厚板の変形に関する近似理論 (第1報)*

——等方性厚板の場合——

五十嵐 悟**

An Approximate Theory of Deformation of a Thick Plate (1st Report)
—The Case of an Isotropic Thick Plate—

Satoru IGARASHI

For the deformation of an isotropic thick plate, a refined theory to derive two-dimensional approximate equations with any desired accuracy is proposed. Especially, for a plate under any distributed load at the surfaces, equations for extensional deformation as well as flexural deflection in the general n -th order approximation are derived from fundamental equations. Approximate equations presented are solved for a plate subjected to a sinusoidally distributed load at the upper surface, and the results are compared with the exact solution and with those derived from several approximate theories hitherto obtained through numerical calculation. It is shown that approximate equations presented in this paper have the following properties: (1) With increasing the order of approximation, the solution of approximate equation improves in accuracy and approaches the exact solution. (2) Approximate solution of stress satisfies the boundary conditions at the surfaces of the plate. (3) The accuracy of the approximate solution decreases monotonically with increasing the thickness of the plate. (4) The effect of Poisson's ratio on the accuracy of the solution is small and can be neglected for practical purposes.

Key words: thick plate, theory of plates and shells, flexural deflection, bending stress, approximate equations of plate deformation

1. 緒 言

機械や構造物の基本的な構成要素として板構造が使われる例は極めて多く、板の変形や応力解析の研究は古くから行われてきた。しかし、本研究で扱う平板の変形問題の場合でも、三次元弾性論を適用して厳密に解が求められる例は極めて少なく、通常は物理的考察によって変形や応力分布を適当に仮定して二次元化した近似理論が使われる。最も広く使用されている近似理論は、Kirchhoffの仮定に基づく古典的な薄板理論(古典論)である。しかし、古典論では板厚の効果は曲げ剛性の中で考慮される以外は無視されており、したがって、板厚が代表的な長さ(板の長手方向の寸法、あるいは板に作用する分布荷重の波長)に比較して無視できないような場合にはこの理論は使用できない。そこで、Kirchhoffの仮定に変わる新たな仮定を導入

して、板厚の影響を考慮した近似理論を展開しようという試みが、Reissner¹⁾によるせん断変形の影響を考慮した近似理論の提出以来今日に至るまで数多く行われている。それらの多くは、変位や応力を板厚方向の座標の多項式で表すことによって問題を二次元化し、近似理論を展開するものである。この方向での代表的な研究の要約と多項式の次数についての議論が、Lo, Christensen および Wu の論文²⁾、および平島、村松の論文³⁾に見られる。しかし、これらの理論では、近似の精度を高めようとすればより高次の項を含む多項式が必要となり、それに伴って求めるべき未知関数の数が増大するという欠点がある。

本論文では、最近著者らが提出した近似理論⁴⁾⁵⁾を改良して、未知関数の数は一定のままで、しかも応力の近似解が直接板上、下面での境界条件を満たすような任意の精度の近似方程式を組織的に導出できる近似理論を提出する。また、この理論を上面で正弦荷重を受ける無限長板の変形問題に適用して厳密解と近似解を求め、近似解の精度を検討するとともに、他の代表的な研究者による近似理論から得られる結果とも比較

* 原稿受付 昭和61年10月7日、昭和58年度精機学会北海道支部学術講演会(昭和58年9月18日)にて発表

** 正会員 北海道大学工学部(札幌市北区北13条西8丁目)

Fig. 1 Coordinate system

して、近似解の性質を調べ、本論文で提出する近似理論と近似方程式の有用性を明らかにする。

2. 主な記号と座標系

使用する主な記号と座標系は次の通りである。ただし、 i, j は 1, 2, 3 の各値をとるものとする。

x_i : 直角座標

ξ_i : 変位成分

$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right)$: ひずみ成分

$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$

$A_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$: 応力成分

δ_{ij} : クロネッカーのデルタ記号

λ, μ : ラメの定数

h : 板厚

$D = \frac{\mu h^3}{6(1-\nu)}$: 板の曲げ剛性

ν : ポアソン比

座標系は図 1 に示すように、 x_1, x_2 軸を板中央面上にとり、 x_3 軸は板厚方向、下向きを正にとる。

3. 三次元弾性問題の二次元問題への変換

等方性弾性体の釣合い方程式は次式で与えられる。

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial x_i} + \mu \Delta \xi_i = 0, \quad (i=1, 2, 3) \quad (1)$$

ここで、 Δ はラプラスの演算子であり、これを次のように表す。

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + a^2, \quad a^2 = a_1^2 + a_2^2,$$

$$a_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (i=1, 2)$$

式 (1) から、 ε_{kk} に関する次の方程式が導かれる。

$$\Delta \varepsilon_{kk} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + a^2 \right) \varepsilon_{kk} = 0 \quad (2)$$

式 (2) から、 ε_{kk} は Θ_0, Θ_1 を x_1 と x_2 の関数として、

$$\varepsilon_{kk} = \cos(x_3 a) \Theta_0 + a^{-1} \sin(x_3 a) \Theta_1 \quad (3)$$

と書き表されることがわかる。ここで、 $\cos(x_3 a)$ およ

び $\sin(x_3 a)$ は次式で定義される演算子である。

$$\left. \begin{aligned} \cos(x_3 a) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x_3^{2k}}{(2k)!} a^{2k} \\ \sin(x_3 a) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x_3^{2k+1}}{(2k+1)!} a^{2k+1} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式 (3) を式 (1) に代入すれば、 ξ_i は次のように表されることが分かる。

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \cos(x_3 a) \left\{ u_0 + \frac{1}{2(1-2\nu)} x_3 a^{-2} a_1 \Theta_1 \right\} \\ &\quad + a^{-1} \sin(x_3 a) \left\{ u_1 - \frac{1}{2(1-2\nu)} \right. \\ &\quad \left. \times a_1 (a^{-2} \Theta_1 + x_3 \Theta_0) \right\} \\ \xi_3 &= \cos(x_3 a) \left\{ w_0 - \frac{1}{2(1-2\nu)} x_3 \Theta_0 \right\} \\ &\quad + a^{-1} \sin(x_3 a) \left\{ w_1 + \frac{1}{2(1-2\nu)} \right. \\ &\quad \left. \times (\Theta_0 - x_3 \Theta_1) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

変位成分 ξ_2 は式 (5) 第 1 式で u_i ($i=0, 1$) を v_i ($i=0, 1$) で、 a_1 を a_2 で置き換えれば得られる。ここで、 u_0, v_0, w_0 および u_1, v_1, w_1 は x_1 と x_2 の関数であり、それぞれ、板中央面 ($x_3=0$) での変位 ξ_1, ξ_2, ξ_3 の値と、変位勾配 $\partial \xi_1 / \partial x_3, \partial \xi_2 / \partial x_3, \partial \xi_3 / \partial x_3$ の値を表す。また、 Θ_0, Θ_1 は ε_{kk} の定義式に式 (5) を使って、

$$\left. \begin{aligned} \Theta_0 &= a_1 u_0 + a_2 v_0 + w_1 \\ \Theta_1 &= \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} (a_1 u_1 + a_2 v_1 - a^2 w_0) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

と表されることが分かる。

以上から、弾性体の変位成分は x_1, x_2 に関する 6 個の未知関数 u_i, v_i, w_i ($i=0, 1$) によって表されることが分かる。これら 6 個の未知関数を支配する方程式が求まれば、弾性体の変形問題は二次元問題に変換されたことになる。板の変形問題の場合には、6 個の未知関数を支配する方程式、すなわち板の変形の基礎方程式は、以下に述べるように板の上、下面での境界条件から導かれる。

4. 板の表面での境界条件と変形の方程式

4.1 変形の基礎方程式

板の上面 ($x_3 = -h/2$)、および下面 ($x_3 = h/2$) に作用する単位面積当たりの分布荷重の成分を、それぞれ、 X_-, Y_-, Z_- 、および X_+, Y_+, Z_+ とすれば、板表面での境界条件は次式で与えられる。すなわち、 $x_3 = \pm h/2$ で、

$$\left. \begin{aligned} X_{\pm} &= A_{31} = 2\mu\epsilon_{31} \\ Y_{\pm} &= A_{32} = 2\mu\epsilon_{32} \\ Z_{\pm} &= A_{33} = \lambda\epsilon_{kk} + 2\mu\epsilon_{33} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

境界条件，式(7)を式(5)を使って整理すれば，次の2組の方程式が得られる．

$$\left. \begin{aligned} C_a(u_1 + \alpha_1 w_0) - \frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{h}{2}\right)^2 \alpha_1 S_a \Theta_1 &= \frac{X_1}{\mu} \\ C_a(v_1 + \alpha_2 w_0) - \frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{h}{2}\right)^2 \alpha_2 S_a \Theta_1 &= \frac{Y_1}{\mu} \\ \frac{3(1-\nu)}{4} D \left\{ \left(\frac{h}{2}\right)^{-2} (C_a - S_a) (2\alpha^2 w_0 + \Theta_1) \right. \\ \left. - \frac{1}{1-2\nu} \alpha^2 S_a \Theta_1 \right\} &= \frac{h}{2} (\alpha_1 X_1 + \alpha_2 Y_1) - Z_2 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} S_a(\alpha^2 u_0 - \alpha_1 w_1) + \frac{1}{1-2\nu} \alpha_1 C_a \Theta_0 \\ &= \left(\frac{h}{2}\right)^{-1} \frac{X_2}{\mu} \\ S_a(\alpha^2 v_0 - \alpha_2 w_1) + \frac{1}{1-2\nu} \alpha_2 C_a \Theta_0 \\ &= \left(\frac{h}{2}\right)^{-1} \frac{Y_2}{\mu} \\ 2C_a \left(w_1 + \frac{\nu}{1-2\nu} \Theta_0 \right) + \frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{h}{2}\alpha\right)^2 S_a \Theta_0 \\ &= \frac{Z_1}{\mu} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここで， $D = \mu h^3 / \{6(1-\nu)\}$ は板の曲げ剛性であり， $X_1 = (X_- + X_+)/2$ ， $Y_1 = (Y_- + Y+)/2$ ， $Z_1 = (Z_- + Z+)/2$ ， $X_2 = (X_- - X+)/2$ ， $Y_2 = (Y_- - Y+)/2$ ， $Z_2 = (Z_- - Z+)/2$ とおいた．また，次の記号を導入した．

$$C_a = \cos\left(\frac{h}{2}\alpha\right), \quad S_a = \left(\frac{h}{2}\alpha\right)^{-1} \sin\left(\frac{h}{2}\alpha\right)$$

式(8)は変位成分 ξ_1, ξ_2 が板中央面に関して反対称で， ξ_3 が板中央面に関して対称な変形(板の曲げ変形)に関する二次元化された方程式であり，式(9)は ξ_1 と ξ_2 が対称， ξ_3 が反対称な変形(板の横方向への伸び変形)に関する二次元化された基礎方程式であり，いかなる近似も含まない厳密な方程式である．結局板の変形問題は，板の端の境界条件を満たす式(8)と(9)の解を見出す問題に帰着されたことになる．しかし，式(8)，(9)の解が解析的に求まるのはむしろ例外的な場合に限られるであろう．したがって，実用的にはより簡単な構造をもつ近似方程式を導出する必要がある．

4.2 変形の近似方程式

式(8)と(9)の左辺は式(4)を使って板厚 h のべき級数に展開することができる．板厚が代表的な長さ

に比較して小さい場合には，展開を h の適当な次数の項で打ち切って近似することができ，この方法で任意の精度の近似方程式を得ることができる．例えば，上面で圧縮荷重 $-p(x_1, x_2)$ を受ける板の場合，すなわち，荷重が $X_{\pm} = Y_{\pm} = Z_{\pm} = 0$ ， $Z_- = -p$ ，したがって， $X_1 = X_2 = Y_1 = Y_2 = 0$ ， $Z_1 = Z_2 = -p/2$ で与えられる場合，式(4)を使って式(8)の左辺を h のべき級数に展開し，展開を最初の第1項のみで近似すれば，

$$u_1 = -\alpha_1 w_0, \quad v_1 = -\alpha_2 w_0 \quad (10)$$

$$D\alpha^4 w_0 = p \quad (11)$$

を得る．式(10)は通常の薄板理論(古典論)で採用される関係式であり，式(11)は古典論による曲げ変形の方程式である．この方法を拡張すれば，古典論を第0近似とし，展開の最初の $n+1$ 項を採用する近似を第 n 近似として任意の精度の近似方程式を導出することができる⁴⁾⁵⁾．しかし，式(8)で曲げ剛性 D は $O(h^3)$ の量であり，したがってこの方法では，第3式の h の次数は第1,2式に比べて常に3次だけ高いことになる．そこで，本論文では， D の次数を考慮して，式(8)，(9)の両式における展開で $h^0 \sim h^{2n+1}$ ($n=1, 2, \dots$)の項を採用したものを第 n 近似方程式とする．すなわち，第 n 近似方程式は次式で与えられる．

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{(2k)!} \left(\frac{h}{2}\alpha\right)^{2k} \left\{ u_1 + \alpha_1 w_0 \right. \\ \left. + \frac{2k}{1-2\nu} \alpha_1 \alpha^{-1} \Theta_1 \right\} &= \frac{X_1}{\mu} \\ \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{(2k)!} \left(\frac{h}{2}\alpha\right)^{2k} \left\{ v_1 + \alpha_2 w_0 \right. \\ \left. + \frac{2k}{1-2\nu} \alpha_2 \alpha^{-1} \Theta_1 \right\} &= \frac{Y_1}{\mu} \\ 3(1-\nu) D \alpha^2 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{k+1}{(2k+3)!} \left(\frac{h}{2}\alpha\right)^{2k} \\ &\times \left\{ \alpha^2 w_0 + \frac{2-\nu+k}{1-2\nu} \Theta_1 \right\} \\ &= Z_2 - \frac{h}{2} (\alpha_1 X_1 + \alpha_2 Y_1) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} \left(\frac{h}{2}\alpha\right)^{2k} \\ &\times \left\{ \alpha^2 u_0 - \alpha_1 w_1 + \frac{2k+1}{1-2\nu} \alpha_1 \Theta_0 \right\} \\ &= \left(\frac{h}{2}\right)^{-1} \frac{X_2}{\mu} \\ \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} \left(\frac{h}{2}\alpha\right)^{2k} \\ &\times \left\{ \alpha^2 v_0 - \alpha_2 w_1 + \frac{2k+1}{1-2\nu} \alpha_2 \Theta_0 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} &= \left(\frac{h}{2}\right)^{-1} \frac{Y_2}{\mu} \\ &\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{(2k)!} \left(\frac{h}{2} \alpha\right)^{2k} \\ &\times \left\{ w_1 + \frac{\nu-k}{1-2\nu} \Theta_0 \right\} = \frac{Z_1}{2\mu} \end{aligned} \right\}$$

4.3 板の変位と応力成分の近似表現

近似方程式に対応して、変位と応力の近似表現を与える必要がある。式(4)を使えば、式(5)で与えた変位成分は板厚方向の座標 x_3 のべき級数に展開することができる。したがって、ひずみの成分、応力成分もまた x_3 のべき級数に展開することができる。板の変形の第 n 近似方程式を $h^0 \sim h^{2n+1}$ の項で表したことに対応して、変位や応力成分の第 n 近似は $x_3^0 \sim x_3^{2n+1}$ の項で表すことにする。例えば、変位成分 ξ_3 と応力成分 A_{11} の第 n 近似表現は次のようになる。

$$\xi_3 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x_3^{2k}}{(2k)!} \alpha^{2k} \left\{ u_0 + \frac{k}{1-2\nu} \alpha^{-2} \Theta_1 \right. \\ \left. + \frac{x_3}{2k+1} \left(w_1 - \frac{k}{1-2\nu} \Theta_0 \right) \right\} \quad (14)$$

$$A_{11} = 2\mu \left\{ \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x_3^{2k}}{(2k)!} \alpha^{2k} \left\{ a_1 u_0 + \frac{k\alpha^{-2} a_1^2 + \nu}{1-2\nu} \Theta_0 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{x_3}{2k+1} \left(a_1 u_1 + \frac{k\alpha^{-2} a_1^2 + \nu}{1-2\nu} \Theta_1 \right) \right\} \right\} \quad (15)$$

ただし、上式中の u_i, v_i, w_i ($i=0,1$) は第 n 近似方程式の解である。他の変位成分、応力成分も同様に容易に求めることができる。なお、上記の方法で第 n 近似の応力成分を表すと、近似方程式の導出方法から明らかのように、面外応力成分 A_{31}, A_{32}, A_{33} は板の上、下面での境界条件を満たすことが分かる。

5. 上面で正弦荷重を受ける板の変形

前章で提出した近似方程式の精度と適用範囲を明らかにするためには、厳密解の求まる問題を取り扱い、厳密解と近似解とを比較する必要がある。ここで取り扱う上面で正弦荷重を受ける無限長板の変形問題は、厳密解の求められる数少ない例として有用であるばかりでなく、任意荷重をフーリエ級数に展開して解析する場合、あるいは振動荷重を受ける板の変形を取り扱う場合の基礎としても有用である。

5.1 厳密解と近似解

まず、圧縮荷重 p は次式で与えられる。

$$p = q_0 \sin(\pi x_1/L) \quad (q_0: \text{定数}) \quad (16)$$

この場合、次のようにおくことができる。

$$\xi_2 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha^2 = \alpha_1^2 \quad (17)$$

厳密解、近似解はいずれも次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} w_i &= W_i \sin(\pi x_1/L) \\ u_i &= U_i \cos(\pi x_1/L) \\ v_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (i=0,1) \quad (18)$$

ここで、 W_i, U_i ($i=0,1$) は定数である。

式(16)~(18)を基礎方程式、式(8)と(9)に代入して、 W_i, U_i ($i=0,1$) について解き、それらの結果を式(5)に代入すれば変位成分の厳密解が求められ、ひずみや応力成分の厳密解も容易に求めることができる。

一方、式(16)~(18)を第 n 近似方程式、式(12)および式(13)に代入して W_i と U_i ($i=0,1$) について解き、その結果を変位、応力の第 n 近似表現に代入すれば、変位と応力成分の第 n 近似解を得ることが出来る。

5.2 近似解の性質と精度

前節で求めた変位と応力の近似解を厳密解および他の研究者による近似理論から得られる解と比較して、近似解の性質と精度について検討する。なお、他の研究者の近似理論として、ここでは Lo ら²⁾ の近似理論のほかに Ambarutsumyan⁶⁾ および Essenburg⁷⁾ の近似理論を採用する。

5.2.1 板の変位

板の変位の代表的な値として、ここでは板中央面のたわみ (w_0) について検討する。各種の近似理論から得られる結果を比較するために、たわみの振幅を古典論による値 (q_0/D) (L/π)⁴ で除して無次元化したものを変位係数 (displacement coefficient²⁾) として、板厚に対する変位係数の変化をポアソン比 $\nu=0.3$ の場合について示したのが図2である。ただし、板厚 h は分布荷重の半波長 L で除して無次元化した。

図2から明らかなように、古典論 (C) は h/L が極めて小さな場合にしか適用できない。また、 h/L が比較的小さな領域では、いずれの近似理論による解も厳密解 (EX) との差は小さく、 h/L が増加すると差が増大して行くのが分かる。なお、我々の近似理論 ((1)~(5)) では、近似の次数をあげていくと近似解は厳密解 (EX) に漸近していくことが分かる。

各近似理論による解の精度を調べるために、変位係数の誤差、

$$\text{誤差} = \left| \frac{\text{近似値} - \text{厳密値}}{\text{厳密値}} \right| \times 100 \quad (19)$$

を計算し、その結果をポアソン比をパラメータとして示したのが図3である。古典論 (C) を除く他の研究者による近似解 ((A), (ES), (L)) はいずれも厳密解 (EX) と交差するので、 h/L の増加に対して、誤差は

Fig. 2 Displacement coefficient for $\nu=0.3$
(C); Classical theory, (A); Ambarutsumyan theory, (ES); Essenburg theory, (L); Lo et al. theory, (EX); Exact solution, (n); n -th order approx. (present theory)

極大値をとった後減少して交差点で0となり、その後急激に増加する。また、これらの近似解((A), (ES), (L))では、ポアソン比が増加すると誤差の極大値は増加し、極値の現れる位置および厳密解(EX)との交点は h/L の大きな方へ移動する。これに対して、古典論(C)および我々の近似理論((1)~(5))では、誤差

Fig. 3 Error of displacement coefficient (symbols are same as Fig. 2)

(a) Classical theory

(b) 1st order approx. (present theory)

(c) Ambarutsumyan theory

Fig. 4 Deformation pattern of plate for $h/L=0.5$

--- : undeformed pattern
— : approx. theory
- - - : exact solution

は h/L の増加に伴って単調に増加する性質があり、ポアソン比の影響は他の近似理論に比較して小さい。特に我々の近似理論((1)~(5))では、近似の次数が増すと誤差は一樣に減少し、ポアソン比の影響も小さくなる。

次に板全体の変形を調べるために、変位成分の板厚方向分布を計算し、 x_2 軸に垂直な断面の変形を求めた結果の例が図4と図5である。

$h/L=0.5$ の場合(図4)、古典論による変形(a)は断面全体にわたって厳密解による変形とは大きく異なっており、この場合には古典論を使用するのは適当でないことが分かる。一方、第1近似とAmbarutsumyanの解は板の変形をかなり良く近似している。第1近似解による変位(b)は厳密解に比べてやや大きく、誤差は断面全体にわたってほぼ一樣である。Ambarutsumyanの解(c)では、 ξ_1 および板中央面より上の部分での ξ_3 は精度が高く、下面付近での ξ_3 は第1近似と同程度の誤差となっている。

$h/L=1.5$ の場合はAmbarutsumyan、および第1近似による結果は誤差が極めて大きく、近似理論として不適当となる。そこで、図5には第2近似と

Fig. 5 Deformation pattern of plate for $h/L=1.5$
(symbols are same as Fig. 4)

Lo らの近似理論による変形を示した。第2近似(a)では、 ξ_3 が下面近くで、 ξ_1 は上、下面付近で誤差が大きくなる傾向がある以外は、全体として板の変形を良く近似している。Lo らの結果(b)はさらに精度が高く、荷重を受ける上面付近で差が認められる以外は厳密解とほぼ一致している。なお、 $h/L=0.5$ の場合のLo らの近似と第2近似以上の近似、および $h/L=1.5$ の場合の第3近似以上の近似は精度が高く、図の上では厳密解との差は認められないので、これらの結果は図示していない。

5.2.2 板の応力分布

応力の例として、曲げ応力 A_{11} について検討する。曲げ応力の厳密解は、同じ荷重を受ける単純支持はりに対して Little⁸⁾ が与えた厳密解と一致している。一方、曲げ応力の第 n 近似表現は、式(15)に第 n 近似解を代入すれば直ちに得られる。

以上の結果、および他の研究者による近似理論から得られる曲げ応力の振幅の板厚方向分布を、 $h/L=1.5$ の場合について示したのが図6である。Lo らの解と Ambarutsumyan の解はポアソン比に依存するので $\nu=0.3$ とした。また、Reissner の理論と Essenburg の理論は古典論と同じ曲げ応力を与えるので、これらの理論は古典論 (C) として引用する。曲げ応力は厳密解 (EX) が示すように板中央面に関して非対称に分布する。これに対して、Ambarutsumyan (A) と古典論 (C) による解は中央面に関して反対称の分布を与え、厳密解 (EX) との差は極めて大きい。一方、Lo らの解 (L) は厳密解 (EX) に比較的近い非対称な分布を与えている。我々の近似解 (1), (2) も中央面に関して非対称な分布を与える。第1近似解 (1) は中央面付近を除いては近似の精度が低い。しかし、第2近似解 (2) は下面近くを除けば、Lo らの解 (L) よりも厳密解 (EX) に近く、さらに近似の次数を上げれば、解は厳密解に漸近する。

曲げ応力の代表値として、実用上重要と思われる板上面に現れる最大曲げ応力の値の誤差を計算した結果が図7である。古典論 (C) による最大曲げ応力は、たわみの場合に比較して誤差が小さく、第1近似 (1) と同程度の精度となっている。Ambarutsumyan の理論 (A) と Lo らの理論 (L) による結果は、たわみの場合と同様に厳密解と交差し、 h/L に対する誤差の変化、およびポアソン比の影響もたわみの場合と同様である。しかし、近似解と厳密解の交点は、両理論ともたわみの場合に比較して h/L の小さな方へずれているので、最大曲げ応力の精度はたわみの場合に比べて著しく低くなっている。これに対して我々の近似理論に

Fig. 6 Distribution of bending stress for $h/L=1.5$

Fig. 7 Error of maximum bending stress (symbols are same as Fig. 6)

よる解 (1)～(5) は厳密解と同様にポアソン比には依存せず、誤差は h/L の増加とともに単調に増加するという単純な性質を持っていることが分かる。最大曲げ応力の近似の精度をたわみの場合と比較すると、第1近似 (1) はやや精度が低い。しかし、第2近似以上の近似 ((2)～(5)) では精度が急激に改善されており、同じ次数の近似ではたわみの場合に比べて精度は著しく高い。

これらの性質は曲げ応力の分布曲線についてもそのまま当てはまる。さらに、曲げ応力 A_{11} について述べてきた近似解の精度や性質についての議論は、他の応力成分についてもほぼそのまま成り立つ。

6. 結 言

等方性の平板の変形問題に関して、変位成分を板厚方向の座標のべき級数に展開して問題を二次元化し、未知関数の数は一定のままで任意の精度の近似方程式を組織的に得ることのできる近似理論を提出し、特に、表面で任意分布荷重を受ける板については、一般的な第 n 近似方程式を具体的に導出した。また、上面で正

弦荷重を受ける無限長板の変形問題を解いて、変位および応力成分を数値計算によって求め、近似解の精度や性質について検討した。

その結果、本論文で提出した近似方程式は次のような優れた性質を持つことが分かった。

- (1) 近似の次数を高めることによって、近似方程式の解の精度は向上し、近似解は厳密解に漸近する。
- (2) 応力の近似解は板上、下面での境界条件を満たす。
- (3) 板厚 (h/L) の増加に伴って近似解の精度は単調に低下する。
- (4) 近似の精度に及ぼすポアソン比の影響は小さく、実用上は考慮する必要がない。
- (5) 近似方程式の適用範囲 (h/L の上限) は、近似の許容誤差を指定することによって、本論文で与えた数値計算結果 (図3と図7) から容易に決定することができる。

参 考 文 献

- 1) E. Reissner: The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates, *J. Appl. Mech.*, **12**, (1945) A 69-77.
- 2) K. H. Lo, R. M. Christensen and E. M. Wu: A High Order Theory of Plate Deformation, Part I: Homogeneous Plates, *J. Appl. Mech.*, **44**, (1977) 663.
- 3) 平島健一, 村松正重: 板厚方向の成分を考慮した平板曲げの理論, 土木学会論文報告集, **304** (1980) 33.
- 4) S. Igarashi, A. Miyauchi, E. I. Takizawa and T. Nishimura: On the Flexural Deflection of a Moderately Thick Plate, Part I: Equation of Deformation of a Thick Plate, *Memo. Fac. Engg. Hokkaido Univ.*, **15**, (1980) 357.
- 5) S. Igarashi and E. I. Takizawa: On the Equation of Deflection of a Thick Plate, *Ing. Arch.*, **54**, (1984) 465.
- 6) S. A. Ambarutsumyan (神谷紀生訳): 異方弾性板の理論, 森北出版 (1975) 1-173.
- 7) F. Essenburg: On the Significance of the Inclusion of the Effect of Transverse Normal Strain in Problems Involving Beams with Surface Constraints, *J. Appl. Mech.*, **42**, (1975) 127.
- 8) R. M. Little: *Elasticity*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., (1973) 109-112.