シェル形状モデリングのオイラーモデルに 関する研究*

古川 正志** 嘉数 侑昇*** 沖野 教郎***

A Study on Shell Geometric Modelling with the Euler Topology Characteristics

Masashi FURUKAWA, Yukinori KAKAZU and Norio OKINO

The paper represents the shell geometric modelling for sheet metal products and shell structured products. A modelling method for the shell geometry objects adopts the Euler topology based model firstly developed by Baumgart for the solid geometric modelling. The Euler characteristic equation for the shell geometric modelling is derived in the general form as $v-e+f-a=s-h$ and the Euler operations are introduced by the use of the derived equation. The newly developed Euler equation makes it possible to deal with holes and flaps within faces, which are not homeomorphic to the 2-dimensional simplex. Verification to the derived equation is discussed from the view point of the graph theory as well. Some examples show that the new equation is applicable to a variety of shell geometries with the holes and flaps. Furthermore, a surface orientability is discussed and a recognition algorithm is offered to get rid of unoriented surface geometries. This algorithm also makes a difference between inner edges and boundary edges in the shell.

Key words ; geometric modelling, CAD, shell model, Euler operation, boundary representation

1. 緒 言

三次元形状の数学モデルを計算機内部に構築し、工学的に必要な種々の形状処理問題に対して、この内部モデルを適用可能とする情報処理を形状モデリングと呼べば、形状モデリングは、CAD/CAM、コンピュータグラフィックスの発展の中で重要な位置を現在占めている。これは、物を作り出すという行為が、そのために必要な形状情報を作成することを本質的に含み、形状モデリングを要求していると考えられるからである。

こうして、形状モデリングに関する多くの研究^{2)~4)}が発表されて来ている。しかし、これらを検討するとその多くの研究は、立体(solid)形状に対するものである。一方、現実的な問題として広く多くの分野を眺望すれば、必ずしも立体による三次元形状表現を取り扱わなくてもよい形状対象が存在する。それらの例としては、殻(shell)で構成されるような形状、板金製

品、地図モデル等である。前二者は、厳密にみれば立体といえるが、その厚みを無視すると、立体によらない三次元形状表現である。本研究では、こうした厚みのない殻のみで構成される三次元形状(これを単にシェルと呼ぶ)に対して、オイラートポロジーを利用した形状モデリングの方法論を開発する。すなわち、シェルに対して、そのモデリングを保証する数学モデルとなるオイラー方程式を導き、それが種々のシェル形状に適用可能であることを示す(その中でも特に穴(hole)やフラップ(flap)の取扱いが可能であることを示す)。次いで、シェル形状の向き付け可能及び不可能面に関する取扱いと、これによって立体モデルでは生じない境界辺と内部辺の認識を論じる(図1)。

導入されたオイラー方程式については、シェル形状モデリングを実施するオイラーオペレータの導出を行う。

2. シェル形状モデリングのための オイラー方程式

シェルは、三次元ユークリッド空間(E^3)の部分集合としてモデル化される。モデルは、実在する物体を反映するので、コンパクトでレギュラーな点集合と仮定する。シェルモデルを表す点集合を X とすれば、

* 原稿受付 昭和59年11月30日, 昭和59年度精機学会春季大会学術講演会(昭和59年3月25日)にて発表

** 正会員 旭川工業高等専門学校(旭川市春光台2条2丁目)

*** 正会員 北海道大学工学部(札幌市北区北13条西8丁目)

(a) Solid geometric modelling (b) Shell geometric modelling

Fig. 1 Solid and shell geometric modelling

$$X = \{P : \text{Surf}(P) = 0, P \in E^3\} \quad (1)$$

と表現できる。すなわち、点集合 X は、ある曲面上の点集合に属する。ここで、 Surf は曲面を表す関数である。点集合 X は、トポロジカルな意味で、 E^2 のコンパクトでレギュラーな部分集合と等価である。こうして、シェルモデルは、向きづけられた 0-単体、1-単体、2-単体からなる 2 次元ホモロジー群によって表現される。

シェルモデルのためのオイラー方程式を導くため、多面体の形状モデリングに採用された Baumgart により導入されたオイラー方程式²⁾をまず検討する。

Baumgart のオイラー方程式は、

$$V - E + F = 2B - 2H \quad (2)$$

である。ここで、 V, E, F, B, H は、それぞれ多面体モデルの頂点数、辺数、面数、立体(多面体)数及び穴(種)数である。シェル形状は、薄い厚みを持つ立体形状の厚みを無限小としたものと考えられる。このとき、厚みを構成する面と辺は消失し、相対する 2 面は一致する。この操作を式 (2) に対して行うと、

$$v = V/2, e = E/3, f = F - e, s = B, h = H \quad (3)$$

の関係が得られる。ここで、 v, e, f, s 及び h は、この結果得られるシェルモデルの頂点数、辺数、面数、シェル数と穴数とする。式 (3) を式 (2) に代入すると、シェルモデルのためのオイラー方程式

$$2v - 2e + f - 2s + 2h = 0 \quad (4)$$

を得る。式 (4) で、シェルの面は表裏 2 面を別々に数えている。表裏 2 面を 1 面とし、このときの面数を f' と置けば、 $f = 2f'$ だから、これを式 (4) に代入して、

$$v - e + f' - s + h = 0 \quad (5)$$

を得る。以後 f' を f と記述し、式 (5) を

$$v - e + f - s + h = 0 \quad (6)$$

と表す。

シェルモデルのためのオイラー方程式は、式 (6) により表現される。しかし、このオイラー方程式は、Baumgart のオイラー方程式が、三次元単体に位相同形な多面体のみに適用可能であるのと同様、二次元単体に位相同形なシェル形状のみに適用可能である。式 (6) が、適用可能な場合と不可能な場合を図 2 に示す。

図 2 (g) は面内に穴がある場合であり、図 2 (h) は面内にフラップがある場合、図 2 (i) はフラップが一点で接する場合である。式 (6) をこれらの場合に適用するには、図 3 に示される破線のダミー辺を作成する必要がある。このことは、シェルモデルの統一的処理に不便であるのみならず、面内の穴と面に囲まれた穴を認識し区別する上でも不都合である。これは、式 (6) が、二次元単体に位相同形であるという制約から生じている。以下に、面内の穴及びフラップを取り扱えるより一般的なシェルモデルのオイラー方程式を導入する。

3. シェルモデルの拡張オイラー方程式

面内の穴及びフラップを面付属単体 (Associate face simplex) と名づける。これらを取り扱うため、式 (6) を

$$v_0 - e_0 + f_0 - s_0 + h_0 = 0 \quad (7)$$

と書き改める。まず、面内に穴がある場合を考える。このような穴の数が、シェル全体について n 個あるとする。各穴は、二次元単体に位相同形であると考えられるから、 i 番目の穴に関しては、

$$v_i - e_i + h_i - a_i = 0 \quad (8)$$

が成立する。式 (8) は、式 (6) に関して、面数の代わりに穴数を置き、穴数を 0 とし、シェル数の代わりに面付属単体数 a_i を置いたものである。 n 個の穴がある場合、式 (8) は、

$$\sum_{i=1}^n v_i - \sum_{i=1}^n e_i + \sum_{i=1}^n h_i - \sum_{i=1}^n a_i = 0 \quad (9)$$

と書ける。式 (7) に式 (9) を加えると

$$\sum_{i=0}^n v_i - \sum_{i=0}^n e_i + f_0 - s_0 + \sum_{i=0}^n h_i - \sum_{i=1}^n a_i = 0 \quad (10)$$

を得る。各項を

$$\left. \begin{aligned} v &= \sum_{i=0}^n v_i, & e &= \sum_{i=0}^n e_i, & f &= f_0 \\ s &= s_0, & h &= \sum_{i=0}^n h_i, & a &= \sum_{i=1}^n a_i \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

と置けば、式 (10) は、

$$v - e + f - a + h - s = 0 \quad (12)$$

となる。式 (12) を適用することで、面内の穴を処理可能とできる。

次にフラップについても、穴の取扱いと同じに考えよう。フラップの場合は、式 (8) において、穴数を面数と考えればよい。今、 m 個のフラップがあるとすれば、 i 番目のフラップに関して、

$$v_i - e_i + f_i - a_i = 0 \quad (13)$$

が、式 (8) と同様に成立する。 m 個のフラップがある

(a) A sheet (A face)

$$\begin{array}{cccccc} v & e & f & s & h & z \\ 4 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

(b) Two faces

$$\begin{array}{cccccc} v & e & f & s & h & z \\ 6 & 7 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

(c) A bin with five faces

$$\begin{array}{cccccc} v & e & f & s & h & z \\ 8 & 12 & 5 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

(d) Faces with a hole

$$\begin{array}{cccccc} v & e & f & s & h & z \\ 8 & 12 & 4 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

(e) Faces with two holes

$$\begin{array}{cccccc} v & e & f & s & h & z \\ 14 & 23 & 8 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

(f) A hole surrounded by three faces

$$\begin{array}{cccccc} v & e & f & s & h & z \\ 6 & 9 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

(g) A face with a hole

$$\begin{array}{cccccc} v & e & f & s & h & z \\ 8 & 8 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

(h) A flap

$$\begin{array}{cccccc} v & e & f & s & h & z \\ 8 & 8 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

(i) A flap touching a face with a point

$$\begin{array}{cccccc} v & e & f & s & h & z \\ 7 & 7 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Fig. 2 Examples applied by the Eq. (6), where $z = v - e + f - s + h$. If z is not equal to zero, the Eq. (6) is not applicable

(a) A hole with a dummy edge

(b) A flap with a dummy edge

Fig. 3 Two cases applicable by the Eq. (6) by adding dummy edges

とすれば、式 (13) は、

$$\sum_{i=1}^m v_i - \sum_{i=1}^m e_i + \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{i=1}^m a_i = 0 \quad (14)$$

となる。式 (7) と式 (14) を加えて、

$$\sum_{i=0}^m v_i - \sum_{i=0}^m e_i + \sum_{i=0}^m f_i - s_0 - h_0 - \sum_{i=1}^m a_i = 0 \quad (15)$$

を得る。各項を

$$\left. \begin{array}{l} v = \sum_{i=0}^m v_i, \quad e = \sum_{i=0}^m e_i, \quad f = \sum_{i=0}^m f_i \\ s = s_0, \quad h = h_0, \quad a = \sum_{i=1}^m a_i \end{array} \right\} \quad (16)$$

と置けば、

$$v - e + f - a + h - s = 0 \quad (17)$$

を得、これがフラップを取り扱うオイラー方程式となる。式 (7)、(9)、(15) を加え合わせ、各項をそれぞれ v 、 e 、 f 、 a 、 h 、 s と置けば、やはり式 (17) を得る。こうして、式 (17) により、面内の穴、フラップを統一的に取り扱うオイラー方程式を導くことができる。式 (17) を適用した例を図 4 に示す。

4. 拡張シェルオイラー方程式のオイラー・ポアンカレの式による検証

二次元多面体におけるオイラー・ポアンカレの式は、

(a) A sheet

$$\begin{array}{cccccccc} v & e & f & a & s & h & z \\ 4 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

(b) Two faces

$$\begin{array}{cccccccc} v & e & f & a & s & h & z \\ 6 & 7 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

(c) A bin with five faces

$$\begin{array}{cccccccc} v & e & f & a & s & h & z \\ 8 & 12 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

(d) A face with a hole

$$\begin{array}{cccccccc} v & e & f & a & s & h & z \\ 8 & 8 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

(e) A face with two holes

$$\begin{array}{cccccccc} v & e & f & a & s & h & z \\ 12 & 12 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

(f) A hole surrounded by three faces

$$\begin{array}{cccccccc} v & e & f & a & s & h & z \\ 6 & 9 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

(g) A flap

$$\begin{array}{cccccccc} v & e & f & a & s & h & z \\ 8 & 8 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

(h) Two flaps

$$\begin{array}{cccccccc} v & e & f & a & s & h & z \\ 12 & 12 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

(i) A handle attached on a face

$$\begin{array}{cccccccc} v & e & f & a & s & h & z \\ 8 & 8 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

(j) A flap touching a face with a point

$$\begin{array}{cccccccc} v & e & f & a & s & h & z \\ 7 & 7 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Fig. 4 Examples applied by the Eq. (17), where $z = v - e + f - a + h - s$

$$\sum_{i=0}^2 (-1)^i \alpha_i = \sum_{i=0}^2 (-1)^i \beta_i \quad (18)$$

として知られる。ここで、 α_i は i 次元単体の数、 β_i はベッチ数である。シェル形状が穴を持たず、またフラップも持たないとき、式 (18) はシェル形状が円板と位相同形であることを考えて、

$$v - e + f = 1 \quad (19)$$

が知られている。ここに、 $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$ である。もし s 個のシェル形状があれば、これらを連結して位相同形とすればよい。このとき、図 5 に示すように連結すると、頂点、辺、面数の関係は、

$$v - (e + 2(s - 1)) + (f + (s - 1)) = 1 \quad (20)$$

となる。式 (20) を整理すると、

Fig. 5 Joining shells

$$v - e + f = s \quad (21)$$

を得る。グラフ理論では $\beta_0 = s$ (成分数), $\beta_1 = \beta_2 = 0$ として知られている。次に、各面がすべて二次元単体に位相同形で、穴が h_0 個ある場合を考えよう。このと

Fig. 6 Imaginary edges joining holes

Fig. 7 Joining an embedded flap in a face with an imaginary edge

き, h_0 個の面で穴をふさげば, シェル形状は, 円板と位相同形となる. このとき, 面数は, $(f+h_0)$ 個となる. これを式 (21) に適用すると,

$$v-e+(f+h_0)=s \quad (22)$$

となり, 整理して

$$v-e+f=s-h_0 \quad (23)$$

を得る.

面内に, h 個の穴のある場合を考える. このとき, すべての面が二次元単体に位相同形であるように, 穴をふさぎ, 図 6 のように仮想の辺を作成する. 仮想の辺数を a_h と置き, 式 (23) に適用すると, 辺数は $(e+a_h)$ 個, 面数は $(f+h_1)$ 個 (但し, $a_h=h_1$) から

$$v-(e+a_h)+(f+h_1)=s-h_0 \quad (24)$$

となり, これを整理して

$$v-e+f-a_h=s-h_0-h_1 \quad (25)$$

を得る.

フラップがある場合を最後に考える. フラップ数が f_f 個あるとしよう. 円板と位相同形とするため, フラップを, そのフラップを含む面より小さくし, フラップを面内に倒して埋め込むと, 面内に一つの面ができる. これを一つの面と数え, すべての面を二次元単体と位相同形とするため, 穴の場合と同じように a_f 個の仮想辺を, 図 7 に示されるように作成する. こうすると, 辺数は $(e+a_f)$ 個, 面数は $(f+f_f)$ 個 (但し, $a_f=f_f$) となる. 式 (25) にこれを適用すると,

$$v-(e+a_f)+(f+f_f)-a_h=s-h_0-h_1 \quad (26)$$

となる. これを整理すると,

$$v-e+(f+f_f)=s-(h_0+h_1)+(a_h+a_f) \quad (27)$$

を得る. $f+f_f$ を f , $h=h_0+h_1$, $a=a_f+a_h$ とすれば, 式 (27) は,

$$v-e+f=s-h+a \quad (28)$$

となり, 式 (17) を得る.

5. シェルオイラーオペレータの導出

式 (17) を

$$z(\mathbf{X})=v-e+f-a+h-s=0 \quad (29)$$

と置きなおす. オイラーオペレータは, 式 (29) 上の格子点間の遷移ベクトルに相当する. この遷移ベクトルを $\mathbf{d}$ とすると, 式 (29) から

$$\nabla z \cdot \mathbf{d} = 0 \quad (30)$$

$\nabla z = (v, e, f, a, h, s)$ を得る. 超平面式 (29) は, 六次元超平面だから, 5 つの独立なベクトルで張ることができる. 今, $\mathbf{d} = \sum_{i=1}^5 t_i \cdot \mathbf{d}_i$ とし, 式 (30) に代入すると,

$$\nabla z \cdot \left(\sum_{i=1}^5 t_i \cdot \mathbf{d}_i \right) = 0 \quad (31)$$

から,

$$\nabla z \cdot \mathbf{d}_i = 0, \quad i=1, 2, \dots, 5 \quad (32)$$

を得る. $\mathbf{d}_i$ の成分を d_{ij} , ($j=1, 2, \dots, 6$), $d_{ij}=0$ 又は 1 とし, これを基本オイラーベクトルと名づければ, すべてのオイラーオペレータは, 基本オイラーベクトルの組合せに相当する. 基本オイラーベクトルに相当する操作を基本オイラーオペレータと名づける. 頂点, 辺等の作成に m , 消去に k を冠し, 基本オイラーベクトルとオペレータを作成すると, 例えば表 1 のように選ぶことができる.

6. 向き付け不可能面

立体のモデリングでは, ベッチ数 β_1 を計算し, それが奇数か偶数かで向き付け不可能な面を含むかどうかを知ることができる. ここで, 向き付け不可能面とは, メービウス帯あるいはクラインの壺のような表裏の区別のない面を指す. 一方, シェル形状モデリングでは, メービウス帯は, 頂点, 辺等が 2 倍の数を持つ円筒と位相同形となるため, ベッチ数の計算による識別はできない. 機械設計では, こうした形状は, ほとんど生じないが計算機内にモデルを作成しようとすれば, その可能性が生じる. 従って, これを排除する必要がある. この識別アルゴリズムは, 以下のように実行できる.

今, 与えられた曲面のモデルを A と置く. これを三角形に位相同形な多角形 (面) A_i ($i=1, 2, \dots, k$) に分割し,

$$A = \bigcup_{i=1}^k A_i \quad (33)$$

とする. A_i と A_j が隣接しているとすれば, A_i と A_j は共通辺を持つ. 共通辺を e_{ijw} ($w=1, 2, \dots, l$) とし,

Table 1 Basic Euler operators for shell geometric modeling. An afs means Associate Face Simplex in the label.

Euler operator	Transition vector						Comments
	<i>v</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>a</i>	<i>h</i>	<i>s</i>	
mvs	1	0	0	0	0	1	make vertex, shell
mve	1	1	0	0	0	0	make vertex, edge
mvf	1	0	1	0	0	1	make vertex, face
meh	0	1	0	0	1	0	make edge, hole
meahks	0	1	0	1	1	-1	make edge, afs, hole kill shell
meafks	0	1	1	1	0	-1	make edge, afs, face kill shell
kvs	-1	0	0	0	0	-1	kill vertex, shell
kve	-1	-1	0	0	0	0	kill vertex, edge
kvf	-1	0	-1	0	0	0	kill vertex, face
keh	0	-1	0	0	-1	0	kill edge, hole
keahms	0	-1	0	-1	-1	1	kill edge, asf, hole make shell
keafms	0	-1	-1	-1	0	1	kill edge, asf, face make shell

A_i に反時計回りに向き付けを行ったとき, $e_{ijw}=1$ とする. 次に, A_j に向き付けを行ったとき,

$$e_{ijw} := e_{ijw} + d \quad (34)$$

$d = \begin{cases} -1: A_i \text{ と } A_j \text{ における } e_{ijw} \text{ の向きが逆方向} \\ 1: A_i \text{ と } A_j \text{ における } e_{ijw} \text{ の向きが同方向} \end{cases}$ とする. すべての多角形 A_i に対してこの操作を実行し, もしすべての共通辺の値が0となれば, 向き付けは可能と識別できる. 一方, 一つでも共通辺の値が2となると, 向き付け不可能である.

すべての辺に対してこの処理を実施すると, 向き付け可能かどうかは,

- (1) 辺の値がすべて1か0のとき向き付け可能
- (2) 辺の値が一つでも2となると向き付け不可能

と識別できる. 更に, 値が1の辺は, 境界辺としての認識が可能となる. 境界辺とは, 共通辺とならない辺であり, 立体モデリングには生じない辺である.

7. 結 言

立体とは異なるシェル形状モデリングのオイラートポロジーマodelの導入を図り, これから以下のことが結言される.

- (1) シェル形状モデリングを行うのに必要なオイラートポロジーマodelのためのオイラー方程式を導いた.
- (2) 上で導いたオイラー方程式の拡張を行い, 面内の穴及びフラップをオイラー方程式で取り扱えるようにした.
- (3) オイラー・ポアンカレの式から, 上に導いたオイラー方程式を検証した.

- (4) 向き付け不可能面に関する識別アルゴリズムを作成した.

- (5) シェル形状モデリングのための基本オイラーオペレータの例を示した.

オイラートポロジーマodelの必要条件は, 頂点-辺, 辺-面, 面-シェルへの連結が正確に記述されていることであり, これは, データベースにおいて, グラフベースな構造で記述される. (2)において導入した面付属単体は, 立体のモデリングでは, リング数に相当するとも考えられる.

[付 録]

本文中の以下の用語を簡単に述べる.

単体: $a_0, a_1, \dots, a_r$ を n 次元ユークリッド空間 R^n ($r \leq n$) の独立な点集合とする. 空間 R^n のなかで

$$x = \lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_r a_r$$

なる形をした点 x の集合 A^r を r 次元単体, あるいは簡単に r 単体という. ここで λ_i ($i=0, 1, \dots, r$) は実数で, $\lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^r \lambda_i = 1$ である. 0次元単体は一点, 1次元単体は線分, 2次元単体は三角形, 3次元単体は四面体となる.

単体複体: ユークリッド空間 R^n の有限個の単体の集合 K は, 次の条件を満たすとき, 単体複体という.

1. A が K の単体ならば, A のすべての辺単体はまた K に入っている.
2. K のどの2つの単体も, それらが交わらないか, それらの交わりは2つの単体の共通の辺単体である.

ここで s 辺単体とは, $A^r = (a_0, a_1, \dots, a_r)$ を R^n の r 単体とし, $a_k = a_{i_k}$ ($k=0, 1, \dots, s; 0 \leq s \leq r$) としたとき, 頂点 $a_0, a_1, \dots, a_s$ からなる単体である.

多面体: K をユークリッド空間 R^n のなかの単体複体とする. この K の単体に属するすべての点の集合は, 多面体といわれる.

位相同形: A, B をユークリッド空間 R^n の部分集合とする. 写像 $f: A \rightarrow B$ が全単射であって, かつ f および f の逆写像 $g: B \rightarrow A$ がともに連続であるとき, f を位相同形写像といい, f が存在するとき, A と B は位相同形という. 本文では, 2次元単体と多角形, 円を位相同形といっている.

参 考 文 献

- 1) I. M. シンガーほか: トポロジーと幾何学入門, 培風館 (1976) 157.
- 2) B. G. Baumgart: Geometric Modelling for Computer Vision, Rep. STA-CS-74-463, Stanford Univ., Stanford, Calif., (1974).
- 3) I. C. Braid: Note on Geometric Modeller, Univ. of Cambridge, CAD Group Document, No. 101, (1979).
- 4) H. B. Voelcker et al.: An Introduction to PADL; Characteristics, Status and Rational, Tech. Memo. 22, Production Automation Project, Univ. of Rochester, N. Y., Dec. (1974).