アウトラインの入力による自由曲面の設計方式*

塩谷景一** 山縣敬一*** 牧之内三郎***

A Method of Generating a Sculptured Surface from Outline

Keichi SHIOTANI, Keiichi YAMAGATA and Saburo MAKINOCHI

This paper describes a new mathematical theory for generating a sculptured surface defined by B-spline, and the application of this theory to practical design and manufacturing. The initial curved surface is constructed easily by blending two or more outlines. When outlines are blended, special functions introduced in this paper and implied in the equation for curved surfaces, control the shape of surfaces globally. It is possible to control the shape of those locally too. This method is analogous to the way used in early work. Namely, adjusting vertices of the polygon is used to control the shape locally. The system applied this theory can generate easily a sculptured surface desired by designers.

Key words: CAD, CAM, sculptured surface, curved surface, computer program, algorithm

1. 結 言

B-spline を用いた自由曲線あるいは曲面を実際の設計に応用する場合、二つの点が考慮されなければならない。一つは制御多角形と曲線の幾何学的関係を直感的に把握しやすいものにするのである。これにより、B-spline 曲線の特徴である局所的形状制御を有効に使うことができ、設計者と計算機とのマンマシン・インタフェースの向上を図ることができる。第二の点は、設計者が初期曲面を作るときの入力過程の問題である。あらかじめ数値データがある場合には通過点を与えるという入力方法も有効であるが、この方法には多くの労力が要求される。もともと設計者が、形状の全体的なイメージを持っている場合には、通過点の入力はわずらわしいものであり、もっと簡便な方法が考えられなければならない。この点については、山口¹⁾⁻³⁾が問題として取り上げ、いくつかの提案を行っている。

本研究では、まず、応用上重要なノットの間隔がすべて1であるユニフォーム B-spline 曲線を取り上げ、制御多角形との幾何学的関係を明らかにする。ここでは、曲線の存在領域、通過点、接線ベクトルと制御多角形の関係が明確に示されると共に、幾何学的な意味

に密着した新しい計算式を導入する。

次に、これを曲面の場合に適用すると共に、B-spline 曲面創成の入力過程について新しい方法を提案する。具体的には2本のアウトラインと大域的な形状制御を行ういくつかのパラメータの入力により、いろいろな特徴を持つ初期曲面が容易に作成できることを示す。

2. ユニフォーム B-spline の計算法

以下に述べる曲線式は B-spline の特別な場合（ノット間隔がすべて1）である。あえてこれを取り上げる理由は、応用上重要であることと、議論をこの場合に限ることによって、制御多角形と曲線の幾何学的関係が明確になるからである。ここでは、煩雑さを避けるため、用途の多いオーダ4の場合について具体的に述べ、補足的にオーダ3の場合についても触れる。

2.1 幾何学的な曲線の定義

ここでは、曲線を幾何学的に定義する。オーダが3の場合を図1(a)に示す。 P_{i-2} , P_{i-1} , P_i を制御頂点とすると、 P_{i-2} と P_{i-1} の中点と P_{i-1} を結ぶ線分を $s:1-s$ に内分する点を $P_{i-1}^{[1]}$ とする。同様に P_{i-1} と P_i の中点を求め、 P_{i-1} とこの中点を結ぶ線分を $s:1-s$ に内分する点を $P_i^{[1]}$ とする。 s を0から1まで動かすと、 $P_{i-1}^{[1]}$ と $P_i^{[1]}$ は制御頂点を結ぶ線分上で実線の部分を図に示すように動く。このとき、 $P_{i-1}^{[1]}$ と $P_i^{[1]}$ を結ぶ線分を $s:1-s$ に内分する点 $C(s)$ の軌跡によって曲線が定義される。すなわち、式で表せば、一つの曲線セグメントは次のようになる。

* 原稿受付 昭和60年2月7日、昭和56年度精機学会秋季大会学術講演会（昭和56年11月5日）および昭和57年度精機学会春季大会学術講演会（昭和57年3月22日）にて発表

** 正会員 三菱電機(株) (尼崎市塚口本町8-1-1)

*** 正会員 大阪大学工学部 (吹田市山田丘2-1)

(a) A third order curve

(b) A fourth order curve

Fig. 1 A geometrical generation of a point on the curve

$$C(s) = s \cdot P_{i-1}^{[1]}(s) + (1-s) \cdot P_{i-2}^{[1]}(s) \quad (1)$$

$$0 \leq s \leq 1$$

オーダー 4 の場合を図 1 (b) に示す。制御頂点 4 点が与えられたとき、それらを結ぶ線分のそれぞれを 3 等分して、実線で示した部分を動く点を考える。すなわち、

$$P_{i-2}^{[1]}(s) = (1-s) \cdot \frac{2P_{i-2} + P_{i-3}}{3} + s \cdot P_{i-2} \quad (2)$$

$$P_{i-1}^{[1]}(s) = (1-s) \cdot \frac{P_{i-1} + 2P_{i-2}}{3} + s \cdot \frac{2P_{i-1} + P_{i-2}}{3} \quad (3)$$

$$P_i^{[1]}(s) = (1-s) \cdot P_{i-1} + s \cdot \frac{P_i + 2P_{i-1}}{3} \quad (4)$$

である。次に、 s によって定められるこれら 3 点を用いて、オーダー 3 と同じように $P_{i-1}^{[2]}(s)$ と $P_i^{[2]}(s)$ を求める。

$$P_{i-1}^{[2]}(s) = (1-s) \cdot \frac{P_{i-2}^{[1]}(s) + P_{i-1}^{[1]}(s)}{2} + s \cdot P_{i-1}^{[1]}(s) \quad (5)$$

$$P_i^{[2]}(s) = (1-s) \cdot P_{i-1}^{[1]}(s) + s \cdot \frac{P_{i-1}^{[1]}(s) + P_i^{[1]}(s)}{2} \quad (6)$$

これら 2 点を用いると一つの曲線セグメントは次式で与えられる。

$$C(s) = s \cdot P_i^{[2]}(s) + (1-s) \cdot P_{i-1}^{[2]}(s) \quad (7)$$

$$0 \leq s \leq 1$$

このように幾何学的に曲線を定義する方法は、Cox

(a) A third order curve

(b) A fourth order curve

Fig. 2 Region of existing a curve

と De Boor⁴⁾ による線形計算の繰返しを用いた B-spline 曲線の計算法に基づいている。しかし、論議をノットの間隔が 1 である場合に限ってしまうと、例えば曲線の存在する領域は図 2 に示すように限定される。

2.2 曲線の計算式

上に述べた曲線の定義はオーダーが大きくなっても同様に定義できるが、幾何学的な説明は煩雑になるので省略する。このような線形計算の繰返しで曲線を定義することにすれば、一般にオーダー M の曲線は形式的に

$$C_i^M(s) = s \cdot P_{i-1}^{[M-2]}(s) + (1-s) \cdot P_{i-2}^{[M-2]}(s) \\ = P_{i-1}^{[M-2]}(s) + s \cdot \{P_{i-1}^{[M-2]}(s) - P_{i-2}^{[M-2]}(s)\} \\ = f_i^M(s) + s \cdot g_i^M(s) \quad 0 \leq s \leq 1 \quad (8)$$

と書くことができる。

オーダーが 3 と 4 の場合について、ベクトル $f_i^M(s)$ と $g_i^M(s)$ の持つ幾何学的意味を図 3 に示す。例えばオーダー 4 の場合、

$$\left. \begin{aligned} f_i^4(s) &= P_{i-1}^{[2]}(s) \\ g_i^4(s) &= P_i^{[2]}(s) - P_{i-1}^{[2]}(s) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

であり、 $g_i^4(s)$ はパラメータ s を指定したときの曲線上のその点における接線の方向を示す。一般に曲線上の任意の点の接線ベクトルは $(M-1)g_i^M(s)$ で与えられる。

接線ベクトルを陽に表した式 (8) の形式で曲線を表すものとして、幾何学的定義から計算式を誘導すると次のようになる。 $f_i^M(s)$ 、 $g_i^M(s)$ 共に制御頂点を用いて、図に対応させれば、

Fig. 6 Calculation of P_{kl} coordinates

3. 曲面の設計

本研究では、数本の空間曲線、および新たに導入した形状制御関数を用いて、初期曲面を創成する手法を提案する。この時、空間曲線として、曲面形状の特徴をよく表す曲線を入力することによって、設計意図に沿う初期曲面を容易に作成することができる。以下ではこの空間曲線をアウトラインと呼ぶ。

3.1 曲面の数式表現

数本の空間曲線（アウトライン）から曲面形状を定める方法について述べる。

空間曲線は、式 (8), (10), (11) から

$$C_i^M(s) = \sum_{l=i-(M-1)}^i P_{kl} (F_l^{[0]}(s) + s \cdot G_l^{[0]}(s)) \quad (13)$$

となる。このとき、曲面の数式表現は、カルテジアン積曲面 (Cartesian product surface) として、パラメトリックに式 (14) に示す形となる。曲面を成分 $\{x, y, z\}$ を持つベクトル $\mathbf{s}_{ij}^M(s, t)$ で表す。

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{ij}^M(s, t) = & \sum_{k=i-(M-1)}^i \sum_{l=j-(M-1)}^j P_{kl} (F_k^{[0]}(s) \\ & + s \cdot G_k^{[0]}(s)) \cdot (F_l^{[0]}(t) + t \cdot G_l^{[0]}(t)) \\ & 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1 \quad (14) \end{aligned}$$

$F_k^{[0]}(s)$, $G_k^{[0]}(s)$, $F_l^{[0]}(t)$, $G_l^{[0]}(t)$ は式 (12) で計算される。オーダ M を与えれば、 $F_k^{[0]}(s)$, $G_k^{[0]}(s)$, $F_l^{[0]}(t)$, $G_l^{[0]}(t)$ の関数の型は決まる。つまり、曲面形状を定めるには、式 (14) の 2 次元の制御ネット $\{P_{kl}\}$ を決定すればよい。

本研究では入力されたアウトラインから制御ネットを自動的に生成する方法を提案する。説明の便宜上 2 本のアウトラインから 2 次元の制御ネット $\{P_{kl}\}$ を決定する場合を考える。アウトラインは、図 6 に示すように制御頂点 $\{U_1, U_2, \dots, U_g, \dots, U_m\}$ および $\{V_1, V_2, \dots, V_h, \dots, V_n\}$ によって式 (13) で表現される。これらのアウトラインの制御頂点だけから制御ネット $\{P_{kl}\}$ を合成する。

説明の便宜上、入力したアウトラインは適当な座標

系 $x-y-z$ を用いると、 z に関して一価関数であるものとする。この座標系の $z=0$ なる $x-y$ 平面に 2 本のアウトラインの制御多角形を投影したときの交点を O とし、座標を $(x^0, y^0, 0)$ とする (図 6)。

このとき

$$\begin{aligned} P_{kl} &= \{x_{kl}, y_{kl}, z_{kl}\} \\ U_g &= \{x_g^u, y_g^u, z_g^u\} \quad g=1, 2, \dots, m \\ V_h &= \{x_h^v, y_h^v, z_h^v\} \quad h=1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

で表す。

ここで、 x_{kl}, y_{kl} は次式で求める。

$$\begin{cases} x_{kl} = x_g^u + x_h^v - x^0 \\ y_{kl} = y_g^u + y_h^v - y^0 \end{cases} \quad (15)$$

ただし、添字の関係は $k=g, l=h$ とする。この結果、 $m \times n$ 個の x_{kl}, y_{kl} が計算される。次に各 x_{kl}, y_{kl} に対応する z_{kl} を計算すれば $\{P_{kl}\}$ は決定できる。ここで、式 (16), (17) で計算される ΔQ_{gkl} , ΔR_{hkl} を導入する*。

$$\frac{1}{\Delta Q_{gkl}} = \frac{s_{gkl}^Q}{\sqrt{(x_{kl} - x_g^u)^2 + (y_{kl} - y_g^u)^2}} \quad g=1, 2, \dots, m \quad (16)$$

$$\frac{1}{\Delta R_{hkl}} = \frac{s_{hkl}^R}{\sqrt{(x_{kl} - x_h^v)^2 + (y_{kl} - y_h^v)^2}} \quad h=1, 2, \dots, n \quad (17)$$

s_{gkl}^Q, s_{hkl}^R については後述する。式 (16), (17) で定まる ΔQ_{gkl} , ΔR_{hkl} を用いて式 (18) で z_{kl} を計算することにする。

$$z_{kl} = \frac{\sum_{g=1}^m \frac{z_g^u}{\Delta Q_{gkl}} + \sum_{h=1}^n \frac{z_h^v}{\Delta R_{hkl}}}{\sum_{g=1}^m \frac{1}{\Delta Q_{gkl}} + \sum_{h=1}^n \frac{1}{\Delta R_{hkl}}} \quad (18)$$

式 (18) によって z_{kl} を計算する考え方は、式 (16), (17) で導入した計算式において $s_{gkl}^Q=1, s_{hkl}^R=1$ とすると、アウトラインの制御頂点の z 座標値に距離の重みを付与して $\{P_{kl}\}$ の z 座標値を決定するものである。 s_{gkl}^Q, s_{hkl}^R は距離の重みを制御する関数として導入したものであり、形状制御関数と名付ける。

3.2 曲面創成実例

式 (16), (17) における形状制御関数の一例として式 (19), (20) を考える。

$$s_{gkl}^Q = \omega^Q \cdot \delta_{gk} \quad (19)$$

$$s_{hkl}^R = \omega^R \cdot \delta_{hl} \quad (20)$$

ここで、 δ_{gk}, δ_{hl} はクロネッカ (Kronecker) の δ である。 ω^Q, ω^R は、一方のアウトラインの特徴を他方に比べて強める場合に用いる。 $\{P_{kl}\}$ の決定に際して (図

* 式 (15) で用いた $k=g, l=h$ の添字の関係は、式 (16), (17), (18) においては用いない。

Fig. 7 Modifications of curved surface by positioning outlines

Fig. 8 Modifications of curved surface by "shape control function"

6 参照), 式 (19), (20) で示した形状制御関数を用いると, 入力データとして与えるアウトラインの制御頂点 $\{U_1, U_2, \dots, U_g, \dots, U_m\}$ および $\{V_1, V_2, \dots, V_h, \dots, V_n\}$ において, U_h, V_l のみが P_{kl} の決定* に関与する。

図 7 に, アウトラインの曲面上の位置 (入力位置) を変えることによる, 創成曲面の変化の一例を示す。

本例では, 図 7 (a) に示す互いに直交する 2 本のアウトラインを用いた。図 7 (b) の (i)~(iii) に示す曲面上の位置に図 7 (a) に示すアウトラインを定義した場合に創成される曲面形状を, 図 7 (c)~(e) に示す。

* $\{P_{kl}\}$ という集合を表すのではなく, P_{kl} という一つのベクトルの決定において, U_h, V_l が関与することを述べている。

形状制御関数は, $\omega^R = \omega^Q$ とおいた式 (19), (20) を用いた。

次に形状制御関数による創成曲面の変化例を示す。

図 8 (f) に示した曲面上の位置に, 図 7 (a) に示した形状のアウトラインを定義した場合を考える。形状制御関数は, 式 (19), (20) を用い, 式中の ω^R と ω^Q の比を曲面創成のための制御量とする。 ω^R, ω^Q の値を, 図 8 (g) に示すように変化させた場合の創成曲面の変化例を図 8 (a)~(e) に示す。

図 8 に示した創成曲面を見ると (a)→(e) へ移るに従って, 次第に y 方向のアウトラインから x 方向のアウトラインが曲面形状の特徴を強く表す形状となっていることがわかる。(a) と (e) の場合がその極端な例で, $\omega^R=0$ または $\omega^Q=0$ とすることにより, 一方のアウトラインの効果だけが現れ, 他方のアウトラインの効果は消滅している。

この例に見られるように, わずかのパラメータの変更によって, 大域的な性質の曲面を創り出すことが

できる点が, ここで提案している手法の特徴になっている。

4. 曲面設計・加工システムの構成

第 2 節及び第 3 節で述べた原理を応用した曲面設計・加工システムについて述べる。基本的に B-spline 曲線あるいは曲面を用いているので, 局所的制御も容易である。そのため, CRT ディスプレイを用いた対話処理により, 大域的制御と局所的制御の両方を併用して, 設計過程を進める。図 9 に示す適用例に従って, この過程を順を追いながら説明する。

まず, 図 9 (a), (b) に示すように, x 軸方向と y 軸方

Fig. 9 Examples of applications

向の2本のアウトラインを定める。これらは第2節で述べたノットの間隔が1であるオーダ4のB-spline曲線で、対話処理により制御頂点を動かせば、形状変更は自由にできる。次に設計者の持っている大域的なイメージから、曲面上に占めるアウトラインの位置(図9(c))と形状制御関数の重み ω^R と ω^Q を入力することによって、大域的なイメージの設計が行われる。

これで一応曲面の創成ができるわけであるが、一般に、大域的な制御だけで所望の曲面を創り出すことは

難しいので、一度画面に図9(d)に示すように、自動生成された制御ネットが表示される。設計の第2段階として、制御ネットに局所的に変更を加えて、設計者の意図する曲面を得る(図9(e))。基本的に、B-splineを用いた曲面であるから、局所的制御は従来から行われている手法であるが、大域的制御と併用するとより効果的に利用することができる。図9(f), (g), (h)はNC加工を行うための工具軌跡の生成と、実際の加工例を示したものである。

5. 結 言

B-spline による曲面モデルを実際の応用において取り扱う場合、設計者の手元には通過点のような数値データがないことが多く、初期曲面の創成に労力が費やされることがしばしば起こる。本研究では、曲面全体の特徴を表すアウトラインの入力によって、容易に所望の形状に近い曲面を創成する一つの手法を開発した。結論を要約すると以下ようになる。

- (1) 応用上有用なノットの間隔が1である B-spline 曲線について、接線ベクトルや曲線の通過点(曲線セグメントの端点)のような幾何学的特徴をよく表す量を陽に扱う形式で、新しい計算式を導いた。
- (2) アウトラインといくつかのパラメータという比較的少ない入力データを用いて、曲面の大域的制御が可能であることを示し、初期曲面の創成が容易に行えることが明らかになった。
- (3) 従来から使われている制御頂点の操作による局所的制御は大域的制御と併用して用いることができ、両手法を効果的に組み合わせることによって所望の曲面が比較的少ない労力で創成できると期待できる。
- (4) 実際に曲面設計から NC 加工に至るまでのシステムを構築し、本研究で提案した手法の有用性を確かめた。

[付 録]

$M=3$ のとき式 (12) と初期値から $F_i^{[0]}(s)$, $G_i^{[0]}(s)$ を計算する。

$$F_{i-1}^{[0]}(s) = 0 + \frac{s+i-(i-1)}{3-0-1} F_{i-1}^{[1]}(s) \\ = \frac{s+1}{2}$$

$$F_{i-2}^{[0]}(s) = \frac{3-0-i+(i-2)-s}{3-0-1} F_{i-1}^{[1]}(s) + 0 \\ = \frac{1-s}{2}$$

$$G_i^{[0]}(s) = 0 + \frac{s+i-(i)}{3-0-1} G_i^{[1]}(s) \\ = \frac{s}{2}$$

$$G_{i-1}^{[0]}(s) = \frac{3-0-i+(i-1)-s}{3-0-1} \cdot G_i^{[1]}(s)$$

$$+ \frac{s+i-(i-1)}{3-0-1} G_{i-1}^{[1]}(s) \\ = \frac{1-2s}{2}$$

$$G_{i-2}^{[0]}(s) = \frac{3-0-i+(i-2)-s}{3-0-1} G_{i-1}^{[0]}(s) + 0 \\ = \frac{s-1}{2}$$

式 (8), (10), (11) と上記結果から、

$$C_i^3(s) = \left\{ \left(\frac{1-s}{2} \right) + s \left(\frac{s-1}{2} \right) \right\} P_{i-2} \\ + \left\{ \left(\frac{s+1}{2} \right) + s \left(\frac{1-2s}{2} \right) \right\} P_{i-1} + s \cdot \frac{s}{2} P_i \\ = \frac{(s-1)^2}{2} P_{i-2} + \left(-s^2 + s + \frac{1}{2} \right) P_{i-1} + \frac{s^2}{2} P_i$$

となり、オーダ 3 の B-spline 曲線と一致する。

次にベクトル $\mathbf{g}_i^M$ が接線ベクトルの方向を示していることを示す。オーダ 3 のとき式 (8) から

$$\frac{dC_i^M(s)}{ds} = \frac{d}{ds} \{ s \cdot P_i^{[1]} + (1-s) \cdot P_{i-1}^{[1]} \} \\ = s \cdot \frac{dP_i^{[1]}}{ds} + (1-s) \frac{dP_{i-1}^{[1]}}{ds} + P_{i-1}^{[1]} - P_{i-1}^{[1]} \\ = s \cdot \frac{d}{ds} \left\{ s \cdot \frac{P_i + P_{i-1}}{2} + (1-s) P_{i-1} \right\} \\ + (1-s) \frac{d}{ds} \left\{ s \cdot P_{i-1} + (1-s) \frac{P_{i-1} + P_{i-2}}{2} \right\} \\ + P_{i-1}^{[1]} - P_{i-1}^{[1]} \\ = s \cdot \frac{P_i + P_{i-1}}{2} + (1-s) P_{i-1} \\ - \left\{ s \cdot P_{i-1} + (1-s) \frac{P_{i-1} + P_{i-2}}{2} \right\} \\ + P_{i-1}^{[1]} - P_{i-1}^{[1]} \\ = P_{i-1}^{[1]} - P_{i-1}^{[1]} + P_{i-1}^{[1]} - P_{i-1}^{[1]} \\ = 2(P_{i-1}^{[1]} - P_{i-1}^{[1]}) \\ = 2\mathbf{g}_i^3$$

と証明できる。

参 考 文 献

- 1) 山口富士夫：コンピュータディスプレイによる自由曲面の一設計方式(第1報)——B-spline 曲線に基づくカーブフィッティング, 精密機械, 43, 2 (1977) 168.
- 2) 山口富士夫：コンピュータディスプレイによる自由曲面の一設計方式(第2報)——曲線設計と初期曲面モデルの創成法(1), (2), 精密機械, 43, 9 (1977) 1005.
- 3) 山口富士夫：コンピュータディスプレイによる自由曲面の一設計方式(第3報)——初期曲面モデルの創成法(3)と曲面形状制御法, 精密機械, 43, 10 (1977) 1141.
- 4) M. G. Cox: The Numerical Evaluation of B-spline, J. Inst. Maths. Applics., 10, (1972) 134.