度

5.1.1 方法〔I〕の結果

円筒度の大きさに見合った精度で評価するために、円筒度のおおよその大きさを示す式(3)の σ を基準として、探索開始のシンプレックスの三辺の長さを $\lambda \cdot \sigma$ とする。図5に、真円度を評価した際の経験から³⁾、 $\lambda=1$ を採用して解いた結果を示す。これは、式(4)の収束条件 ε_r による円筒度 f_{IS} (添字 IS: 改良シンプレックス法)への影響を示すもので、 f_0 は $\varepsilon_r=0.001$ (図5において、解として十分と考えられる範囲)として得られた円筒度であ

Fig. 5 Changes of cylindricity for converging condition ε_r in the improved simplex method (I)

Table 2 Effect of simplex unit length $\lambda \cdot \sigma$ in the method (II) for improved simplex method

λ	f_{IS}/f_0		Mean iterative calculation times
	Mean	Std. dev.	
0.5	1.009	8.00×10^{-3}	58.7
1	1.008	7.70	57.6
2	1.008	6.70	54.9
3	1.010	10.6	64.0

る。この結果から、 $\varepsilon_r=0.01$ とすれば、 f_0 に対して1%以内の精度で円筒度が求まることがわかる。また、 σ が小さい(円筒形状誤差が小さい)場合には、真円度の際の議論に従って³⁾、収束条件は式(5)の ε_l を採用し*

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= 0.01 & (f_0 \geq 0.5 \mu\text{m}) \\ \varepsilon_l &= 0.005 \mu\text{m} & (f_0 < 0.5 \mu\text{m}) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

5.1.2 方法〔II〕および方法〔III〕の結果

表2は、方法〔II〕における初期シンプレックスの辺の長さ $\lambda \cdot \sigma$ について検討した結果である。この結果から、 $\lambda=1 \sim 2$ 程度とすれば、繰返しの計算回数も少なく、 f_{IS}/f_0 のばらつきを示す標準偏差も小さくなっていることがわかる。なお、ここでいう計算回数とは、解を得るまでに計算した目的関数の数である。

図6は、方法〔II〕による円筒度 f_{IS} および方法〔III〕による円筒度 f_P と収束条件 ε_r の関係を示す。両方法とも、 f_0 に対し平均1%以内で円筒度が得られている。 $0.001 \leq \varepsilon_r \leq 0.1$ の範囲で f_{IS}/f_0 、 f_P/f_0 の変化が少ないのは、図7に示すように、目的関数が非常になだらかであるためと思われる。図6のばらつき幅等を考慮すれば、式(8)で提案した $\varepsilon_r=0.01$ は十分な収束条件であるといえる。

* 測定機の分解能等から判断する必要がある。

Fig. 6 Changes of cylindricity f_{IS} by the improved simplex method (II) and f_P by Powell's method (III) for converging condition ε_r

Fig. 7 Objective functions near the solution by fixing the lower end face point

Fig. 8 Comparison of iterative calculation times for the three algorithms

5.2 各種方法における計算回数の比較

図8は、上記3方法により円筒度を得るまでに要した

Fig. 9 Relation between least square cylindricity f_{LS} and minimum zone cylindricity f_{IS}

Fig. 10 Relation between minimum zone cylindricity f_{IS} and minimum zone roundness f_{RN}

目的関数の計算回数の比較を示す。この場合、計算時間の大部分が目的関数の計算に費やされるので、この回数は少ないほど円筒度を得るアルゴリズムは効率が良いことになる。この図から、方法〔II〕が最も効率がよく、 $\varepsilon_r=0.01$ 付近の平均計算回数は、方法〔I〕の約1/6、方法〔III〕の約1/4になっている。

6. 最小領域法円筒度、最小自乗法円筒度および最小領域法真円度

最小自乗法円筒度を f_{LS} 、本研究の方法〔II〕による最小領域法円筒度を f_{IS} とするときの f_{LS}/f_{IS} の頻度分布を図9に示す。本研究の範囲では、最小自乗法円筒度が最小領域法円筒度に対して5%および10%以上過大評価となる例は、それぞれ全体の61%および31%であり、ほとんどの例が30%以内に入っていた。

最小領域法真円度 f_{RN} は³⁾、最小領域法円筒度より小さくなることは予想できる。1本の試料当たり5断面の真円度 f_{RN} とその試料の円筒度 f_{IS} との比 f_{IS}/f_{RN} を206本の試料(真円度との対応1030例)についてまとめたものを図10に示す。 f_{IS}/f_{RN} は、加工機械の精度、加

工条件および円筒の長さ等に大きく依存するものと考えられるが、本研究の範囲では、円筒度が真円度の2倍および3倍以上となる例は、それぞれ全体の73%および44%に達していた。したがって、真円度から円筒度を推定することには、かなりの無理があるといえる。

7. 結 言

最小領域法円筒度を得るために、三つのアルゴリズム、すなわち改良シンプレックス法による方法〔I〕、〔II〕およびPowell法による方法〔III〕を検討した結果、次のようなことが明らかになった。

- (1) 各アルゴリズムに対する最適初期条件および解の収束条件を提案した。
- (2) 3種類のアルゴリズムとも十分な精度で円筒度を得ることができるが、改良シンプレックス法による方法〔II〕が最も効率が良い。
- (3) 最小自乗法円筒度は、最小領域法円筒度より10%以上過大評価となる率は、本研究の範囲では31%であった。
- (4) 最小領域法円筒度は、最小領域法真円度よりかなり大きく、真円度から円筒度を推定することにはかなり無理があることを示した。

最後に、試料の製作にあたり終始ご協力いただいた加納大助技官（東京工業大学）に深くお礼申し上げます。また、本研究は、文部省科学研究費補助金（一般B, 57460080）によって行われたことを付記する。

参 考 文 献

- 1) ISO/R 1101/I-1969.
- 2) JIS B 0621, JIS B 0021-1974.
- 3) 塚田忠夫, 金田 徹, 奥田謙造: 最適化技法を用いた最小領域法真円度の評価法, 精密機械, **49**, 10 (1983) 1351.
- 4) ISO/TC 10/SC 5/WG 6 N 80, Tolerances of Form and of Location - Verification Principles and Methods, Working Draft, (1979) 32.
- 5) 森 猛, 久曾神 煌, 豊山 晃, 小林史典: 三次元測定機を用いた円筒形加工物の精度測定, 昭和57年度精機学会秋季大会学術講演会講演論文集 (1982) 737.
- 6) J. A. Nelder & R. Mead: A Simplex Method for Function Minimization, Computer J., **7**, (1965) 308.
- 7) M. J. D. Powell: An Efficient Method for Finding the Minimum of a Function of Several Variables without Calculating Derivatives, Computer J., **7**, (1964) 155.
- 8) T. Tsukada, Y. Anno, F. Suzuki & K. Yanagi: An Evaluation of Form Errors of Cylindrical Machine Parts by Spiral Tracing Method, 18th Int. MTDR, Macmillan Press Ltd., (1977) 529.
- 9) T. Tsukada & T. Kanada: Measurement of Cylindrical Form Errors Using a Non-contact Detector, Precision Engg., **4**, 3, (1982) 153.
- 10) 塚田忠夫, 金田 徹: 非接触変位センサの円筒形状測定への適用——静電容量形変位センサの特性, 精密機械, **49**, 5 (1983) 630.
- 11) 塚田忠夫, 金田 徹: 円筒形状測定におけるサンプリング条件の一決定法, 昭和57年度精機学会春季大会学術講演会講演論文集 (1982) 74.
- 12) 今野 浩, 山下 浩: 非線形計画法, 日科技連 (1978) 175.