マニピュレータにおけるモータ駆動トルクの 計算法と軌道制御法*

川崎 晴久** 中川 三男*** 西村 国俊**

Motor Drive Torque Computation Method and Trajectory
Control for Mechanical Manipulators

Haruhisa KAWASAKI, Mituo NAKAGAWA and Kunitoshi NISHIMURA

The dynamics of a mechanical manipulator are characterized by strong non-linearity and dynamic coupling between the joint motions. Accordingly, a computed torque method in which the control input is the motor drive torque computed for a desired arm trajectory is effective in precise trajectory control. Such a method requires calculation of both joint generalized torque and motor generalized torque. It also requires that friction loss in the torque transfer system be taken into account. This paper presents a dynamic equation that takes into account friction loss and is based on the Lagrangian method. Moreover, an effective computation method for motor generalized torque is also shown using coordinate systems assigned to the link and the motor. The effectiveness of this computed torque method is verified using experimental results obtained for a five-degree-of-freedom manipulator.

Key words : manipulator, trajectory control, computation method, friction loss

1. 緒 言

マニピュレータは、各リンク相互の干渉、遠心力・コリオリ力、重力などの影響による非線形特性を持つ。このようなマニピュレータの手先を目標軌道に沿って高速・高精度に駆動する方法として、目標軌道を実現するジョイント一般化力を求め、これに対応するモータ駆動トルクを操作量とする Computed Torque Method¹⁾ (以下 CTM と略称する) がある。正確なジョイント一般化力の計算は著しく複雑であるため、計算機による効率よい計算法が必要であり、これまでニュートン・オイラー法による Luh ら¹⁾ の方法、Vukobratovic ら²⁾ の方法、ラグランジュ法による Hollerbach³⁾ の方法などが考案されている。これらの方法はいずれも、マニピュレータを一連鎖開ループ剛体リンク機構としてモデル化している。しかし、モータ駆動トルクの計算には、ジョイント一般化力のみならずモータとリンクに介在するトルク変換機構での摩擦力やモータ系の慣性モーメントによる一般化力の計算を必要とする。これまで、トルク変換機構での摩擦

損失を考慮した動力学を解析したものは少ない。また、リンクから分岐しているモータ系の一般化力の計算は、リンク一般化力と同様に複雑となるが、効果的な計算法は提案されていない。

本論文は、トルク変換機構での摩擦損失を考慮した運動方程式をラグランジュ法に基づき導くとともに、モータ一般化力の計算法を示す。提案する計算法は、Luh らのジョイント一般化力の計算法との融合をはかるため、モータとリンクに設定する座標系を用いて計算することを基本としている。最後に、ウォームギヤで構成したトルク変換機構を有する 5 自由度マニピュレータの実験によって、摩擦損失を考慮した CTM の有効性を明らかにする。

2. 摩擦損失を考慮した動力学

2.1 トルク変換機構

マニピュレータには、トルクの増幅や運動方向変換のためにトルク変換機構が利用される。トルク変換機構は、平歯車機構のように固体摩擦によるエネルギー損失が少ないものやウォームギヤのように固体摩擦によるエネルギー損失が大きいものなど各種ある。図 1 にトルク変換機構の構成を示す。トルク変換機構は固体摩擦による損失のある変換部と損失のない変換部から成る。前者の変換部における接触面を対向する縦線

* 原稿受付 昭和 59 年 4 月 3 日、昭和 58 年度精機学会秋季大会学術講演会 (昭和 58 年 10 月 14 日) にて発表

** 正 会 員 日本電信電話(株)武蔵野電気通信研究所(武蔵野市緑町 3-9-11)

*** 正 会 員 東海大学工学部 (平塚市北金目 1117)

Fig. 1 Torque transfer system

で表す。以下では図示するように、モータの出力軸とその軸の回転により駆動されるジョイント軸との間には、摩擦損失のある変換部がただか一つしか介在しない変換機構を対象とする。図中、 $\psi, \tilde{\phi}, \phi, q \in R^n$ はそれぞれモータ角度、摩擦損失のある変換部の入力側角度、その出力側角度およびジョイント角度である。 T にこれら各記号を下添字したものは各部のトルクを意味する。 T_u はモータ駆動トルクである。各角度には次の幾何学関係があるとする。

$$\tilde{\phi} = B_\rho \psi \quad (1)$$

$$\phi = C_\rho \tilde{\phi} \quad (2)$$

$$q = D_\rho \phi \quad (3)$$

ここで、 $B_\rho, C_\rho, D_\rho \in R^{n \times n}$ は定数行列である。 q と ψ の関係を

$$q = A_\rho \psi \quad (4)$$

と置くと、 A_ρ は式 (1)~(4) より次式で表せる。

$$A_\rho = D_\rho C_\rho B_\rho \quad (5)$$

また、摩擦損失のある変換部の接触面でのトルクの釣合いの関係が

$$T_\phi = C_\tau T_{\tilde{\phi}} \quad (6)$$

で表されるとする。摩擦損失のない変換部でのトルクの静的な釣合いの関係式は $\phi^T T_\phi = \tilde{\phi}^T T_{\tilde{\phi}}$ 、 $\phi^T T_\phi = q^T T_q$ である。但し、上添字 T は転置を意味する。これより、静的には $T_{\tilde{\phi}} = (B_\rho^T)^{-1} T_\phi$ 、 $T_q = (D_\rho^T)^{-1} T_\phi$ となる。したがって、静的な T_q と T_ϕ の関係は

$$T_q = A_\tau T_\phi \quad (7)$$

で表すことができる。但し、 A_τ は次式で示される。

$$A_\tau = (D_\rho^T)^{-1} C_\tau (B_\rho^T)^{-1} \quad (8)$$

2.2 運動方程式の導出

図 1 の一点鎖線 AA' で示すように、マニピュレータ

を摩擦損失のある変換部を境にしてモータ側にある変換機構部とモータを統合してモータ系とし、他をリンク系として分離して考える。始めにモータ系の各モータ回転軸回りの運動方程式を導く。モータ回転軸での回転運動に関するモータ系のラグランジュ関数を L_M とすると、運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_M}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L_M}{\partial \psi} = Q_M \quad (9)$$

である。ここで、 Q_M は ψ に関連した一般化力である。仮想変位は Δ を付与すると、 $\Delta \phi^T Q_M = \Delta \phi^T T_u - \Delta \tilde{\phi}^T T_{\tilde{\phi}}$ と式 (1) の関係より

$$Q_M = T_u - B_\rho^T T_{\tilde{\phi}} \quad (10)$$

を得る。一方、式 (4) より

$$\frac{\partial L_M}{\partial \dot{\psi}} = A_\rho^T \frac{\partial L_M}{\partial \dot{q}}, \quad \frac{\partial L_M}{\partial \psi} = A_\rho^T \frac{\partial L_M}{\partial q}$$

であるから、式 (9) は

$$A_\rho^T \mathcal{L}(L_M) = T_u - B_\rho^T T_{\tilde{\phi}} \quad (11)$$

となる。但し、

$$\mathcal{L}(L_M) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_M}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L_M}{\partial q} \quad (12)$$

である。ここで、 $\tau_M = (A_\rho^T)^{-1} Q_M$ は q に関連したモータ一般化力であり、式 (11) は式 (10) を考慮して次式となる。

$$\mathcal{L}(L_M) = \tau_M \quad (13)$$

次にリンク系の運動を考える。全系のラグランジュ関数から L_M を差し引いた残りの部分がリンク系のラグランジュ関数 L_L であり、運動方程式は次式となる。

$$\mathcal{L}(L_L) = \tau_L \quad (14)$$

ここで、 τ_L は q に関連したリンク一般化力である。 $T_{\tilde{\phi}}$ による仮想仕事 $\Delta \tilde{\phi}^T T_{\tilde{\phi}}$ と変換部の摩擦損失仕事 $\Delta \tilde{\phi}^T T_{\tilde{\phi}} - \Delta \phi^T T_\phi$ との差が仮想仕事の全体 ΔW であり

$$\Delta W = \Delta \phi^T T_\phi$$

となる。一般化力は $\tau_L = \partial W / \partial q$ の関係と式 (3) より

$$\tau_L = (D_\rho^{-1})^T T_\phi \quad (15)$$

を得る。

全系の運動方程式は、式 (6) に式 (11), (14), (15) の関係を代入して T_ϕ と $T_{\tilde{\phi}}$ を消去し、式 (8) より

$$A_\rho^T \mathcal{L}(L_M) + A_\tau^{-1} \mathcal{L}(L_L) = T_u \quad (16)$$

となる。なお、摩擦損失のない系では $A_\tau^{-1} = A_\rho^T$ であるから、運動方程式は次式で表される。

$$A_\rho^T (\mathcal{L}(L_M) + \mathcal{L}(L_L)) = T_u \quad (17)$$

以上の結果から、 T_u は τ_L と τ_M を式 (16) あるいは式 (17) に代入して求められる。ジョイント一般化力

Fig. 2 Link coordinate system and parameters

τ_i とモータ一般化力 τ_M の計算法は 3 章に示す。

3. モータ駆動トルクの計算法

トルクの計算に際して、リンク系は一連鎖開ループ剛体リンク機構とする。また、変換機構の慣性モーメントを厳密に考慮した計算式は極めて煩雑となり実用的でないため、変換機構の慣性モーメントはモータ回転子もしくはリンクに等価慣性モーメントとして組み込めるとする。一般に、この条件は厳密には成立しないが、多くの場合よい近似を与えたと考える。

3.1 ジョイント一般化力

ジョイント一般化力の効率よい計算法として、ニュートン・オイラー法による Luh らの方法がある。この方法は、動力学をリンクに設定する座標系を用いて反復計算式で表すことを基本としている。以下、その要約を述べる。

アームの基底部から先端に向けてリンク番号を 0, 1, ..., n とし、リンク $i-1$ とリンク i との連結部をジョイント i とする。リンク i には図 2 に示すように、Denavit-Hartenberg⁵⁾ の記法による i 座標系 (x_i, y_i, z_i) を設定する。 $\theta_i, d_i, a_i, \alpha_i$ は図示するように、隣接する座標系との幾何学関係を定めるパラメータである。 r_i^* を i 座標系による $i-1$ 座標原点から i 座標原点へのベクトル、 A_{i-1}^i を i 座標系から $i-1$ 座標系への回転に関する変換行列とすると、

$$r_i^* = (a_i, d_i \sin \alpha_i, d_i \cos \alpha_i)^T \quad (18)$$

$$A_{i-1}^i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{bmatrix} \quad (19)$$

である。ここで、 A_{i-1}^i は直交行列であり、 A_0^i は

$$A_0^i = A_0^1 A_1^2 \cdots A_{i-1}^i$$

で表される。ジョイント変数 q_i は、回転ジョイントの場合 θ_i 、直動ジョイントの場合 d_i である。すべてのジョイントが回転ジョイントのとき、 $\tau_L = (\tau_{L1}, \dots,$

$\tau_{Ln})^T$ の計算式は次のとおりである。但し、0 座標系で表した任意のベクトルを P 、その時間微分したベクトルを $\dot{P}$ とすると、 $A_0^i P$ と $A_0^i \dot{P}$ をそれぞれ iP 、 ${}^i\dot{P}$ と記述する。

1) 順方向計算 ($i=1, n$)

$${}^i\omega_i = A_{i-1}^{i-1} ({}^{i-1}\omega_{i-1} + z_0 \dot{q}_i) \quad (20)$$

$${}^i\dot{\omega}_i = A_{i-1}^{i-1} ({}^{i-1}\dot{\omega}_{i-1} + z_0 \ddot{q}_i + {}^{i-1}\omega_{i-1} \times z_0 \dot{q}_i) \quad (21)$$

$${}^i\dot{v}_i = {}^i\omega_i \times r_i^* + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times r_i^*) + A_{i-1}^{i-1} {}^{i-1}\dot{v}_{i-1} \quad (22)$$

$${}^i\ddot{v}_i = {}^i\omega_i \times s_i^* + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times s_i^*) + {}^i\dot{v}_i \quad (23)$$

2) 逆方向計算 ($i=n, 1$)

$${}^i f_i = m_i {}^i\ddot{v}_i + A_{i+1}^{i+1} f_{i+1} \quad (24)$$

$${}^i n_i = I_i {}^i\dot{\omega}_i + {}^i\dot{\omega}_i \times (I_i {}^i\omega_i) + m_i (r_i^* + s_i^*) \times {}^i\ddot{v}_i + r_i^* \times A_{i+1}^{i+1} f_{i+1} + A_{i+1}^{i+1} n_{i+1} \quad (25)$$

$$\tau_{Li} = (A_{i-1}^{i-1} z_0)^T {}^i n_i \quad (26)$$

ここで、 $\omega_i, \dot{\omega}_i, \dot{v}_i, \ddot{v}_i, f_i, n_i \in R^3$ は 0 座標系で表したベクトルで、 ω_i はリンク i の角速度、 $\dot{\omega}_i$ はリンク i の角加速度、 $\dot{v}_i$ はリンク i の直線加速度、 $\ddot{v}_i$ はリンク i の質量中心における直線加速度、 f_i はリンク $i-1$ からリンク i に働く力、 n_i はリンク $i-1$ からリンク i に働くモーメントである。また、 m_i はリンク i の質量、 s_i^* は i 座標系で表した i 座標原点からリンク i の質量中心へのベクトル、 I_i は i 座標系で表したリンク i の質量中心に対するリンク慣性行列である。

3.2 モーター一般化力

リンクを駆動するモータの配置は、各々の機構によって異なるが、最下部に配置するモータから順次 1, 2, ..., n と番号付けすると次の 3 つに分けて考えられる。

- (1) 全モータをリンク 0 に配置する。
- (2) モータ i をリンク $i-1$ に配置し、リンク i を駆動する。
- (3) モータ i をリンク j に配置する。

始めに、条件 (3) の一般的な場合について検討する。但し、通常の機構ではリンク i を駆動するモータは基底部側のリンクに配置されるから $i \geq j$ であり、以下ではこの条件が成立するとする。モータ i の回転に関するラグランジュ関数 l_{Mi} は、回転子が偏心していないとすると、

$$l_{Mi} = \frac{1}{2} \omega_{Mi}^T \tilde{I}_{Mi} \omega_{Mi} \quad (27)$$

であり、モータ系全体のラグランジュ関数 L_M は

$$L_M = \sum_{i=1}^n l_{Mi} \quad (28)$$

である。但し、 $\tilde{I}_{Mi}$ は回転子 i の回転軸に対する 0 座標系による慣性行列、 ω_{Mi} は回転子 i の 0 座標系で表

Fig. 3 Motor coordinate system and parameters

した角速度である。ここで

$$\mathcal{L}_{i,k} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial l_{Mi}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial l_{Mi}}{\partial q_k} \quad (29)$$

と置くと、 l_{Mi} は $q_{i+1}, \dots, q_n$ のジョイント変数に依存しないため $\tau_M = (\tau_{M1}, \dots, \tau_{Mn})^T$ の要素 τ_{Mk} は

$$\tau_{Mk} = \sum_{i=k}^n \mathcal{L}_{i,k} \quad (30)$$

となる。 τ_M の計算は τ_L の計算法との融合をはかるため、図3に示すように、モータ i に設定する Mi 座標系 (x_{Mi} , y_{Mi} , z_{Mi}) とモータ i を搭載したリンク j に設定する Li 座標系 (x_{Li} , y_{Li} , z_{Li}) とを用いて行う。各座標系は Denavit-Hartenberg の記法に基づいて設定する。但し、 z_{Li} 軸と z_{Mi} 軸は一致させる。各座標系パラメータは Mi または Li を下添字すると $\alpha_{Mi} = 0^\circ$, $\theta_{Mi} = \psi_i$ の関係がある。式 (29) 右辺第1項は、式 (27) を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial l_{Mi}}{\partial \dot{q}_k} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \omega_{Mi}^T}{\partial \dot{q}_k} \right) \tilde{I}_{Mi} \omega_{Mi} \\ &+ \frac{\partial \omega_{Mi}^T}{\partial \dot{q}_k} (\tilde{I}_{Mi} \dot{\omega}_{Mi} + \omega_{Mi} \times (\tilde{I}_{Mi} \omega_{Mi})) \end{aligned}$$

となる。上式をリンクに設定した座標系で表すと

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial l_{Mi}}{\partial \dot{q}_k} \right) &= \left(A_{j(i)}^0 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \omega_{Mi}}{\partial \dot{q}_k} \right) \right)^T I_{Mi}^{j(i)} \omega_{Mi} \\ &+ \frac{\partial^{j(i)} \omega_{Mi}^T}{\partial \dot{q}_k} \\ &\times (I_{Mi}^{j(i)} \dot{\omega}_{Mi} + {}^{j(i)} \omega_{Mi} \times (I_{Mi}^{j(i)} \omega_{Mi})) \end{aligned} \quad (31)$$

を得る。但し、 $j(i)$ はモータ i を搭載するリンク番号を意味し、 I_{Mi} は次式で表される。

$$I_{Mi} = A_{j(i)}^0 \tilde{I}_{Mi} A_0^{j(i)} = A_{j(i)}^{Li} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Mi} \end{bmatrix} A_{Li}^{j(i)}$$

ここで、 I_{Mi} は回転子 i の慣性モーメントである。同様に式 (29) 右辺第2項は

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_{Mi}}{\partial q_k} &= \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{1}{2} {}^{j(i)} \omega_{Mi}^T I_{Mi}^{j(i)} \omega_{Mi} \right) \\ &= \frac{\partial^{j(i)} \omega_{Mi}^T}{\partial q_k} I_{Mi}^{j(i)} \omega_{Mi} \end{aligned} \quad (32)$$

となる。一方、モータ i とリンク $j(i)$ との角速度、角加速度の関係は

$$\omega_{Mi} = \omega_{j(i)} + z_{Li} \dot{\psi}_i \quad (33)$$

$$\dot{\omega}_{Mi} = \dot{\omega}_{j(i)} + z_{Li} \ddot{\psi}_i + \omega_{j(i)} \times (z_{Li} \dot{\psi}_i) \quad (34)$$

である。上式の両辺に $A_{j(i)}^0$ を掛けて

$${}^{j(i)} \omega_{Mi} = {}^{j(i)} \omega_{j(i)} + A_{j(i)}^{Li} z_0 \dot{\psi}_i \quad (35)$$

$$\begin{aligned} {}^{j(i)} \dot{\omega}_{Mi} &= {}^{j(i)} \dot{\omega}_{j(i)} + A_{j(i)}^{Li} z_0 \ddot{\psi}_i \\ &+ {}^{j(i)} \omega_{j(i)} \times (A_{j(i)}^{Li} z_0 \dot{\psi}_i) \end{aligned} \quad (36)$$

を得る。ここで、 $A_p^{-1} = \{a_{ij}\}$ と置くと式 (33), (35) より

$$\begin{aligned} A_{j(i)}^0 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \omega_{Mi}}{\partial \dot{q}_k} \right) &= A_{j(i)}^0 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \omega_{j(i)}}{\partial \dot{q}_k} \right) \\ &+ {}^{j(i)} \omega_{j(i)} \times (A_{j(i)}^{Li} z_0 a_{ik}) \end{aligned} \quad (37)$$

$$\frac{\partial^{j(i)} \omega_{Mi}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial^{j(i)} \omega_{j(i)}}{\partial \dot{q}_k} \quad (38)$$

$$\frac{\partial^{j(i)} \omega_{Mi}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial^{j(i)} \omega_{j(i)}}{\partial \dot{q}_k} + A_{j(i)}^{Li} z_0 a_{ik} \quad (39)$$

を得る。さらに付録に示すように

$$A_i^0 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial^i \omega_i}{\partial \dot{q}_k} \quad (40)$$

の関係がある。式 (31), (32) を式 (29) に代入し、式 (37)~(40) を用いると

$$\mathcal{L}_{i,k} = \frac{\partial^{j(i)} \omega_{j(i)}^T}{\partial \dot{q}_k} h_{j(i)} + a_{ik} \tilde{h}_{j(i)} \quad (41)$$

を誘導できる。但し

$$h_{j(i)} = I_{Mi}^{j(i)} \dot{\omega}_{Mi} + {}^{j(i)} \omega_{Mi} \times (I_{Mi}^{j(i)} \omega_{Mi}) \quad (42)$$

$$\tilde{h}_{j(i)} = (A_{j(i)}^{Li} z_0)^T I_{Mi}^{j(i)} \dot{\omega}_{Mi} \quad (43)$$

$$\frac{\partial^i \omega_i}{\partial \dot{q}_k} = \begin{cases} k \leq i : \begin{cases} A_i^{k-1} z_0 & (\text{ジョイント } k \text{ が回転}) \\ 0 & (\text{ジョイント } k \text{ が直動}) \end{cases} \\ k > i : 0 \end{cases} \quad (44)$$

である。式 (41) を式 (30) に代入して τ_{Mk} が求められる。なお、 ${}^{j(i)} \omega_{Mi}$, ${}^{j(i)} \dot{\omega}_{Mi}$ はそれぞれ式 (35), (36) より計算できる。

次に、条件 (2) のモータ i がリンク $i-1$ に配置され、リンク i を駆動する場合を考える。このときは、 $j(i) = i-1$, $a_{ik} = 0$ ($i \neq k$) より次式が得られる。

$$\tau_{Mk} = z_0^T C_k + a_{kk} \tilde{h}_{k-1} \quad (45)$$

ここで、 C_k は次式で与えられる。但し $C_{n+1} = 0$ であ

Table 1 Number of arithmetic operations for motor generalized torque

Condition	Multiply	Add	$n=6, k_M=5$	
			Mul.	Add.
(1)	$2n^2+41n+\frac{9}{2}k_M^2-\frac{9}{2}k_M$	$2n^2+34n+3k_M^2-3k_M$	408	336
(2)	$42n-9$	$47n-9$	243	273
(3)	n^2+n	$\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n$	42	15

Fig. 4 Five-degree-of-freedom manipulator

る。

$$C_k = \begin{cases} h_{k-1} + A_{k-1}^k C_{k+1} & (\text{ジョイント } k \text{ が回転}) \\ 0 & (\text{ジョイント } k \text{ が直動}) \end{cases} \quad (46)$$

最後に、条件 (1) の全モータがリンク 0 に配置される場合を考える。このときは $j(i)=0$, $\hat{h}_{j(i)}=I_{Mi}\ddot{\psi}_i$ より

$$\tau_{Mk} = \sum_{i=k}^n I_{Mi} a_{ik} \ddot{\psi}_i \quad (47)$$

となる。表 1 に、ジョイントがすべて回転ジョイントのときの τ_M の計算量を示す。表中の k_M は最先端にあるモータを搭載するリンク番号である。 τ_L の計算量は乗算 $150n-48$, 加算 $131n-48$ である。 $n=6$ のとき、条件 (1) の τ_M の計算量は τ_L の約

0.5 倍であり、条件 (3) の τ_M の計算量は τ_L の約 0.005 倍である。

3.3 近似計算法との比較

条件 (1) での τ_M の計算量は、条件 (3) のときの計算量と比較大である。一般的条件の場合でも条件 (3) の計算式で十分な近似値が求められるならば、実時間制御にとっては有効な近似計算法となる。そこで、条件 (3) の計算式を近似計算法とし、計算誤差をシミュレーションによって検討した。図 4 にシミュレーションの対象とした 5 自由度マニピュレータを示す。表 2 に座標系と機構のパラメータ値を示す。変換機構は、 B_ρ が単位行列、 $C_\rho^{-1} = \text{diag}(1/\rho_1, \dots, 1/\rho_5)^T$ であり、 A_ρ^{-1} は $a_{ii}=1/\rho_i$ ($i=1, 5$), $a_{43}=1/\rho_3$, $a_{54}=1$ ではかの要素はすべて零の行列である。ここで、式 (13), (14) は記述し直すと

$$J_L(\theta) \ddot{\theta} + b_L(\theta, \dot{\theta}) = \tau_L$$

$$J_M(\theta) \ddot{\theta} + b_M(\theta, \dot{\theta}) = \tau_M$$

となる。但し、 $J_L, J_M \in R^{n \times n}$ はそれぞれリンク系とモータ系の慣性行列であり、 $b_L, b_M \in R^n$ は遠心力・コリオリ力、重力の影響を表すベクトルである。シミュレーションは $\rho_i = \rho$ ($i=1, 5$)、変換機構の摩擦損失なしとし、モータ系と負荷系との整合を考慮し J_L と J_M の対角要素がほぼ等しくなるように I_{Mi} を定めた。図 5 に、 $\theta_i=90^\circ$, $\dot{\theta}_i=0$, $\ddot{\theta}_i=1$ ($i=1, 5$) の条件で、減速比 ρ と正規化した計算誤差 $e_i = (\tau_{Mi} - \hat{\tau}_{Mi})/\tau_{Mi}$ との関係を示す。但し、 $\hat{\tau}_{Mi}$ は条件 (3) による近似計算値である。同図より、減速比が大である程、すなわち減速比が小である程計算誤差が増加するといえる。概略的には、 $1/\rho > 50$ のとき計算誤差は無視できる程であ

Table 2 Link and coordinate system parameters

No.	1	2	3	4	5
a_i m	0.0	0.1306	0.0	0.01	0.0285
d_i m	0.107	0.0	0.0	0.099	0.0
α_i deg	90	0	90	90	0
S_i^* m	-0.014	-0.0703	0.0	-0.006	-0.008
	0.0	0.0058	-0.0038	-0.002	0.0
	-0.039	0.0	0.037	0.025	0.0
$j(i)$	0	1	2	2	3
α_{Li} deg	90	-90	90	90	0
θ_{Li} deg	0	0	90	90	0
m_i kg	0.645	0.561	0.202	0.046	0.004
I_{11}^i	—	176	242	10.3	0.07
I_{22}^i 10^{-6} kgm ² **	1470	938	242	0.04	0.35
I_{33}^i	—	850	54.8	8.7	0.42

** $I_i = \text{diag}(I_{11}^i, I_{22}^i, I_{33}^i)$

Fig. 5 Relation between velocity ratio ρ and normalized calculation error

Fig. 6 Command and response waves

り, $1/\rho < 10$ のときは無視できないといえる。

4. 軌道制御の実験

目標軌道を実現する T_u をあらかじめ求めておき、これをフィードフォワード入力としその上にジョイント角度と角速度の誤差フィードバックを施す CTM の実験を前述の 5 自由度マニピュレータで行った。この機構の I_{Mi} (単位 $\text{g}\cdot\text{cm}^2$) の値はモータ 1 より順に、34.8, 23.3, 7.4, 7.4, 0.98 である。変換機構はウォームギヤで構成しており、ウォーム歯車軸は ϕ , ウォームホイール軸は ϕ , $\rho_i = 1/36$ ($i=1, 4$), $\rho_5 = 1/28$ である。ウォームギヤは小形で大減速が得られる特徴があるが、摩擦損失が大きく、さらに自動締まりの性質がある。したがって C_r の値は ϕT_ϕ の符号によって異なり、 $\phi T_\phi > 0$ のときは測定により $C_r = \text{diag}(12.6, 12.6, 11.0, 11.0, 9.51)$, $\phi T_\phi < 0$ のときは精

Fig. 7 Comparison of input voltage V_2

Fig. 8 Trajectory error norms

度よい近似値として $C_r = (-\infty, \dots, -\infty)$ とした⁶⁾。図 6 に、CTM による実験応答波形を示す。実測値と指令曲線は良く一致している。ここで比較のため、次の 3 つの条件で検討を行った。

- (1) フィードバックのみのサーボ制御
- (2) ウォームギヤでの摩擦損失がないとし, $C_r = (C_\phi^T)^{-1}$ としたときの CTM
- (3) ウォームギヤでの摩擦損失を考慮した CTM

図 7 に、モータ 2 における入力電圧とトルク伝達状態 S を示す。 S がレベル H のとき $\phi T_\phi > 0$, レベル L のとき $\phi T_\phi < 0$ の状態を意味する。入力条件により、モータ電圧が大幅に異なってくるのがうかがえる。図 8 は、軌道誤差ノルム $\|\Delta x\|$ を示したものである。

$\|\Delta x\|$ の最大値は、条件 (1) より順に計算値 (単位 mm) が (1) 5.15, (2) 2.36, (3) 0.0, 実測値が (1) 5.65, (2) 4.18, (3) 1.65 であり、ほぼ両者は一致している。

上記の実験から、変換機構の摩擦損失を考慮した入力によって高精度な軌道制御が達成できるといえる。また、摩擦損失を考慮しない入力ではその効果があまり期待できない。

5. 結 言

本研究をまとめると次のようになる。

- (1) 変換機構の摩擦損失を考慮したマニピュレータの運動方程式を、ラグランジュ法に基づき導いた。
- (2) モーター一般化力 τ_M の効率よい計算法をラグランジュ法に基づき導出した。本計算法は Luh らによるジョイント一般化力 τ_L の計算法との融合をはかっているため、モータ駆動トルクの計算が効率よく行える。一般的なモータ配置の場合、正確な τ_M の計算量は τ_L の 0.5 倍程であり、近似計算法では 0.05 倍程となる。但し、近似計算法の計算精度は減速比に依存し、減速が大である程計算精度は向上する。
- (3) 変換機構をウォームギヤで構成する 5 自由度マニピュレータの実験により、摩擦損失を考慮したトルク計算制御法 (CTM) の有効性を明らかにした。また、ウォームギヤのように摩擦損失の大きい変換機構では、摩擦損失がないとして計算する CTM ではその効果が少ない。

[付 録]
$$A_i^0 \frac{d}{dt} \left(\frac{\omega_i}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial^i \omega_i}{\partial \dot{q}_k}$$

証明)

$$f_{i,k} = A_i^0 \frac{d}{dt} \frac{\omega_i}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial^i \omega_i}{\partial \dot{q}_k} \quad (\text{付 1})$$

とする。 $k > i$ もしくはジョイント k が直動ジョイントの場合、式 (付 1) の右辺第 1 項、第 2 項ともに零とな

り $f_{i,k} = 0$ である。ジョイント k が回転ジョイントで、 $k = i$ の場合、

$$\frac{\partial A_k^{k-1}}{\partial \dot{q}_k} = A_k^{k-1} B$$

但し、

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Bz_0 = 0$$

$$PXz_0 = BP$$

の関係を用いると式 (20) より

$$\begin{aligned} f_{k,k} &= A_k^0 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \omega_{k-1}}{\partial \dot{q}_k} + z_{k-1} \right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} A_k^{k-1} ({}^{k-1}\omega_{k-1} + z_0 \dot{q}_k) \\ &= A_k^{k-1} (\omega_{k-1} \times z_{k-1} - B ({}^{k-1}\omega_{k-1} + z_0 \dot{q}_k)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$k < i$ のときは、式 (20) の関係より

$$\begin{aligned} f_{i,k} &= A_i^{i-1} f_{i-1,k} \\ &= A_i^k f_{k,k} \\ &= 0 \end{aligned}$$

以上より、すべての条件において $f_{i,k} = 0$ が成立する。
証明終わり

文 献

- 1) J. Y. S. Luh, M. W. Walker & R. P. C. Paul: On-line Computational Scheme for Mechanical Manipulators, Trans. ASME, J. Dynamic Systems, Measurement, and Control, **102**, (1980) 69.
- 2) M. Vukobratovic & V. Potkonjak: Contribution to the Forming of Computer Method for Automatic Modeling of Active Spatial Mechanisms Motion, Part I, J. Mechanisms and Machine Theory, **14**, 3, (1979).
- 3) J. M. Hollerbach: A Recursive Formulation of Lagrangian Manipulator Dynamics, Proc. Joint Automation Conf., (1980).
- 4) W. M. Silver: On the Equivalence of Lagrangian and Newton-Euler Dynamics for Manipulators, The International J. Robotic Research, MIT Press, **1**, 2, (1982) 60.
- 5) J. Denavit & R. S. Hartenberg: A Kinematic Notation for Lower Pair Mechanisms Based on Matrices, J. Appl. Mech., Vol. 22, Trans. ASME, Vol. 77, (1955) 215.
- 6) 西村国俊, 中川三男, 川崎晴久: ウォーム歯車減速機構を含む多関節機構の制御 (1), ウォーム歯車機構の動特性, 昭和 58 年度精機学会秋季大会学術講演会講演論文集 (1983) 191.

正 誤 表

巻 号	ページ	欄 行	誤	正
51	4	831 左 10	$\sigma = [2(\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2 + \sigma_5^2)]$ (2)	$\sigma = [2(\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2 + \sigma_5^2)]^{1/2}$ (2)