実験データにもとづく動剛性シミュレーション モデルの改良*

稲村豊四郎** 大森 充*** 町田 保† 安井武司**

Improvement of a Dynamic Simulation Model Based on Experimental Data

Toyoshiro INAMURA, Mitsuru OHMORI, Tamotsu MACHIDA and Takeshi YASUI

A method is proposed to modify a finite element model of a structure by using spring elements of adjustable stiffness so that the results of dynamic analysis by the model fit the experimental results obtained from a trial product. This adjusting modification realizes accurate prediction of the dynamic characteristics of structures proposed thereafter in the design stage to arrive at a final design in a short time. The adjustment can be performed based on the incomplete data on the dynamic characteristics of both the trial product and its model. Some examples of adjustment are presented to show that (1) the modification can be done by using the modal displacement of only the lowest few modes and of the selected points in the structure, (2) the result of modification approaches the exact model of an actual product by increasing the degrees of freedom of the original model and (3) the modified model can simulate the dynamic characteristics of structures more accurately than the original one.

Key words: dynamic analysis, FEM, experimental data, model adjustment, CAD, structural analysis

1. はじめに

製品開発における基本原則は、最短期間に最小費用で要求された機能の製品を作り出すことであり、CAD/CAMの概念¹⁾も、この基本原則の実現を目指したものにほかならない。一般に製品開発のプロセスでは、設計と試作とが試行錯誤的に繰り返される²⁾が、この繰返し作業をできるだけ少なくするためには、設計段階で製品の機能を精度良く予測する技術が不可欠である。有限要素法は、構造のモデルに基づいて強度や振動特性を予測する技術であるが、現実の製品が示す複雑な挙動を、通常の手続きで作ったモデルにより完全に表すのは不可能であるから、シミュレーションによる予測と試作機での測定結果とは多くの場合一致しない。そこでこの状況を出来るだけ短期間に解消するための一つの手段として、試作機で得られるデータに基づいて解析モデルを改良し、以後の予測精度を向上させるという概念と手法が極めて重要であることが認識されよう。

本研究はこのような認識をふまえ、構造の動剛性シミュレーションを対象として、この問題を解決するための方法を提案したものである。ここでは解析モデル内にいくつかの変剛性をもつ部分を想定し、このモデルによる解析結果が試作機での実測値と一致するように変剛性を調整するという方法を考え、調整のための具体的手法を提案する。またこの手法の妥当性を検討するため、有限要素法および実測データを用いた数値計算を行い、提案する手法の実用性を検証する。本手法の最大の特色は、解析計算や試作機による実測で得られた低次の数モードのデータにより調整を行えば、調整後のモデルは高次のシミュレーションまで高精度に行える点にある。

2. 調整理論

動剛性シミュレーションを対象として上記の意味での調整を行おうとする場合、通常の解析および実測によって何が、どのような形で得られるのかをまず明確にしておかななくてはならない。一般に有限要素法による動剛性解析および実機の振動試験によって得られるデータは、構造の各次の固有振動数と固有振動モードである。ただし通常これらのデータは、以下に述べる意味で不完全な情報である。

* 原稿受付 昭和59年4月9日、昭和58年度精機学会秋季大会学術講演会(昭和58年10月16日)にて発表

** 正会員 金沢大学工学部(金沢市小立野2-40-20)

*** 学生会員 金沢大学工学部

† 正会員 (株)東洋現像所(東京都品川区東品川3-13-6)

Fig. 1 Spring-mass models to be adjusted

- (1) 解析および実測により得られるモードは、数多くの固有モードのうちの低次側の一部のモードに限られる。
- (2) 実測データについては、振動変位を測定できる箇所が構造の一部に限られる。

また情報の不完全さとは異なるが、通常実機は無限自由度（節点数無限）の系と見なせるから、有限自由度の解析モデルとの間には自由度のギャップが存在することも忘れてはならない。なお、ここでは実機のもつ減衰や非線形性は調整の対象に含めない。そこで調整理論を開発するにあたっては上記の事実を十分に考慮し、これらの制約の下でもなお有効なものとするのが基本的に重要である。以下ではまず完全なデータが得られるものとして基礎式を導出し、次に不完全な情報の場合にもこれを修正した理論式により、妥当な調整が行えることを示す。

2.1 基礎式の導出

いま調整すべき系を“原系”，調整の目標となる系を“対象系”と呼ぶ。簡単のために原系と対象系は同一自由度 N をもつ図 1 のようなばね・マス系とする。原系の中には、調整される任意個数の可変剛性ばねを、任意に指定した箇所（図では質量 $\tilde{m}_r$ と $\tilde{m}_s$ の間）に設けておく。質量の調整は考えない。また基礎式を導出するにあたって、系の第 i 次固有値（固有角振動数の 2 乗）を λ_i ，固有ベクトル（固有振動モード）を $\{e_i\}$ ，質量マトリクス $[M]$ ，剛性マトリクス $[K]$ とし、原系と対象系とを区別するため原系の諸量には “ $\sim$ ” を冠するものとする。ここでは質量の調整を考えないから $[\tilde{M}] = [M]$ であることに注意する。良く知られているように、固有ベクトルは質量マトリクス $[M]$ および剛性マトリクス $[K]$ に関し直交するから、 $[M]$ に関し正規化された固有ベクトルを横に並べたマトリクス $[E] = [\{e_1\}, \{e_2\}, \dots, \{e_N\}]$ により

$$[\tilde{E}]^T [\tilde{M}] [\tilde{E}] = [1_N], \quad [E]^T [M] [E] = [1_N] \quad (1)$$

とすることができる³⁾。但し $[1_N]$ は N 次の単位マトリクスを表す。またこのとき固有値を並べた対角マトリクスを $[\Lambda] = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]$ とすれば

$$[\tilde{E}]^T [\tilde{K}] [\tilde{E}] = [\tilde{\Lambda}], \quad [E]^T [K] [E] = [\Lambda] \quad (2)$$

も成り立つ。一方、原系内の調整ばねの総数を p とし、 i 番目のばねの調整量を Δk_i ($i=1, 2, \dots, p$) とすれば、原系と対象系の剛性マトリクスの間には

$$\{c_i\}^T = (0, \dots, 0, \overset{r}{1}, 0, \dots, 0, \overset{s}{-1}, 0, \dots, 0) \quad (3)$$

として

$$[K] = [\tilde{K}] + \sum_{i=1}^p \Delta k_i \{c_i\} \{c_i\}^T \quad (4)$$

なる関係が成り立つ。 $\{c_i\}$ は、調整ばねの設定箇所を指定するベクトルである。そこでいま $[\tilde{E}]$ から $[E]$ への変換 $[G]$ を

$$[E] = [\tilde{E}] [G] \quad (5)$$

で定義し、式 (4) の両辺に左右から $[E]^T$ および $[E]$ をかければ

$$[E]^T [K] [E] = [G]^T [\tilde{E}]^T ([\tilde{K}] + \sum_{i=1}^p \Delta k_i \{c_i\} \{c_i\}^T) [\tilde{E}] [G] \quad (6)$$

したがって式 (2) より

$$[G]^T ([\tilde{\Lambda}] + \sum_{i=1}^p \Delta k_i [\tilde{E}]^T \{c_i\} \{c_i\}^T [\tilde{E}]) [G] = [\Lambda] \quad (7)$$

となる。一方、式 (5) を式 (1) に代入すれば

$$[G]^T [\tilde{E}]^T [\tilde{M}] [\tilde{E}] [G] = [G]^T [G] = [1_N] \quad (8)$$

すなわち $[G]$ は直交マトリクスであることがわかるから、 $[\tilde{B}^{(0)}] = [\tilde{E}] \{c_i\} \{c_i\}^T [\tilde{E}]$ として式 (7) より

$$\sum_{i=1}^p \Delta k_i [\tilde{B}^{(0)}] = [G] [\Lambda] [G]^T - [\tilde{\Lambda}] \quad (9)$$

を得る。式 (9) 中の Δk_i 以外のすべての量は、原系および対象系の固有値、固有ベクトルを用いて表されるから、式 (9) を p 個の Δk_i を未知数とする線形方程式と見て解けば、求める調整量が得られる。いま、これを見やすくするために式 (9) 両辺が各々対称マトリクスであることに留意し、各々の上三角成分を並べかえてベクトル化したものを

$$\sum_{i=1}^p \Delta k_i \{\tilde{\beta}_i\} = \{\delta\} \quad (10)$$

とする。さらに $N(N+1)/2$ 行 p 列のマトリクス $[\tilde{B}] = [\{\tilde{\beta}_1\}, \{\tilde{\beta}_2\}, \dots, \{\tilde{\beta}_p\}]$ とし、また $\{\Delta k\}^T = (\Delta k_1, \Delta k_2, \dots, \Delta k_p)$ とすれば、式 (9) は

$$[\tilde{B}] \{\Delta k\} = \{\delta\} \quad (11)$$

となる。式 (11) は p 個の未知数に関する $N(N+1)/2$ 元連立 1 次方程式であるから、 $p \leq N(N+1)/2$ なる

条件下で

$$\{\Delta k\} = (\{\tilde{B}\}^T \{\tilde{B}\})^{-1} \{\tilde{B}\}^T \{\delta\} \quad (12)$$

により最小二乗解が得られる。また $p > N(N+1)/2$ の場合にも、例えば Δk_i と Δk_j が等しいならば Δk_i のみを未知数に残し、同時に $\{\tilde{\beta}_i\} + \{\tilde{\beta}_j\}$ を新たに $\{\tilde{\beta}_i\}$ とする処理により、式 (11) 中の未知数の総数を減らして解を得ることができる。さらに式 (12) で得られた解を $\{\Delta k^*\}$ とすると、これを式 (11) に代入したもの

$$\{\delta^*\} = \{\tilde{B}\} \{\Delta k^*\} \quad (13)$$

は、 $\{\tilde{\beta}_1\}, \{\tilde{\beta}_2\}, \dots, \{\tilde{\beta}_p\}$ で張られる部分空間への $\{\delta\}$ の正射影であるから

$$Index = \|\{\delta^*\}\| / \|\{\delta\}\|, \quad 0 \leq Index \leq 1 \quad (14)$$

の値が 1 に近いほど $\{\Delta k^*\}$ が式 (11) を良く満たすこと、すなわち調整ばねの設定箇所が適切であり、かつ得られた調整量の信頼性が高いことがわかる。

2.2 不完全データによる調整

実機は無限自由度系であるが、有限箇所の変位を問題にする限り有限自由度系で近似して差しつかえない。さしあたり実機の有限自由度表現（対象系）と解析モデル（原系）とは同一自由度 N をもつとする。通常、得られるデータの量は、モード数および各モードにおける各点の変位ともに実測値の方が少ないから、実測値のデータ量により事実上の制約が決まる。いま対象系の r 次 ($r < N$) までの固有値、固有モード（固有ベクトル）が得られたものとし、固有ベクトルについては更に構造内の m か所 ($r \leq m < N$) の変位だけが知られているとする。これを並べたものを $\{E_{(m,r)}\}$ とし、原系の解析結果から対応する部分を抜き出したものを $\{\tilde{E}_{(m,r)}\}$ とする。このとき式 (5) に対応する変換

$$\{E_{(m,r)}\} = \{\tilde{E}_{(m,r)}\} [G_r] \quad (15)$$

より、 $[G_r]$ を

$$[G_r] = (\{\tilde{E}_{(m,r)}\}^T \{\tilde{E}_{(m,r)}\})^{-1} \{\tilde{E}_{(m,r)}\}^T \{E_{(m,r)}\} \quad (16)$$

とし、さらに

$$\begin{aligned} [G_r^*] &= [G_r] ([G_r]^T [G_r])^{-1/2} \\ &= [G_r] \left[\sum_{i=1}^r (1/\sqrt{\mu_i}) \{\xi_i\} \{\xi_i\}^T \right] \end{aligned} \quad (17)$$

とすれば、 $[G_r^*]$ は r 次の直交マトリクスになる⁴⁾。ここで μ_i (>0) および $\{\xi_i\}$ は $[G_r]^T [G_r]$ の固有値、固有ベクトルである。一方、解析結果の方は、 r 次までのモードの全節点変位が既知であるから、 $\{\tilde{E}_{(m,r)}\}$ を拡大した $N \times r$ のマトリクスを $\{\tilde{E}_{(N,r)}\}$ とし

$$\{E_{(N,r)}\} = \{\tilde{E}_{(N,r)}\} [G_r^*] \quad (18)$$

によって $\{E_{(N,r)}\}$ を定義する。このとき式 (6) にならって $\{E_{(N,r)}\}^T [K] \{E_{(N,r)}\}$ を作れば

$$\{E_{(N,r)}\}^T [K] \{E_{(N,r)}\}$$

$$\begin{aligned} &= [G_r^*] \{\tilde{E}_{(N,r)}\}^T (\{\tilde{K}\} + \sum_{i=1}^p \Delta k_i \{c_i\} \{c_i\}^T) \\ &\quad \times \{\tilde{E}_{(N,r)}\} [G_r^*] \end{aligned}$$

$$= [G_r^*]^T (\{\tilde{A}_r\} + \sum_{i=1}^p \Delta k_i \{\tilde{B}_r^{(i)}\}) [G_r^*] \quad (19)$$

となる。 $\{\tilde{A}_r\}, \{\tilde{B}_r^{(i)}\}$ は、各々 $\{\tilde{A}\}, \{\tilde{B}^{(i)}\}$ の左上 $r \times r$ 部分である。式 (19) より

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \Delta k_i \{\tilde{B}_r^{(i)}\} &= [G_r^*] \{E_{(N,r)}\}^T [K] \{E_{(N,r)}\} [G_r^*]^T \\ &\quad - \{\tilde{A}_r\} \end{aligned} \quad (20)$$

が得られる。そこで式 (20) と式 (9) 左上の $r \times r$ 部分とを比較することにより

$$\begin{aligned} &[G_r^*] \{E_{(N,r)}\}^T [K] \{E_{(N,r)}\} [G_r^*]^T \\ &= ([G] [A] [G]^T)_r \end{aligned} \quad (21)$$

を得るが、付録の議論より

$$([G] [A] [G]^T)_r = [G_r^*] [A_r] [G_r^*]^T \quad (22)$$

が成り立つから、式 (21)、式 (22) を式 (20) に代入し

$$\sum_{i=1}^p \Delta k_i \{\tilde{B}_r^{(i)}\} = [G_r^*] [A_r] [G_r^*]^T - \{\tilde{A}_r\} \quad (23)$$

が最終的に導かれる。式 (23) 右辺は、構造内 m か所で得た r 次までの動剛性の実測値と計算値で構成され、左辺の $\{\tilde{B}_r^{(i)}\}$ は、調整ばねを挿入する箇所での r 次までの変位の計算値で作られる。注意すべきは、上記 m か所と調整ばねの挿入箇所とを別個にとれる点である。通常、調整ばねは実機のボルト締結部に対応する場所などに設けることが多く、これらの箇所での微小変位は、計算では求められるが実測は難しい。したがって上記の事実は、この手法を実際に用いる上での著しい利点となる。式 (23) を通常の連立 1 次方程式に変形し、解く手順は前項と同様である。Index についても同様に定義される。解の精度は、調整すべき量 Δk_i が少ない程良い。

3. 数値計算による検討

3.1 不完全データによる調整

図 2 に示すように 4 本の等しいはりで支持された 3 次元直方体要素を用い、はりの縦弾性率 3.920×10^4 N/mm² のものを原系、 5.880×10^4 N/mm² のものを対象系として調整計算を行った。ただし、はりの自由度は軸方向の伸び以外をすべて拘束してあり、原系、対象系とも 16 自由度のモデルになる。したがって構造の全モード数は 16 であるが、調整ではこのうちの低次側 3 モードの動剛性だけを使用し、更に各モードにおける変位も図に示す 2 節点の 6 変位だけを用いた。得られた調整量は縦弾性率 1.954×10^4 N/mm²、この時の Index は 1.0 となった。得られた値は真値 $1.960 \times$

Fig. 2 A simple structure used in the adjustment by incomplete data
Broad arrows indicate the displacement used in the adjustment

10^4 N/mm^2 に対し 0.31% 程度の誤差である。

なお、この $1.954 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$ を原系のはりの縦弾性率に加算して得られた動剛性は、対象系のそれと全モードにつき 4 けた目までの精度で一致した。

3.2 自由度の異なるモデル間での調整

実機による測定データを用いて調整を行う場合、原系（解析モデル）はいくらでも高い自由度のモデルを使うことが可能であり、自由度を次第に上げていった極限（無限大自由度）で対象系の本来の自由度と一致すると考えて良い。この場合調整理論に要求されるのは、極限状態において真の解に収束する性質である。真の解とは、原系と対象系とで剛性の異なる箇所を、同一にするということにほかならない。この決して自明でない性質を理論により明らかにするのは容易でないから、ここでは数値計算による実証的な検討を試みる。まず無限自由度モデルを作ることとはできないから、少なくとも原系については有限自由度モデルを用いざるをえない。この場合に考えられるのは、実測データによる調整過程にいわゆる Cauchy の

収束定理と同様の考え方を適用すること、具体的には十分自由度の高い二つの異なる原系により調整を行い、両結果が近いかな否かを見ることであろう。しかしこの方法では極限值が妥当であるかな否かわからない。そこで収束する状況を直接見るという立場からは一歩後退するが、収束を保証する位相構造としてはより基本的な性質、すなわち

- (1) 同一自由度の原系と対象系では、調整すべき正しい箇所を探し出し、妥当な量の調整が行えるか？
- (2) “近い” 原系による調整は “近い” 結果を生むか？

を原系、対象系とも有限自由度の範囲内で調べることにする。これは調整過程を、与えられたモデルから調整量への一つの写像と見るとき、この写像の連続性を

Fig. 3 Structural models used in the adjustment between different degrees of freedom structures

Fig. 4 Values of index obtained in the adjustment in Fig. 3

保証するものにほかならない。これが保証されれば、モデル自身の収束性は有限要素法の理論によって保証されているから、調整量の収束も保証される。ここで原系どうしの“近さ”の定義が問題になるが、以下のような形で感覚的に判断する。いま図3に示す5種類のモデルを用意する。モデルは2次元的に表してあるが、すべて図5と同様の薄板要素を用いた3次元モデルである。いま図中の(E)を対象系とし、他の(A)~(D)を原系とする。原系は更に、(B),(D)の自由度の高いグループと、それと“近い”(A),(C)の自由度の低いグループに分かれる。自由度の高いグループは対象系と同一自由度である。またこれら5種類のモデルはすべて地面-ベッド間、ベッド-コラム間、コラム-ヘッド間にはり要素をもち、(E)の対象系と(A)~(D)の原系とは、図中の(E)に○印をした地面-ベッド間とベッド-コラム間のはりの剛性が異なる。したがって対象系と自由度の等しい(B),(D)のグループについては、これらのはりの剛性を直すことが妥当な調整になる。第1点として、これが調整理論により可能か否かをまず検討する。具体的には正しい箇所を調整する場合(B)と、コラム-ヘッド間の間違った箇所

Fig. 5 Structural models used to verify the effectiveness of adjustment

で調整する場合(D)とを試み、Indexの大小により(D)が廃棄できるか、また(B)では妥当な調整量が得られるかを見る。調整に使用するモードは低次側3モード、節点変位は(E)に○印をした12節点の36変位及びこれに対応する(B),(D)の変位とする。(B),(D)については更に調整箇所の相対変位も用いる。次に第2の点を調べるため、対象系(E)に対し自由度の低い(A),(C)の原系で(B),(D)の時と同様の調整を試みる。ここで(A)は(B)と、(C)は(D)と同一箇所での調整をする。このとき(A)と(B),(C)と(D)の各々の結果が対応し、近いものであれば、上述の第2点も確認されたと考える。ただしこの場合にも近さの解釈が問題になるが、ここでは問題の定性的性格に重点を置く意味から、Indexの値の近さに注目する。図4は、このときのIndexの値を求めたものである。図中(1)より、対象系と同一自由度の原系ならIndexの大小により正しい調整箇所が指摘できること、及びモデル(B)における調整量が誤差0.3%程度で求まることから、まず上述の第1の点が確認できる。次に図の(1)と(2)の対応が良好であることより、第2の点についてもほぼ要件を満たしていると言える。

3.3 調整モデルによる構造変更シミュレーション

調整されたモデルの有効性を確認するため、図5(1)に示す358節点のモデルを対象系、同図(2)に示す192節点のモデルを原系として調整を行い、調整なしのモデルおよび調整後のモデルによる構造変更シミュレーションの結果を、対象系での変更後の結果(真値)

Fig. 6 Comparison of the dynamic characteristics of a modified design structure produced after adjustment and without adjustment

と比較する。調整は地面-ベッド間とベッド-コラム間のはり要素（断面積 314 mm^2 ）で行い、調整には各々の構造の低次 2 モードの動剛性のうち図中に○印をした 8 節点の並進変位を用いた。図 6 左側に調整前の原系および対象系の固有振動数を示す。使用したはり要素の剛性は原系、対象系とも同一であるが、構造の自由度が異なるため動剛性に差が出る。そこでこの状態で得られた調整量で原系を修正し、更にこのモデルに対してヘッドの突出し量を大きくするという構造変更を行ったときの動剛性を、調整しないモデルおよび対象系に対し同様の構造変更を行った結果と比較して同図右側に示す。図を見ると、調整されたモデルの動剛性は調整なしの場合よりも対象系のそれに近く、調整によりモデルの予測精度が向上していることがわかる。

3.4 実測データによる調整

立型マシニングセンタを対象系、その 358 節点の有限要素法モデルを原系として調整を行った。このとき

の結果を図 7 に示す。実測値は、インパクト加振データをモーダル解析器（ZONIC 社）により処理し、低次 2 モードの動剛性を得た。調整に使用した変位は、図中に○印をした 8 点の水平 2 方向 16 変位である。また解析モデルの材料定数は、実機に対応させてベッド部分を鋼板（縦弾性率 $2.058 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ ）、それ以外の部分を鋳鉄（縦弾性率 $1.176 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ ）とし、外形寸法や板厚なども実機によった。またモデル内には地面-ベッド間とベッド-コラム間に各 6 本ずつ調整用のはり（初期縦弾性率 $1.470 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$ 、断面積 314 mm^2 ）を挿入し、これらのはりの剛性は調整の際も共通として扱った。このようにして得られた調整量をもとに解析モデル内のはりの剛性値を修正し、再解析した結果を同図右側に示す。図より、調整後の動剛性が実測値に近づき、より信頼性の高い現実的なモデルになっていることがわかる。

4. 結 論

実測データに基づいて解析モデルを調整改良し、以後の動剛性シミュレーションの信頼性を向上させるという考え方と具体的手法を提案した。得られた成果は以下の通りである。

- (1) 構造の低次の、しかも一部の箇所得られた動剛性により正しい箇所での妥当な調整が行える。
- (2) 実機を対象とする場合、解析モデルを詳細なものにすれば、得られる結果も真の解に近づく。
- (3) 調整後のモデルにより、構造変更シミュレーションが高次モードまで精度良く行える。

謝 辞

本研究を進めるにあたり御助力いただいた(株)トヤマキカイの大西、丹治、温井、茂古沼の各氏に感謝する。なお本研究の一部は文部省科学研究費補助金（奨励研究 (A)）の交付を受けて実施したことを付記する。

【付 録】

本文式 (22) を導く。いま完全なデータが与えられて $[G]$ が構成できるときは、その一部のデータから $[G_r^*]$ も構成できること、また $[G]$ から $[G_r^*]$ は一意に定まること（逆は成立しない）に注意する。この $[G]$ から $[G_r^*]$ への対応を $\phi: [G] \rightarrow [G_r^*]$ で表す。次に 3 種類の系、系 1、系 2、系 3 があるとし、系 1 から系 2

Fig. 7 Adjustment by using experimental data obtained with modal analysis

への変換で $[G_1]$ が、系2から系3への変換で $[G_2]$ が得られたとする。このときこれに対応して $\varphi([G_1])$, $\varphi([G_2])$ も得られる。そこで、この対応を保ったまま系1→系2→系3の変換を引き続き行くと、対応 $[G_1][G_2] \rightarrow \varphi([G_1])\varphi([G_2])$ が得られる。一方、これを系1から系3への直接的な変換と見て対応 $[G_1][G_2] \rightarrow \varphi([G_1][G_2])$ を得る。ところが変換 $[G_1][G_2]$ に対応するものは唯一であったから

$$\varphi([G_1][G_2]) = \varphi([G_1])\varphi([G_2]) \quad (\text{付1})$$

が成り立つ。このとき $[G_2] = [1_N]$ とすれば、任意の $[G]$ に対し

$$\varphi([G][1_N]) = \varphi([G]) = \varphi([G])\varphi([1_N])$$

が成り立つから

$$\varphi([1_N]) = [1_r] \quad (\text{付2})$$

となる。

そこで次に N 次正値対称行列の集合を $s^{(N)}$ とし、 $[S] \in s^{(N)}$ に対する $[G]$ の作用 $\rho_{[G]}: s^{(N)} \rightarrow s^{(N)}$ を

$$\rho_{[G]}([S]) = [G][S][G]^T \quad (\text{付3})$$

で定義する。このとき共通の固有値をもつ任意の $[S]$, $[S'] \in s^{(N)}$ は、適当な $\rho_{[G]}$ により変換可能である。これは $[S]$, $[S']$ の直交行列による対角化 $[U_s][S][U_s]^T$

$= [U_s][S'][U_s]^T$ に対し、 $[G] = [U_s]^{-1}[U_s]$ とすれば明らかである。更に任意の $[S] \in s^{(N)}$ に対し、その左上 $r \times r$ 部分を抜き出す射影子を p_r とする。すると任意の $[G]$ による $p_r([S])$ への $s^{(r)}$ 上での作用 $\rho_{\varphi([G])}$ は $\varphi([G])p_r([S])\varphi([G])^T \in s^{(r)}$ となるから、 $p_r([S'])$ が $p_r([S])$ と共通の固有値をもつとして

$$p_r([S']) = \varphi([G])p_r([S])\varphi([G])^T \quad (\text{付4})$$

を満たす $[S'] \in s^{(N)}$ が存在する。いまこの条件を満たすものとして $[S]$ から r 次元不変部分空間をもつ (r 次と $N-r$ 次のブロック対角行列となる) $[G']$ による作用 $\rho_{[G']}$ で変換されたものをとることができるから、(付4)で $[S'] = [G'] [S] [G']^T$ として

$$p_r([G'] [S] [G']^T) = \varphi([G])p_r([S])\varphi([G])^T \quad (\text{付5})$$

となる。ここで更に $[G] = [G''] [G']$ とし (付1) を用いると

$$\begin{aligned} p_r([G'] [S] [G']^T) &= \varphi([G''])\varphi([G'])p_r([S])\varphi([G'])^T \\ &\quad \times \varphi([G''])^T \end{aligned} \quad (\text{付6})$$

$[G]$ は任意でよかったから、上記の条件をみたす $[G']$ として $[G'] = [1_N]$ となるように $[G]$ をとれば、(付2)より

$$p_r([S]) = \varphi([G''])p_r([S])\varphi([G''])^T \quad (\text{付7})$$

ところが (付7) で $[S]$ は任意にとれるから、 $\varphi([G'']) = [1_r]$ でなければならない。したがって (付6) より、 r 次元不変部分空間をもつ $[G']$ について

$$\begin{aligned} p_r([G'] [S] [G']^T) &= \varphi([G''])p_r([S])\varphi([G''])^T \end{aligned} \quad (\text{付8})$$

ここで改めて $[G'] = [G]$, $[S] = [A]$ とすれば

$$([G][A][G]^T)_r = [G_r^*][A_r][G_r^*]^T \quad (\text{付9})$$

を得る。また r 次元不変部分空間をもたない $[G]$ についても、本文式 (5) の定義から、 $\Delta k_i \rightarrow 0$ ならば $[G] \rightarrow [1_N]$ ($[1_N]$ は r 次元不変部分空間をもつ) となるから、 Δk_i が大きくなければ

$$([G][A][G]^T)_r \approx [G_r^*][A_r][G_r^*]^T \quad (\text{付10})$$

が成り立つ。なお、 $[G]$ が r 次元不変部分空間をもつか否かは構造内のどこを調整するかに依存し、一概に言えない。

参 考 文 献

- 1) 例えば、特集 CAD/CAM を支える技術、精密機械、47、11 (1981)。
- 2) 稲村豊四郎：構造解析の現状と問題点、精密機械、50、2 (1984) 448。
- 3) 例えば、戸川隼人：有限要素法による振動解析、サイエンス社 (1975)。
- 4) 例えば、斎藤正彦：線型代数入門、東大出版会 (1966) 147。