モーダルアナリシスと有限要素法を併用した 部分構造動歪解析*

大久保 信行** 田辺 総一郎*** 平 野 徹†

Dynamic Strain Analysis of a Substructure by Use of the Experimental
Model Analysis and the Finite Element Method

Nobuyuki OKUBO, Soichiro TANABE and Toru HIRANO

To analyse the dynamic strain distribution of a substructure in detail and with accurate, a combined method is proposed such that the substructure is modeled by the finite elements and the remaining structure is expressed by the experimental model strain analysis using strain gages. The constraint method is used to solve the dynamic strain distribution of the substructure described in the finite elements against the boundary forces determined by the measured dynamic strains. Using numerical examples with beam elements and two dimensional triangle elements, this proposed method can analyse the dynamic strain distribution with satisfactory accuracy. Then an actual beam and an L-shape pipe are tested to show the effectiveness of the method.

Key words: dynamic strain, strain gage, model analysis, finite element method, constraint method

1. 緒 言

最近の機械設計においては、軽量化の要求のため、構成要素の板厚、肉厚が薄くなり、振動モードの考慮のみならず、動歪の分布を解析し、局所的なひずみ集中が生じないように工夫しなければならない。

構造物の動歪解析には有限要素法を使用するのが通常であるが、ひずみ分布が問題となる部分のごく一部であるにもかかわらず、構造物全体をモデル化しなければならないので、コンピュータのメモリーを多く必要とし、ひずみ分布が問題となる部分のみについて要素を細かくし、詳しく解析することが困難となる。また、有限要素法のみでは、たとえば接合部分のように、モデル化が困難な部分もあり、解析結果は誤差を含んでしまうことが多い。

これに対し、実験的なモーダルアナリシスでは、対象となる機械が実在すれば、構造物全体の動的挙動を、接合部分を含めて精度よく解析することが可能であ

る¹⁾。しかし、モーダルアナリシスにおいても各振動モードにおけるひずみ分布を求める場合などは、測定点数に限度があるため局所的にひずみ分布を知りたい部分を詳しく解析することができず、問題がある。

このような問題を解決するための一つの方法としては、実験的ひずみモーダルアナリシス（ひずみゲージを使用したモーダルアナリシス）の利点と有限要素法の利点をうまく組み合わせ、ひずみ分布を求めたい部分のみについて有限要素法を適用し、境界条件およびその他の部分については、実験的ひずみモーダルアナリシスを適用した解析方法を提案する。

この論文では、まず、本解析の理論について説明し、簡単な構造物について数値シミュレーション（有限要素モデル）により、本解析理論の検証を行う。次に、実際の部分構造物に本解析を適用し、本手法が部分構造物の動歪解析に有効であることを検討する。対象構造としては、エアコン室外機にみられるような、はりあるいはパイプ構造とする。

2. 部分構造物の動歪解析の方法

本研究における解析手順を図1に示す。全体構造物を部分構造物A, B, Cに分割し、AとBについては、ひずみモーダルアナリシスにより、各振動モードにお

* 原稿受付 昭和61年5月2日、昭和61年度精密工学会春季大会学術講演会（昭和61年3月30日）にて発表

** 正会員 中央大学理工学部（東京都文京区春日1-13-27）

*** 学生会員 中央大学大学院

† ダイキン工業（株）（堺市金岡町1304）

Fig. 1 Concept of the proposed method

けるひずみを実測し、それからCに対する等価的な境界力を求める。また、ひずみ分布を詳細に求めたいCについては、有限要素モデル化を行い、これに拘束モード法を適用し、境界力を与えることにより全体構造物におけるCのひずみモードを明らかにするものである。

3. ひずみモーダルアナリシスによる境界力の算出

本解析方法により、全体系における部分構造物Cのひずみモードを求めるためには、ひずみモーダルアナリシスによる境界力の算出を行わなければならない。各モードにおける境界力を算出する方法としては、材料力学の応力分布の理論を採用することにした。

実際に、部分構造物の境界力を求める場合には、部分構造物をどの有限要素でモデル化するかによって、理論式が多少異なってくる。そこで、本研究で対象とするはりおよびパイプ構造物に対して、(1)はり要素でモデル化した場合、(2)平面三角形要素でモデル化した場合、(3)シェル要素でモデル化した場合について境界力を求める理論式を示すことにする。

1) はり要素でモデル化した場合

図2の(a)に示すように、部分構造物をはり要素でモデル化した場合、ひずみモーダルアナリシスにより考慮する境界力をここでは曲げモーメントとし、次のように表す。

Fig. 2 Boundary condition for the finite elements of the substructure

$$\{F_r\} = \frac{EI}{h} \{\phi_{cr}^m\} \quad (1)$$

ただし、 $\{F_r\}$: r 次モードでの境界力ベクトル、 $\{\phi_{cr}^m\}$: r 次モードの曲げひずみモードベクトル、 E : 縦弾性係数、 I : 断面2次モーメント、 h : 断面の高さ。

2) 平面三角形要素モデル

図2の(b)に示すように、部分構造物を平面三角形要素でモデル化した場合、ひずみモーダルアナリシスにより考慮する境界力をここでは曲げ応力とし、次のように表す。

$$\{\sigma_r\} = \frac{El}{h} \{\phi_{cr}^m\} \quad (-h \leq l \leq h) \quad (2)$$

ただし、 $\{\sigma_r\}$: r 次モードでの曲げ応力ベクトル、 l : 中立軸からの距離。

式(2)により、曲げ応力ベクトルを求め、それを等価集中力ベクトルに変換することにより、境界力ベクトル $\{F_r\}$ を求める。

3) シェル要素でモデル化した場合

図2の(c)に示すように、部分構造物をシェル要素でモデル化した場合、ひずみモーダルアナリシスにより考慮する境界力をここでは曲げ応力、およびねじりによるせん断応力とする。曲げ応力については、式(2)のようになるが、ねじりによるせん断応力は式(3)のよう表す。

$$\{\tau_r\} = \frac{Gr}{R} \{\phi_{cr}^t\} \quad (-R \leq r \leq R) \quad (3)$$

ただし、 $\{\tau_r\}$: r 次モードでのせん断応力ベクトル、

$\{\phi_{cr}^i\}$: r 次モードのせん断ひずみモードベクトル,
 G : 横弾性係数, R : 半径, r : 中心からの距離.

式 (2) および式 (3) により, 曲げ応力ベクトル, およびせん断応力ベクトルを求め, それを等価集中力ベクトルに変換することにより, 境界力ベクトル $\{F_r\}$ を求める.

なお, これらの境界力の算出を厳密に行うためには, せん断力等の考慮が必要であるが, これらは通常のひずみゲージを用いたモーダルアナリシスでは測定が容易でないこと, および部分構造物の境界をこれらの影響が小さい, ひずみが一様な箇所とすることで十分利用できるはずである.

4. 拘束モード法の導入

本解析では, 図 1 において, 部分構造物 C の有限要素モデルに拘束モード法を適用し, ひずみモードを求めるので, その理論式²⁾について示す.

まず, 有限要素モデルの質量および剛性マトリクス, $[M]$, $[K]$ を境界の変位 x_c と境界以外の変位 x_f とに分けて, 次のように整理する.

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} M_{ff} & M_{fc} \\ M_{cf} & M_{cc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ff} & K_{fc} \\ K_{cf} & K_{cc} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} x_f \\ x_c \end{Bmatrix} = \{F\} \quad (4)$$

ここで, 拘束モード法の理論を取り入れた変換マトリクスを考える. すなわち, 全体系における部分構造物の動的挙動は, 境界を拘束したときの部分構造物自身の弾性モード, および外部からの振動エネルギーにより, 境界が変位したときの静変形成分モードの和として近似できるとしたものである.

境界を拘束したときの部分構造物の弾性モードは, 次のようになる.

$$\begin{Bmatrix} x_f \\ x_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{fd} \\ 0 \end{bmatrix} \{\xi_d\} \quad (5)$$

ただし, ξ_d : 各モードにおけるモード座標, ϕ_{fd} : 拘束弾性モード.

境界が変位したときの部分構造物の静変形成分モードは, 次のようになる.

$$\begin{Bmatrix} x_f \\ x_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_{ff}^{-1}K_{fc} \\ I_{cc} \end{bmatrix} \{x_c\} \quad (6)$$

ただし, I_{cc} : 単位マトリクス.

したがって, 全体系における部分構造物の動的挙動は, 式 (5) および式 (6) の重ね合わせとなり,

$$\begin{Bmatrix} x_f \\ x_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{fd} & -K_{ff}^{-1}K_{fc} \\ 0 & I_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_d \\ x_c \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \xi_d \\ x_c \end{Bmatrix} \quad (7)$$

ここで, 次のようなマトリクスの変換を行う.

$$\begin{aligned} [T]^T[M][T] &= [\bar{M}], \quad [T]^T\{F_r\} = \{\bar{F}_r\} \\ [T]^T[K][T] &= [\bar{K}] \end{aligned} \quad (8)$$

Fig. 3 Example of a beam structure

式 (4), 式 (7) および式 (8) より, 部分構造物 C の r 次ひずみモード ε_r は, 次のようになる²⁾³⁾.

$$\{\varepsilon_r\} = [B][T](-\omega_r^2[\bar{M}] + [\bar{K}])^{-1}\{\bar{F}_r\} \quad (9)$$

ただし, $[B]$: ひずみ-変位マトリクス, ω_r : r 次モードの角固有振動数.

ひずみモーダルアナリシスによって求めた r 次モードでの境界力ベクトル $\{F_r\}$ を式 (8) において $\{\bar{F}_r\}$ に変換し, 式 (9) により全体系における部分構造物の r 次ひずみモードを求めるわけである.

5. 数値シミュレーションによる解析理論の検証

本解析方法を実際の構造物へ適用する前に, 簡単な構造物についての数値シミュレーション (有限要素モデル) について本解析理論の検証を行った.

5.1 はり要素モデルの場合

図 3 の (a) に示すような両端自由なはり を 8 分割したモデルを考え, 節点番号 3 から 7 まではひずみモードを求めたい部分構造物とする.

まず, 有限要素法によりはり全体のひずみモードを求める. そして, このひずみモードから境界である節点番号 3 および 7 における境界力 (この場合は曲げモーメント) を材料力学の理論に従って計算する.

次に, 部分構造物の有限要素モデル化を行い, 図 3 の (b) に示すように, 境界を拘束したときの弾性モードを求めておく. そして, 式 (9) より各モードにおいて境界力が作用したときのひずみモードを算出するわけである.

図 4 に, はり全体を有限要素解析して求めた部分構造物のひずみモードと, 本解析方法により境界力を与えて求めた部分構造物のひずみモードとの比較を示す. なお, このひずみモードの値はモード等価質量が 1 となる規準化を行った振動モードの変形を生じる際の各節点でのはり断面の表面での曲げひずみを示す. これより本解析により, 全体系における部分構造物のひずみモードを比較的精度よく予測できることがわか

Fig. 4 Predicted dynamic strain mode of the substructure

Fig. 5 Example of a plate structure

る。

5.2 平面三角形要素モデルの場合³⁾

図5の(a)に示すような片側固定の平板を三角形要素に分割したモデルを考える。ここで、右半分の部分をひずみモードを求めたい部分構造物とし、図中(b)のように片端を固定し、拘束弾性モードを計算する。

図6に平板全体を有限要素解析して求めた3次ひず

Fig. 6 Predicted dynamic strain mode of the substructure

Fig. 7 Test of a cantilever structure

みモードと、本解析方法により前述のはり要素モデルと同様な手順で境界力を与えて求めた部分構造物のひずみモードとの比較を示す。

これより、平面三角形要素モデルの場合にも、本解析により全体系における部分構造物のひずみモードを比較的精度よく予測できることがわかる。ただし、図6に示すひずみモードは、各要素における x 方向および y 方向の成分であり、その大きさは、前述のはり要素モデルと同様の表示とする。

6. 実構造物への本解析手法の適用例

数値シミュレーションにより、本解析方法の有効性を確認できたので、次に、簡単な構造物について実際に本解析手法を適用してみることにする。

6.1 片持ちばり

図7に示すような片持ちばりに、図中のように断面表面上に曲げひずみ測定用ひずみゲージをはり、右半分を部分構造物とし、加振実験を行った。測定点数は7つまでとり、あとで本解析結果との比較を行うため、部分構造物のところだけ測定点数を増やしてある。そして、加振点は7番点とし、 y 方向の負の向きにインパクト加振を行ったときの各測定点におけるひずみ伝

Fig. 8 Comparison of measured and predicted dynamic strain

達関数を測定した。

そして、測定されたひずみ伝達関数をカーブフィットすることにより、片持ちばりの各固有振動数におけるひずみモードを求めた。このようにひずみモーダルアナリシスにより求めた片持ちばりのひずみモードを図8の点線の部分に示す。ひずみモードの値は前述と同様にモード等価質量を1として表示する。

次に、図7中に示すように部分構造物をはり要素でモデル化して、境界を拘束したときの弾性モードを求めた。このとき、あとでひずみモーダルアナリシスによる解析結果と本解析結果との比較を行うため、部分構造物の測定点と同じ場所に節点を設けてある。

これらの結果として、図8の実線の部分に、本解析方法により境界力を与えて求めた部分構造物のひずみモードを示す。ひずみモーダルアナリシスによって、実験的に測定したひずみモードと比較して本解析結果が精度よく一致していることがわかる。

一般に、はり構造物の場合、曲げモーメントのみではなくせん断力による変形も考えられるが、曲げモーメントによる影響に比べれば非常に小さく、無視できるものである。したがって、境界を選ぶ場合、特にひずみ集中が起きやすい場所を避けるよう注意すれば、境界力として、曲げモーメントを考えるだけでも十分精度のよい結果が得られることがわかる。

Fig. 9 L-shape pipe structure

Fig. 10 Measured dynamic strain mode

6.2 L型の曲がり銅パイプ

図9に示すようなL型の曲がり銅パイプにひずみゲージをはり、両端自由の状態に加振実験を行った。測定点は13番点までとし、5番点をインパクト加振したときの各測定点における面内成分、面外成分、およびねじりによるせん断成分のひずみ伝達関数を測定した。そして、測定されたひずみ伝達関数をカーブフィットすることにより、L型の曲がり銅パイプの各固有振動数におけるひずみモードを求めた。このようにひずみモーダルアナリシスにより求めた曲がり銅パイプのひずみモードをそれぞれ面内曲げひずみ、面外曲げひずみ、およびねじりによるせん断ひずみに分けて図10に示す。

図10からわかるように各固有振動数において、曲管部分には、複雑にひずみが生じていることがわかる。一般に、配管系のひずみ解析が困難となる理由は、曲

Fig. 11 Modeling of the L-shape pipe structure

管部分が含まれていることである。曲管部分は直管部分と比べると曲げ剛性は小さくなり、弾性範囲では同じ曲げモーメントに対し、直管に比べて大きなたわみ角が生じる。曲管部分の剛性が低いのは、曲管が曲げられるとパイプの断面形状が楕円形に変化するためであり、このため、ひずみ分布もパイプの外側と内側で符号が異なるようになる。

そこで、L型曲がり銅パイプの曲管部分を部分構造物とし、断面形状変化に伴うひずみ分布を正確に知るために、図11に示すようにアイソパラメトリックシェル要素⁴⁾⁵⁾によりモデル化を行った。そして、図中のように境界を拘束したときの弾性モードを求めた。

図12に本解析手法によって算出されたL型曲がり銅パイプの曲管部分における3次ひずみモードを示す。シェル要素では、パイプ内壁、外壁における面内、面外等のひずみが算出可能であるが、図中にはパイプ外側の主ひずみのみを示す。この結果から、曲管部分の側面および内側に比較的大きなひずみを生じていることがわかる。

Fig. 12 Predicted dynamic strain mode

7. 結 論

以上より、次の結果が得られた。

- (1) 実験的ひずみモーダルアナリシスと有限要素法を併用して、部分構造物の各固有振動数におけるひずみモードを求める解析方法を開発した。
- (2) 本研究により開発した、部分構造物の動ひずみ解析方法を簡単な構造物の有限要素モデルに適用し、比較的精度よく部分構造物のひずみモードを予測できることを確認した。
- (3) 実際の片持ちばりに、本解析方法を適用し、部分構造物のひずみモードを求め、実験的ひずみモーダルアナリシスにより測定されたひずみモードとの比較を行った。
- (4) L型の曲がり銅パイプに、本解析方法を適用し、曲管部分におけるひずみモードを求め、考察を行った。

参 考 文 献

- 1) 大久保信行：機械のモーダル・アナリシス，中央大学出版部（1982）。
- 2) R. R. Craig, Jr. and M. C. C. Bampton: Coupling of Substructures for Dynamic Analysis, AIAA J., 6, (1968) 1313.
- 3) 鷲津久一郎，宮本 博，山田嘉昭，山本善之，川井忠彦共編：有限要素法ハンドブック，I基礎編，II応用編，培風館（1981）。
- 4) 川股重也：シェル構造解析，培風館（1974）。
- 5) S. Ahamad, B.M. Irons and O.C. Zienkiewicz: Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements, Int. Numerical Methods in Engg., 2, (1970) 419.