特性間の関係の解明に基づく工作機械 ダイナミックスの設計最適化（第1報）*

——特性間の競合および協調関係——

吉 村 允 孝**

Design Optimization of Machine-tool Dynamics Based on an Explanation of
Relationships between Characteristics (1st Report)
—Competitive and Cooperative Relationships between Characteristics—

Masataka YOSHIMURA

Many characteristics and evaluative factors of machine-tool dynamics often interact mutually, and competitive and cooperative relations exist between them. In order to improve the product performance of machine tools, and finally optimize it, those relationships should be clarified. In this paper, competitive and cooperative relations between evaluative factors of machine-tool dynamics are analyzed. The main results are as follows. (1) Minimization of the maximum receptance value is established on the Pareto optimum solution set for minimizing both the total weight of the structural members on the static force loop and the static compliance. (2) A competitive relationship between minimization of the maximum receptance value and minimization of the static compliance is reduced by minimizing the ratio of the greatest modal flexibility to the static compliance. (3) Minimization of the ratio of the greatest modal flexibility to the static compliance is cooperative with maximization of the damping ratio.

Key words: design optimization, machine-tool structures, dynamic characteristics, chatter vibration, multiobjective optimization, receptance frequency response, static compliance, damping ratio, modal flexibility

1. 結 論

機械構造物の設計最適化においては、対象とする機械製品の最も重要な評価関数（すなわち目的関数）をいくつかの制約のもとで最小化（もしくは最大化）する設計変数を得るために、種々の数値計画法が用いられる。しかし、実際の機械構造物の設計最適化における目的関数もしくは制約条件（または目的関数と制約条件の両方）が、通常、設計変数に関して非線形関数で表されるため、最適化の手法として、非線形計画法を用いなければならない。そのような設計最適化問題においては、しばしば多くの局所的最適解が設計実行可能領域内に存在する。それゆえ、非線形計画法によって得られた解は、単なる1つの局所的最適解にすぎなく、大域的最適解であるという保証を得ることは困難

なことが多い。さらに、特に設計変数の数が大きいとき、その局所的最適解を得るにも多くの計算時間を必要とする。

設計対象として工作機械をとりあげた場合、工作機械の設計者には、製品性能に関する最適な設計を行うという目標のもとに、常に、加工精度と加工能率を改善することが要求される。加工精度と加工能率のような工作機械の製品性能は、その静剛性と動剛性に大きく依存している。それゆえ、現在までに、工作機械ダイナミックスの設計改善または設計最適化についての研究が多くなされてきた。しかしながら、工作機械ダイナミックスの多くの特性と評価要因がしばしば互いに影響しあい、それらの間には、競合もしくは協調関係が存在する。このために、設計変数と評価要因間の関係はたいへん複雑である。もしそれらの複雑な関係が設計の改善時または設計最適化問題の定式化の前に明らかにされていないならば、十分な性能の改善がもたらされるとは限らず、また最適化問題として局所的

* 原稿受付 昭和61年3月7日、昭和60年度精機学会秋季大会学術講演会（昭和60年10月15日）にて発表

** 正 会 員 京都大学工学部（京都市左京区吉田本町）

Fig. 1 Structural models of machine tools
The heavy lines and heavy spring marks indicate the structural members and joints on the static force loop respectively

最適解への収束の可能性が非常に高い。すなわち製品性能の大きな改良（もしくは、製品製造原価の大きな減少）をもたらす設計解を得ることは、非常に困難である。さらに、実際の工作機械構造は多くの設計変数をもつために、数値計画法を用いて、一度にすべての設計変数を決定することは容易でないことが多い。

本研究では、工作機械ダイナミクスの評価要因間の競合と協調関係をまず明らかにした後、その解明された関係にもとづいて、工作機械ダイナミクスの設計最適化法を構築することを最終的な目的とする。評価要因間の競合と協調関係を明らかにすることにより、最適化問題がより単純な多層の最適化問題に変換され、最適解を確実に、そしてより容易に得ることを可能にできる。

本論文では、評価要因間の競合と協調関係を明らかにし、最適設計法構築の基礎とする。以下の章において、まず工作機械ダイナミクスの評価要因を列挙し考察を行う。次に評価要因を支配するパラメータ間の関係を解析する。

本研究において、“協調”という言葉は、複数の特性のうち1つの特性にかかわる性能向上のための設計変更が他の特性にかかわる性能の向上をももたらすことを意味する。また“競合”という言葉は、複数の特性のうち1つの特性にかかわる性能向上のための設計変更が他の特性にかかわる性能の低下をももたらすことを意味する。

2. 製品性能に対する評価要因

図1は、フライス盤と単一コラム立旋盤の構造解析

Fig. 2 An example of receptance frequency response at the cutting point

のためのシミュレーションモデルの例を示している。工作機械においては、切削点での工具（点A）と品物（点B）間の静的および動的挙動が、加工精度と加工能率のような加工性能に直接的な影響をもっている。その性能を設計段階で評価するためには、図2に示されるような工具（点A）と品物（点B）の間の相対的なリセプタンス周波数応答 $R (=D/F)$ を、構造解析によって計算しなければならない。ここで D は、点Aと点Bの間の相対変位である。強制振動の場合には、相対変位 D が、歯車やモータなどの構造内の加振力源での強制外力 F によって起こされるが、他方、自励振動（再生型自励びり）の場合には、 D は切削点での切削力の変動などによる力 F によって起こされる。このうち、再生型自励びりによるトラブルは最もやっかいなものであり、しかも工作機械の製造後では解決することが非常に困難なため、設計段階で明確に評価されなければならないものである。

次の評価要因が、ダイナミクス面から、工作機械構造の設計段階において考慮される。

(i) 静コンプライアンス f_s

もし切削力によってひき起こされる切削点での工具と品物の間の相対変位が大きければ、十分な加工精度が得られない。この大きさを評価するために、静コンプライアンス f_s (f_s は、単位切削力によってひき起こされる工具と品物間の相対変位に等しい) が用いられる。設計においては、この f_s が小さいこと、あるいはある値以下であることが要求される。

(ii) 全周波数領域にわたるリセプタンスの最大値

$$R_{m-\max}$$

工作機械の稼動時において、もし再生型自励びりが発生すれば、工具と品物間の振動変位が非常に増加し、そして品物の加工面の表面粗さも増加する。このため再生型自励びりの発生は、極度に低い加工精度

と加工能率をもたらす。再生型自励びりに対する安定限界は、工具と品物間の相対リセプタンス R の最大値 $R_{m\text{-max}}$ (m 次固有モードにおいて最大とする) の大きさに依存する (厳密には、最大負実部の大きさが評価される¹⁾が、それは不必要に複雑な解析を必要とするので、 $R_{m\text{-max}}$ を実用的に用いることができる)。再生型自励びりに対する安定性を増すためには、図2に示すような最大リセプタンス値 $R_{m\text{-max}}$ を小さくしなければならない。

(iii) 構造部材の全重量 W_T

工作機械構造は、コラムとクロスレールのような構造部材、ギヤボックスとモータのような機械要素、および構造部材と機械要素を互いに接合する結合部から構成される。通常、構造部材と機械要素の重量を最小化することが、材料費と運転費用の節約、制御の容易さなどのために要求される。

以上の要因を評価するに必要な、切削点でのリセプタンス周波数応答のある振動数 ω での (切削力方向の) 加振力 F と切削点の工具と品物間の相対変位 D に関する) 伝達関数は、比例減衰系としての近似のもとで、次のように表される。

$$R(\omega) = \frac{D}{F}(\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{f_m}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 + 2j\left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)\zeta_m} \right] \quad (1)$$

ここで j は虚数を表し、 ω_m と ζ_m は、 m 次固有モードにおける固有振動数と減衰比である。 f_m は、切削点での加振力と変位の間のモーダルフレキシビリティ²⁾である。

m 次固有振動数 ω_m の近くに大きなモーダルフレキシビリティをもつ他の固有モードが存在しないとき、 m 次固有振動数でのリセプタンス値は、式 (1) から次式のように近似できる。

$$R(\omega_m) \cong \frac{-jf_m}{2\zeta_m} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{f_n}{1 - \left(\frac{\omega_m}{\omega_n}\right)^2} \right] \quad (2)$$

式 (1) の ω に 0 を代入した $R(0)$ は、静コンプライアンス f_s と等価であるので、モーダルフレキシビリティ f_m と静コンプライアンス f_s の間の関係を示す次式が成り立つ²⁾。

$$f_s = \sum_{m=1}^{\infty} f_m \quad (3)$$

上式より、すべての固有モードにわたるモーダルフレキシビリティ f_m の総和は、静コンプライアンス f_s に等しいことがわかる。さらに、式 (3) から、次の関係が得られる。

$$\sum_{m=1}^{\infty} (f_m/f_s) = 1 \quad (4)$$

上式におけるモーダルフレキシビリティ f_m の静コンプライアンスに対する比 f_m/f_s は、静コンプライアンスに対して m 次固有モードが寄与する割合を表している。

工作機械構造の減衰比の大きさは固有モードごとに異なるが、それらは例えば、0.01 から 0.1 程度の値をもち、その変動は、モーダルフレキシビリティ値の固有モードごとの相違に比べれば小さいといえる。図2に示すようなリセプタンス周波数応答の概形は、減衰比の値ではなく、大きなモーダルフレキシビリティの値をもつ固有モードの固有振動数と、それらのモーダルフレキシビリティの大きさによって決定されるといってよい。

最大リセプタンス値 $R_{m\text{-max}}$ をもつ固有振動数 ω_m でのモーダルフレキシビリティ f_m は、全周波数領域にわたるすべてのモーダルフレキシビリティの中で最大値もしくは最大値に近い値をもつ。このモーダルフレキシビリティ f_m の静コンプライアンス f_s に対する比 f_m/f_s は、構造設計に依存して、0.2 から 0.9 程度の値をとる。

m 次固有振動数でのリセプタンス値が他のどの固有モードのものより大きく、かつ式 (2) において右辺の第2項が無視しうるとき、 $R(\omega_m)$ の大きさ、すなわち $R_{m\text{-max}}$ は、次式のように近似しうる。

$$|R(\omega_m)| = R_{m\text{-max}} \cong f_m/2\zeta_m \quad (5)$$

これより、リセプタンスの最大値 $R_{m\text{-max}}$ の最小化は、モーダルフレキシビリティ f_m を最小化し、そして減衰比 ζ_m を最大化することによって実現しうることがわかる。

静コンプライアンス f_s の値は、図1に示す構造モデルにおいて、太線で表される構造部材と太いばね記号で表される結合部の設計に依存している。それらの構造部材と結合部は、切削点で発生する静的な切削力を支えている。図中、点 A から点 B への太線の道筋 (流れ) を、ここでは、“静的な力のループ”と呼ぶ。この静的な力のループ上の構造部材の総重量を、以下 W_1 と記す。

静的な力のループ外の、構造部材、機械要素と結合部は、静コンプライアンス f_s に影響しないが、各固有モードのモーダルフレキシビリティ f_m の静コンプライアンス f_s に対する比 f_m/f_s に大きな影響をもつ。もし f_m/f_s が 1 に近いとき、静的な力の負荷に対する復元エネルギー分布状態は、 m 次固有モードにおける復元エネルギー分布状態に近いことを意味する。この場

Fig. 3 Functional space and Pareto optimum solution set for the two objectives minimizing the total weight W_1 of structural members on the static force loop and the static compliance f_s .

合, m 次固有モードにおいて, 静的な力のループ外の, 構造部材, 機械要素および結合部に, 復元エネルギーがほとんど蓄えられないことになる。

3. 静的な力のループ内にある構造部材の総重量と静コンプライアンスの関係

静コンプライアンス f_s と静的な力のループ内の構造部材の総重量 W_1 は, 静的な力のループ内にある構造部材と結合部の設計に依存して, 図3に示されるような斜線の領域内の値をとる。図中, 太線で示される曲線上の設計解は, 総重量 W_1 と静コンプライアンス f_s の両者を最小化する多目的最適化問題に対するパレート最適解集合³⁾⁴⁾ (複数の目的関数のうちのある一つの目的関数の値を改善するためには, それ以外の少なくとも一つの目的関数の値を改悪せざるをえないような解の集合) に対応している。

容易に理解されるように, 静的な力のループ内にある構造部材の総重量 W_1 がある値をもち一定であるという制約のもとで, 静コンプライアンス f_s を最小化する設計最適化問題(問題1)と, 静コンプライアンス f_s がある値をもち一定であるという制約のもとで, 総重量 W_1 を最小化する問題(問題2)は, 図3の太線で示されるようなパレート最適解集合上に最適解をもつ。この太線よりわかるように, f_s を最小化するという目的と, W_1 を最小化するという目的は, パレート最適解集合上で, 互いにトレード・オフ (一方が良くなれば他方が悪くなる) 関係をもつ。図中, I点とは, W_1 がとりうる最小値 W_{1min} と, f_s がとりうる最小値 f_{smin} からなる, 仮想上の理想点を示している。

問題1 (W_1 が一定という制約のもとで, f_s を最小化

する) を解くことによって, 以下の結果が得られる。

- (1) 明らかに, f_s が最小化される。
- (2) 式(3)の関係から, m 次固有モードにおけるモーダルフレキシビリティ f_m は, f_m/f_s が一定という条件のもとで, 最小化される。
- (3) 静コンプライアンス f_s の最小化による構造部材の剛性の増加は, 同じ静的な外力負荷条件のもとで, 構造部材に蓄えられる復元エネルギーの減少をもたらす。それに伴い結合部に蓄えられる復元エネルギーの全復元エネルギーに対する比率が大きくなる。このことは, 減衰比 ζ_m の増加をもたらさう²⁾。
- (4) 固有振動数 ω_m が, より高い値をとる。振動系が粘性減衰系とみなせるとき, 減衰力は固有振動数 ω_m の大きさとともに大きくなるので, 減衰エネルギーが増加し, 減衰比 ζ_m の増加をもたらさう。

(1) から (4) にわたるすべての結果は, リセプタンスの最大値 R_{m-max} の減少と協調することがわかる。

問題2 (f_s が一定という制約のもとで, W_1 を最小化する) を解くことによって, 以下の結果が得られる。

- (1) 固有振動数 ω_m がより高い値をとる。
- (2) W_1 の減少は, 静的な力のループ内の構造部材の m 次固有モードでの等価質量の減少をもたらす。これより f_m/f_s は, 静的な力のループ外にある, 構造部材, 機械要素と結合部の設計によって, 容易に減少しう。そして, 4.2節で述べることより, 減衰比 ζ_m が増加しう。
- (3) 構造部材の材料費が減少し, 位置制御が容易になり, さらに駆動パワーが小さくなる。

結果(1)と(2)は, リセプタンスの最大値 R_{m-max} の減少と協調する。また結果(3)は, 製品製造原価と他の製品性能に望ましい効果をもたらさう。

以上の考察から, リセプタンスの最大値 R_{m-max} を最小化する静的な力のループ内の設計変数は, 静的な力のループ内にある構造部材の総重量 W_1 の最小化と静コンプライアンス f_s の最小化の2つの目的をもつ多目的問題のパレート最適解上に存在することになる。そして, 理想点(図3のI点)が仮想的には最も望ましい点となることより, 理想点に最も近いパレート最適解上の解を静的な力のループ内にある構造部材の設計変数として選べば, リセプタンスの最大値の最小化を達成しうる静的な力のループ内の設計が得られる(厳密には, I点に近いパレート最適解上の点に沿って, 機械システム全体のモデルより R_{m-max} を求め, そのうち, R_{m-max} が最小となる点を選択する必要がある)。

4. モーダルフレキシビリティの静コンプライアンスに対する比とリセプタンスの最大値の関係

モーダルフレキシビリティ f_m の静コンプライアンス f_s に対する比 f_m/f_s の最小化は、 f_s の値が一定という条件のもとで、 f_m の最小化と等価である。それゆえ f_m/f_s の最小化は、式 (5) から理解されるように、リセプタンスの最大値 $R_{m\text{-max}}$ の最小化と協調する。しかしながら、 f_m/f_s と $R_{m\text{-max}}$ の関係を完全に明らかにするためには、 f_m/f_s と減衰比 ζ_m の関係が解明されていなければならない。

結合部は、通常、構造部材と機械要素よりはるかに大きな振動エネルギーの消散能力をもっていることより、減衰比に関して、結合部に着目した解析を行う必要がある。そこで、 f_m/f_s の減少が、静的な力のループ内にある結合部の特性および静的な力のループ外にある結合部の特性に及ぼす影響を、以下に考察する。

4.1 静的な力のループ内にある結合部の影響

静的な力のループ内にある結合部の減衰効果を増すための調整もしくは設計変更は、通常、その結合部の剛性の低下、すなわち静コンプライアンス f_s の増加をもたらす。この f_s の増加は、その結合部に蓄えられる復元エネルギーの分布割合が大きくなることを意味する。他方、 m 次固有モードにおいて、ある結合部での復元エネルギーの分布割合が大きいとき、その固有モードの減衰比 ζ_m は、この結合部設計の適切な調整によって増加しうる。一般に静コンプライアンス f_s の増加は好ましくないが、他方、減衰比 ζ_m の増加はリセプタンスの最大値 $R_{m\text{-max}}$ を減少するために要求される。そこで、静コンプライアンスの増加量 Δf_s と減衰比 ζ_m の増加の関係を、次に明らかにする。

静コンプライアンスの増加量 Δf_s と減衰比 ζ_m は、図4に示されるように、斜線の領域内のみ実行可能な設計解をもつ（図中、 ζ_{max} は減衰比のとりうる最大値、そして ζ_{min} は材料内部減衰比などで定まる減衰比の下限値を示している）。また図5に示される斜線領域は、 Δf_s と $R_{m\text{-max}}$ の間の関係がとりうる領域を示している。 ζ_m を最大化または $R_{m\text{-max}}$ を最小化し、かつ Δf_s を最小化する必要があることより、図4の太線上の ζ_m と Δf_s の関係および図5の太線上の $R_{m\text{-max}}$ と Δf_s の関係を調べればよい。

図5の点 Q_1 から Q_2 の太線によって示されるように、リセプタンスの最大値 $R_{m\text{-max}}$ の最小化と、静コンプライアンスの増加量 Δf_s の最小化の間には、競合関係が存在する。できるだけその競合関係を解消するた

Fig. 4 Relation between the incremental quantity of the static compliance, Δf_s , due to design changes of the joints on the static force loop

Fig. 5 Relation between the incremental quantity of the static compliance, Δf_s , and the maximum receptance value over the entire frequency range, $R_{m\text{-max}}$

めには、曲線 Q_1Q_2 を、矢印で示されるように、原点に近づく方向に移動させなければならない。これは、 f_m/f_s を最小化することによって、すなわち、 m 次固有モードにおける復元エネルギー分布を、静的な力の負荷状態での復元エネルギー分布と大きく異ならせることによって実現できる。この f_m/f_s の最小化は、既に述べたように、静的な力のループ外にある、構造部材、機械要素と結合部と設計に依存している。

4.2 静的な力のループ外にある結合部の影響

既に述べたように、静的な力のループ外にある、部材、機械要素と結合部の設計は静コンプライアンス f_s になんら影響しないが、それらの設計により、 m 次固有モードにおいて、静的な力のループ外の結合部に復元エネルギーが大きく蓄えられるようにすれば、 f_m/f_s を減少しうる。図6の太線によって示されるように、

Fig. 6 Relation between the ratio f_m/f_s of the modal flexibility f_m to the static compliance f_s and the ratio U_J/U_T of potential energy U_J stored in the joints outside the static force loop to the total energy U_T

Fig. 7 Relation between the ratio f_m/f_s of the modal flexibility f_m at the m -th natural mode to the static compliance f_s and the damping ratio ζ_m at the m -th natural mode

f_m/f_s の減少は、静的な力のループ外の結合部に蓄えられる復元エネルギー U_J のシステム全体の全復元エネルギー U_T に対する比 U_J/U_T の増加、すなわち減衰比 ζ_m の増加をもたらす。それゆえ f_m/f_s の最小化は、図 7 の太線で示されるように、減衰比 ζ_m の最大化と協調する(図中、 ζ_s は、 f_m/f_s が 1 である状態の減衰比を、そして $\zeta_{\max}$ は、 f_m/f_s のとりうる最小値である $(f_m/f_s)_{\min}$ のときの最大減衰比を示している)。

5. 結 論

工作機械ダイナミクスに関する設計最適化法の構築の基礎となる、特性間の競合および協調関係を明らかにした。その結果を要約すると、次のようになる。

- (1) 静的な力のループ内の構造部材の総重量の最小化と、静コンプライアンスの最小化は、それぞれを目的とする多目的最適化問題のパレート最適解上で、競合する関係にある。このパレート最適解上において、リセプタンスの最大値を最小化する解が得られる。そして、リセプタンスの最大値を最小化するには、理想点に最も近いパレート最適解上の解を、静的な力のループ内にある構造部材の設計変数として選べばよい。
- (2) 静的な力のループ内にある結合部の設計変更による、減衰比の増大と静コンプライアンスの最小化とは、一般に競合するが、モーダルフレキシビリティの静コンプライアンスに対する比を最小化することによって、この競合関係をできるだけ回避することができる。
- (3) 静的な力のループ外にある、部材、機械要素、結合部の設計は、静コンプライアンスに影響しないが、モーダルフレキシビリティの静コンプライアンスに対する比を変化させる。リセプタンスの最大値をもつ固有モードのモーダルフレキシビリティの、静コンプライアンスに対する比の最小化は、その固有モードの減衰比の最大化と協調する。

本研究の遂行にあたり、京都大学教授人見勝人博士の全面的なご支援とご指導をたまわったことを記し、感謝の意を表す。

文 献

- 1) H. E. Merritt: Theory of Self-excited Machine-tool Chatter, Trans. ASME, J. Engg. Ind., 87, 4, (1965) 447.
- 2) 吉村允孝: 機械構造物の振動特性に関する最適設計の研究(工作機械構造物のびり振動に関する最適化設計), 日本機械学会論文集, 42, 363 (1976) 3437.
- 3) L. L. Cohon: Multiobjective Programming and Planning, Academic Press, New York, N. Y., (1978).
- 4) 吉村允孝, 浜田年男, 由良憲二, 人見勝人: 機械構造システムの多目的最適設計(工作機械主軸系の設計におけるパレート最適化), 日本機械学会論文集, 49, 445 (1983) 1606.