研究論文

ボールねじの熱膨張に関する研究*

—差分法による温度分布計算—

小 渕 信 夫** 大 塚 二 郎*** 星 野 高 志†

Study on Thermal Expansion of Ball Screw
—Calculation of Temperature Distribution by Difference Method—

Nobuo OBUCHI, Jiro OTSUKA and Takashi HOSHINO

Even when the temperature of the ball screw reaches steady state, the change of its distribution is repeated as the nut goes and returns. In this study, the repeated change is numerically analysed by a difference method on several idealization, where the screw shaft is replaced by a solid cylinder and the nut is replaced by a hollow cylinder. This thermal phenomena is treated as a contact problem between two cylinders. The following results are obtained: (1) The temperature of the screw shaft is higher just around the nut. Therefore, it is expected that the forced cooling of the screw surface near the nut is effective. (2) There is almost no temperature gradient in the radial direction. Therefore, there is a possibility that the heat transfer of the ball screw can be regarded as one dimensional problem.

Key words: ball screw, thermal expansion, difference method, temperature distribution, numerical calculation

1. 緒 言

精密送りあるいは精密位置決め要素として用いられているボールねじは最近、高速高負荷での使用が要求され、その作動時の摩擦熱により生ずる熱膨張は、精度上無視しえない。著者らは作動中のボールねじのねじ軸とナット間の摩擦により、ねじ軸がどのように温度上昇し、熱膨張していくかを調べ、また軸方向の定常温度分布については、一次元熱伝導方程式を解くことよりこれを簡易的に推定する方法を先に示した¹⁾。しかし、ここではナットを含めたねじ内部の温度分布についてまで言及することはできなかった。ボールねじが作動している場合、すなわち、ねじ軸が正逆転し、ナットがねじ軸上の定められた区間を規則的に繰り返し移動している場合、その摩擦熱の発生メカニズム及び熱伝達のメカニズムは複雑であり、従ってボールねじ内部の温度上昇は、ねじ軸とナットでは様相が異なるし、定常状態に至った後も、ボールねじ内部の温度は移動するナットの位置によってある一定の変化を繰

り返すことになる（以下これを「温度の繰返し定常特性」という）。

近年、転がり摩擦に基づく接触伝熱問題についてはトライボロジー学的見地から軸受等を対象として研究され、局所的な接触部近傍の温度分布に加え、さらにアッセンブルされた軸受支持システム全体の温度変化が数値計算によって解かれている²⁾。しかし、ボールねじの作動は先に述べたような特異性を持った現象であり、接触部のボール転動面で生ずる摩擦熱とその伝達に加えナットの移動を考慮したボールねじ内部全体の温度の繰返し定常特性について検討しなければ、次の研究へのステップ、つまり、ボールねじの効果的な熱膨張低減方法を検討するための資料を得ることはむずかしい。

そこで本研究では、熱伝導問題の数値解法としてよく用いられる Explicit 型差分法³⁾によりナットをも含めたボールねじ全体の温度分布解を求め、その繰返し定常性について考察することを目的とする。本研究で用いる記号とその定義を表 1 に示す。

2. 計算モデルと差分式

2.1 計算モデル

本研究で対象とするボールねじの形状と諸元を図 1 と表 2 に示す。一般にボールねじは構造上次のような

* 原稿受付 昭和 62 年 2 月 27 日、昭和 58 年度精機学会秋季大会学術講演会（昭和 58 年 10 月 16 日）にて発表

** 正 会 員 陸上自衛隊需品学校（松戸市五香六実 17）

*** 正 会 員 東京工業大学精密工学研究所（横浜市緑区長津田町 4259）

† 東京工業大学総合理工学研究科（横浜市緑区長津田 4259）

Table 1 Nomenclature

a	Thermal diffusivity $= \lambda / c\rho$	m^2/s
c	Specific heat	$\text{J}/(\text{m}^3 \cdot ^\circ\text{C})$
dr	Radial difference	m
dt	Time difference	s
dx	Axial difference	m
F_a	Preload	N
H_r	$= dt / (c\rho \cdot dr)$	$^\circ\text{C} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s} / \text{J}$
H_x	$= dt / (c\rho \cdot dx)$	$^\circ\text{C} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s} / \text{J}$
N	Revolution speed of screw shaft	rpm
$q_{1 \sim 4}$	Heat flux from adjoining element	$\text{J}/(\text{s} \cdot \text{m}^2)$
q_f	Heat flux from friction area	$\text{J}/(\text{s} \cdot \text{m}^2)$
R	Inflow ratio of heat energy from nut to screw shaft	
T_D	Drug torque	$\text{N} \cdot \text{m}$
V	Element volume	m^3
V_N	Volume of contact element (Nut)	m^3
V_S	Volume of contact element (Screw shaft)	m^3
v	Transverse velocity of nut	m/s
θ_r	$= adt / (dr)^2$	
θ_x	$= adt / (dx)^2$	
$\theta_{m,n}^p$	Temperature of element (m, n) at time p	$^\circ\text{C}$
θ_{air}	Temperature of ambient air	$^\circ\text{C}$
$\theta_{B1, B2}$	Temperature of bearing 1 or 2	$^\circ\text{C}$
θ_f	$= Q_f dt / c\rho V_N$	$^\circ\text{C}$
λ	Heat conductivity	$\text{W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$
ρ	Density	kg/m^3

Table 2 Item of ball screw used in this study

Material	SCM 420 H (AISI 4120 H)	
Hardness	HRC 58-62	
Outer diameter d	mm	40
Screw length	mm	500
Lead (pitch) l	mm	5
Ball diameter (load)	mm	3.175
(spacer)	mm	3.170
Heat capacity C	$\text{J}/^\circ\text{C}$	5 700
Thermal diffusivity a	m^2/s	1.67×10^{-5}
Heat conductivity λ	$\text{W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$	60.5
Linear expansion coefficient γ	$1/^\circ\text{C}$	1.17×10^{-5}

(4) 作動中、ねじ軸とナットは相対的な回転運動及び軸方向移動を行う(本研究ではねじ軸が回転し、ナットが軸方向に往復移動する)。

従って、ボールとねじ軸、ボールとナットそれぞれの接触面での摩擦熱に起因する熱伝導、ねじ表面からの熱伝達は複雑となり、さらにねじ面を覆い、かつ接触部に介在する潤滑油の存在は、この問題をさらに複雑にしている。

本研究では、ボールねじ全体の温度の繰返し定常特性を概略的に求めることを目的としており、本問題を次のように単純化する(図2参照)。

- (i) ねじ軸を円柱に、ナットを中空円筒体とし、これら二体の接触問題として取り扱う。
- (ii) ねじ軸とナット間の摩擦熱源は円筒面状とし、そこで発生する熱エネルギーは一樣で、単位面積あたり一定であるとする。
- (iii) 摩擦熱は、ナットとねじ軸へ均等に配分されるものとする。
- (iv) ナットとねじ軸の接触による熱伝導については、熱エネルギー流入比 R を設定する(2.2節の式(5)参照)。

(v) 境界熱伝達率 α は、ねじ表面で一定であるとし、その値は文献1)の値(実験的に求めたもの)を用いる。

(vi) 油の伝熱効果は考慮しない。

図3に計算モデルを示す。

2.2 差分式

各要素について導いた差分式を表3に示す(文献3)参照)。ここで $\theta_{m,n}^p$ とは、時刻 $t = p\Delta t$ 、位置 $x = m\Delta x$ 、 $r = n\Delta r$ における温度を示す。各要素は矩形断面を有するリング要素であり、差分式は曲率の影響、すなわちそのリング要素が中心から n 番目の要素であることを考慮している(表3中の $K_1 \sim K_6$)。

特徴を持つ。

- (1) ねじ軸・ナットはボールねじ特有のねじ溝形状(ゴチックアーク)を持つ。
- (2) ねじ軸とナットの間にはボールが挿入されており、作動中ボールはねじ軸・ナットの両ねじ溝とリターンチューブ内を転動、循環する。
- (3) ねじ軸は細長比(ねじ軸部長さ/外径)が大きい(本研究では $500/40=12.5$)。

Fig. 1 Dimension of ball screw used in this study

Fig. 2 Simplified model of ball screw

Fig. 3 Calculation model

特に、接触面を持った要素⑦～⑨については、接触熱抵抗を用いて式をたてるのが一般的と考えられるが⁴⁾、本問題の接触部は実際には転動するボールが存在し、接触熱抵抗としてその値のオーダーをとらえることは種々の困難さがあるので、本研究では前述のとおり、接触要素の熱エネルギー流入比 R を新たに導入

して計算を行う。

以下、これらの要素の差分式の導出について述べる。

2.2.1 要素⑦の差分式の導出

ナットのねじ軸との接触要素⑦(外周空気との接触要素である⑧を除く)のモデル要素図を図4に示す。隣接要素から流入する熱流束 q_1, q_2, q_4 はそれぞれ次式で表される。

$$q_1 = \lambda(\theta_{m-1,n}^p - \theta_{m,n}^p) / dx \quad (1)$$

$$q_2 = \lambda(\theta_{m+1,n}^p - \theta_{m,n}^p) / dx \quad (2)$$

$$q_4 = \lambda(\theta_{m,n+1}^p - \theta_{m,n}^p) / dr \quad (3)$$

ねじ軸側接触要素⑨とナット側接触要素⑦との熱収支については次のように考える。すなわち、時刻 $p \cdot dt$ での接触要素⑦

と⑨との熱エネルギー差 ΔQ は、要素⑦の温度を $\theta_{m,n}^p$ 、その体積を V_N 、また要素⑨の温度を $\theta_{m,n-1}^p$ 、体積を V_S としたとき次式で示される。

$$\Delta Q = c\rho(\theta_{m,n-1}^p V_S - \theta_{m,n}^p V_N) \quad (4)$$

そこで、 ΔQ のうち時間 dt にどれだけの熱エネルギー Q_3 が要素⑦に流入するか、その割合を R とする

Table 3 Difference equations

Element No.	Difference equation
1	$\theta_{m,0}^{p+1} = \theta_{m,0}^p + \Theta_x(\theta_{m-1,0}^p + \theta_{m+1,0}^p - 2\theta_{m,0}^p) + 4\Theta_r(\theta_{m,1}^p - \theta_{m,0}^p)$
2	$\theta_{m,n}^{p+1} = \theta_{m,n}^p + \Theta_x(\theta_{m+1,n}^p + \theta_{m-1,n}^p - 2\theta_{m,n}^p) + \Theta_r(K_1\theta_{m,n-1}^p + K_2\theta_{m,n+1}^p - 2\theta_{m,n}^p)$
3	$\theta_{m,n}^{p+1} = \theta_{m,n}^p + \Theta_x(\theta_{m+1,n}^p + \theta_{m-1,n}^p - 2\theta_{m,n}^p) + \Theta_r \cdot K_3(\theta_{m,n-1}^p - \theta_{m,n}^p) + \alpha \cdot H_r \cdot K_4(\theta_{air} - \theta_{m,n}^p)$
4	$\theta_{m,n}^{p+1} = \theta_{m,n}^p + \Theta_r(K_1\theta_{m,n-1}^p + K_2\theta_{m,n+1}^p - 2\theta_{m,n}^p) + 2\Theta_r(\theta_{m+1,n}^p - \theta_{m,n}^p) + 2\alpha \cdot H_x(\theta_{air} - \theta_{m,n}^p)$
5	$\theta_{m,n}^{p+1} = \theta_{m,n}^p + \Theta_r(K_1\theta_{m,n-1}^p + K_2\theta_{m,n+1}^p - 2\theta_{m,n}^p) + \Theta_x(\theta_{m-1,n}^p - \theta_{m,n}^p) + \alpha \cdot H_x(\theta_{air} - \theta_{m,n}^p)$
6	$\theta_{m,n}^{p+1} = \theta_{m,n}^p = \theta_{B1}$ (あるいは θ_{B2})
7	$\theta_{m,n}^{p+1} = \theta_{m,n}^p + \Theta_x(\theta_{m+1,n}^p + \theta_{m-1,n}^p - 2\theta_{m,n}^p) + \Theta_r \cdot K_5(\theta_{m,n-1}^p - \theta_{m,n}^p) + R \cdot (\theta_{m,n-1}^p \cdot V_S - \theta_{m,n}^p \cdot V_N) / V_N + \theta_f$
8	$\theta_{m,n}^{p+1} = \theta_{m,n}^p + \Theta_x(\theta_{m-1,n}^p - \theta_{m,n}^p) + \Theta_r \cdot K_5(\theta_{m,n+1}^p - \theta_{m,n}^p) + \alpha \cdot H_x(\theta_{air} - \theta_{m,n}^p) + R \cdot (\theta_{m,n-1}^p \cdot V_S - \theta_{m,n}^p \cdot V_N) / V_N + \theta_f$
9	$\theta_{m,n}^{p+1} = \theta_{m,n}^p + \Theta_x(\theta_{m+1,n}^p + \theta_{m-1,n}^p - 2\theta_{m,n}^p) + \Theta_r \cdot K_3(\theta_{m,n-1}^p - \theta_{m,n}^p) + R \cdot (\theta_{m,n-1}^p \cdot V_N - \theta_{m,n}^p \cdot V_S) / V_S + \theta_f$

$$K_1 = 1 - 0.5/n, \quad K_2 = 1 + 0.5/n, \quad K_3 = \frac{4(2n-1)}{4n-1}, \quad K_4 = \frac{8n}{4n-1}, \quad K_5 = \frac{4(2n+1)}{4n+1}, \quad K_6 = \frac{8n}{4n+1}$$

Fig. 4 Model element ⑦

と、 Q_3 は次式で表される。

$$Q_3 = R \cdot \Delta Q \quad (5)$$

ねじ軸とナット間の摩擦により発生し、それぞれへの時間 dt 当たり流入する熱量 Q_f は、発生熱がナットとねじ軸両者に均等に分配されると仮定すると、次のように表される。

$$Q_f = \frac{2\pi NT_D}{60} \left(\frac{1}{I} \right) \frac{1}{2} dt = \frac{\pi NT_D}{60I} dt \quad (6)$$

ここに、 I はナットの軸方向分割数、 N はねじ軸回転数、 T_D は駆動トルクである。

従って、時間 dt 中に要素 ⑦ に流入する総熱量 dQ は、

$$dQ = (q_1 S_1 + q_2 S_2 + q_4 S_4) dt + Q_3 + Q_f \quad (7)$$

となり、時刻 $(p+1) \cdot dt$ における要素 ⑦ の温度 $\theta_{m,n}^{p+1}$ は、

$$\theta_{m,n}^{p+1} = \theta_{m,n}^p + dQ / (c\rho V_N) \quad (8)$$

で表されるので表 3 に示す差分式を得る。

ここで各面積 $S_1 \sim S_4$ 、体積 V_N 、 V_S は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= S_2 = (n+0.25) \pi (dr)^2 \\ S_3 &= 2n\pi \cdot dr \cdot dx \\ S_4 &= 2(n+0.5) \pi \cdot dr \cdot dx \\ V_N &= S_1 dx \\ V_S &= (n-0.25) \pi \cdot (dr)^2 \cdot dx \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

2.2.2 要素 ⑧ 及び ⑨ の差分式の導出

要素 ⑧ については、要素 ⑦ の導出に加え、側方の外周空気との接触面での熱伝導をも考慮して差分式を求める。また、ねじ軸のナットとの接触要素 ⑨ については、要素 ⑦ と同様にして（摩擦面の上下が逆転）表 3 の差分式を得る。

2.2.3 熱エネルギー流入比 R について

差分式は要素の各面での熱収支から導かれるが、ここでねじ軸、ナット両接触要素 ⑦ 及び ⑨ について、接触面にかかわる項、すなわち R に着目した差分式を示すと次式のようになる。

要素 ⑨ のねじ軸接触要素については、

$$\{\theta_{m,n}^{p+1}\}_S = \theta_{m,n}^p + R(\theta_{m,n+1}^p V_N - \theta_{m,n}^p V_S) / V_S \quad (10)$$

ここで $\theta_{m,n+1}^p$ は接触するナット要素の時刻 $p \cdot dt$ の温度である。

要素 ⑦ のナット接触要素については、

$$\{\theta_{m,n}^{p+1}\}_N = \theta_{m,n}^p + R(\theta_{m,n-1}^p V_N - \theta_{m,n}^p V_S) / V_N \quad (11)$$

ここで、 $\theta_{m,n-1}^p$ は接触するねじ軸要素の時刻 $p \cdot dt$ の温度である。

R の値は両接触要素が接触すると同時に両者の平均温度に等しくなる場合に最大となる、そのときの R は（本研究の場合は円筒であり、両接触要素の体積 V_S と V_N はわずかに異なるので）、

$$R = \frac{V_1 V_2 (\theta_1 - \theta_2)}{\theta_1 V_1^2 - \theta_2 V_2^2 + V_1 V_2 (\theta_1 - \theta_2)} \quad (12)$$

（添字 1 は、接触するナットとねじ軸要素のうち、温度が高い側の要素を示す。）

となり、 $V_1 = V_2$ の場合には $R = 0.5$ である。実際には、 R は 0~0.5 の値となる。

2.3 安定条件

文献 3) によれば、Explicit 型差分法を用いて温度を計算して求める場合、安定条件を満足するように差分 dx, dr, dt の値を決定しなければならない。本研究の場合では、ナットのねじ軸上の移動速度を考慮して安定条件を満足させねばならない。

ナットの軸方向移動速度を v とすると、 v はねじのリードとねじ軸回転数 N より $v = lN/60$ で表され、従って、ねじ軸の軸方向差分 dx と、 dx だけ移動するのに要する時間 dt との関係は次式のようになる。

$$dt = dx / v = \frac{60 dx}{lN} \quad (13)$$

安定条件としては、まず半径方向の差分 dr について次式を満足しなければならない。

$$(d/2) / dr \geq 6$$

ここでねじ軸径 $d = 40$ mm なので、

$$dr \leq 3.3 \text{ (mm)} \quad (14)$$

さらに、差分式の一般式と安定条件は次式で示される。

$$\theta_{m,n}^{p+1} = \theta_{m,n}^p + \sum_{i,j} C_{i,j} (\theta_{i,j}^p - \theta_{m,n}^p) + C_0 \quad (15)$$

$$1 - \sum_{i,j} C_{i,j} \geq 0 \quad (16)$$

$\sum_{i,j} C_{i,j}$ は表 3 に示した差分式の隣接要素や空気温度にかかわる係数の総和である。

そこで、式 (14)、(16) を満足するように dx, dr, dt を決定しなければならない。表 3 より、温度の係数としては、 $K_1 \sim K_6, \theta_x, \theta_r, H_r, H_x$ などが含まれるが、それらのうち、特に θ_x と θ_r が値としては最も大きくなるので、概略の差分値を定めるため dx と dr との

Fig. 5 Relationship between θ_x and θ_r

関係式 (13) を用いて dx を消去し、 θ_x と θ_r の関係を求めると、次式が得られる。

$$\theta_x \cdot \theta_r = \left(\frac{60a}{l} \right)^2 \left(\frac{1}{N \cdot dr} \right)^2 \quad (17)$$

式 (17) より N あるいは dr の値が大きいく程 θ_x あるいは θ_r の値は小さくなり、安定条件を満足しやすくなる。表 2 より a, l の値を代入し、 $N=500$ rpm における θ_x と θ_r の関係を図 5 に示す。最終的には要素断面のアスペクト比 (dr と dx の比) 等を考慮し、それぞれの差分値を $dx=4.5$ mm, $dr=2.0$ mm, $dt=0.096$ s とした。

なお、計算にあたっては、式 (16) の安定条件をプログラムの実行当初にチェックする。

3. 計算方法と手順

以上述べた差分式により安定条件を満足するよう差分を定め、ボールねじの定常温度分布を計算するが、要素⑦と⑨の接触面での熱エネルギー流入比 R の値は未知であり、 R の値いかにによってねじ軸及びナット内の温度分布及びその繰返し定常特性は変わってくる。そこで、著者らの研究¹⁾で実験により測定したねじ軸内三点の実測定常温度値と計算モデルでそれらの点に対応する要素の温度値がおおむね一致するように R の値を繰り返し選定し、その場合のボールねじの内部の温度分布解を求める。

ねじ軸上、ナットの dx 移動分を 1 step とし、1 step ごとの各要素の温度変化を計算し、それをねじ軸上のナットのストローク範囲内で往復させながら繰り返す。また、そのストローク両端では、ナットの停止時間に相当する step 数だけナットを移動させず、その間の熱の発生はないものとする。

計算条件は、ダブルナットの予圧 $F_a=980$ N、ねじの軸回転数 $N=500$ rpm の場合と、 $F_a=1960$ N, $N=1500$ rpm の場合の二通りとした。ナットの動作範囲は両方とも 450 mm である。

Fig. 6 Results of calculation (unit: °C)

4. 計算結果と考察

4.1 温度分布の繰返し定常特性

数値計算の結果を図6(a)及び(b)に示す。これより、次のことがわかる。

- (1) ナットの温度はねじ軸の温度より高い。
- (2) ねじ軸内の温度分布はナットの移動と共に変化し、ナットとの接触点近傍において高い温度となる。また、接触部より離れたねじ軸内部においては、半径方向の温度差は小さい。このことはボールねじにおける熱伝達の問題は一次元として扱いうることを示している。
- (3) 予圧、ねじ軸回転数の増大により、温度は高くなる。

従って、以上のことから、ねじ軸とナットの接触部周辺及びナットを冷却する方法が、ボールねじの冷却に効果的であることが十分予想される。

4.2 熱エネルギー流入比 R と接触熱抵抗

2.3節で述べたように、熱エネルギー流入比 R 値は0~0.5をとりうるとしたが、3章で述べたような方法により R を決定したところ、0.302となった。この値は、両接触要素の温度が両者の平均温度に等しくなる場合の R の値の約60%である。

ここで、熱エネルギー流入比 R と接触面の熱伝導問題で用いられる接触熱抵抗 R' との対応について考察する⁴⁾。単位面積、単位時間当たり⑦に流入する熱エネルギーを q_3 とすれば、式(5)を参照して

$$q_3 = Q_3 / S_3 dt \quad (18)$$

従って、要素⑦において q_3 を接触熱抵抗 R' で表すと、定義より次のようになる。

$$q_3 = \frac{1}{R'} (\theta_{m,n-1}^p - \theta_{m,n}^p) \quad (19)$$

従って R' に着目した差分式は、

$$\{\theta_{m,n}^{p+1}\}_N = \theta_{m,n}^p + \frac{1}{R'} H_r K_6 (\theta_{m,n-1}^p - \theta_{m,n}^p) \quad (20)$$

となり、仮に式(11)で $V_s = V_n$ とすると R と R' の関係は、

$$R = H_r K_6 / R'$$

である。従って、 H_r 、 K_6 及び求めた R の値を代入すると、 R' の値は次のようになる。

$$R' \approx 6.81 \times 10^{-5} \quad (\text{m}^2 \text{C/W})$$

この値は通常の金属の二体接触の場合に比べると大

きな値であり、これは、ボールねじを円筒体に単純化し、円筒体要素の接触面積を接触部の面積として計算したが、実際のボールとねじ溝との接触面積はかなり小さく、結果として R' の値がずっと大きくなったものと思われる。なお、本研究で筆者らの提案した熱エネルギー流入比 R については、更に詳しい検討を要するであろうが、ボールを介した複雑な熱伝達現象を単純化して二体接触と同様に取り扱うことができる利点がある。

5. 結 言

本研究で得られた結論を述べると次のようになる。

- (1) Explicit 型差分法を用いて、ボールねじナットの軸方向移動を考慮したボールねじ内部の繰返し定常温度分布解を求めた。
- (2) 上記の温度分布解より、ナットの移動と共にねじ軸内部の温度は変化し、ナットの接触部近傍においてその温度は高い。よって、ボールねじの温度上昇を防止するには、ナット近傍あるいはナットを冷却することが効果的であるという見通しを得た。
- (3) また、上記の温度分布解より、ねじ軸内の半径方向の温度差は小さい。このことから、ボールねじの熱伝導問題は一次元として扱いうる見通しを得た。
- (4) ねじ軸とナットの接触部を二体の接触問題に単純化し、熱エネルギー流入比 R を定義し、その値を著者らの従来の研究と対応させて決定した。さらに、二つの固体の間の接触面の熱伝導問題で用いられる接触熱抵抗 R' とを対応させて考察を行った。

最後に、本研究を行うに際し、多大の援助を賜った東京工業大学工学部機械工学科斎藤彬夫助教授に感謝申し上げる。

文 献

- 1) 大塚二郎、深田茂生、小淵信夫：ボールねじの熱膨張に関する研究，精密機械，50，4（1984）646。
- 2) J. Pirvics: The Analysis of Thermal Effects in Rolling Elements Bearing Load Support Systems, Inst. Mech. Engrs., (1980) 259.
- 3) 片山切蔵、斎藤彬夫、服部 賢：伝熱工学の進展 vol. 3 ——非定常熱伝導の数値解法，養賢堂（1974）111。
- 4) 甲藤好郎ほか：伝熱学特論，養賢堂（1984）2。