ロボットのシミュレーションに関する研究 (第1報)*

—振動解析—

遠山 茂樹**

Research on Simulation of Robot (1st Report)
—Vibration Analysis—

Shigeki TOYAMA

This paper presents a method for analyzing the complete behavior of robotic manipulators with flexible links, in order to simulate motion of robot at the design stage. The strict dynamic properties of robot can be obtained by using Lagrange's equation of motion and finite element method (FEM) and program, including modeling of complicated structure of joints and control system. This method is added to the simulation system of robot motion (TOMCAT) which has been previously developed here. The method presented here provides a useful analytical tool to design lightweight, highspeed robots.

Key words : robotic manipulator, CAD, FEM, vibration analysis, simulator

1. ま え が き

近年, 産業用ロボットが広く使われるようになってきた。しかし, ロボットは従来の機械とはかなり形態が異なり, その設計は経験だけでなく理論的な根拠に基づいて行われなければならない。特に, 最近のロボットは運動の高速化, 高精度化が要求されており, その際最も大きな問題の一つは, 振動問題である。振動問題は, 既にカム機構などで十分に議論されているが, ロボットのような姿勢に変化があり, かつアームがフレキシブルの場合は, 設計時においてあらかじめ振動をシミュレートして, 見当をつけることは大きな意義がある。

しかしながら, ロボットのような複雑な機械要素からなっている機械の力学的モデル化はむづかしく, 特に弾性振動と剛体運動の連成, 関節部の要素の非線形性の考慮が必要である。

さて, ロボットを弾性体として扱い, その弾性振動を研究した論文は多い。これらの研究は, その目的により2つに分けられる。ひとつは, フレキシブルアームの振動をどのように制振するかという制御を論じたものであり^{1)~3)}, もうひとつは先に述べたロボットの運動や振動をシミュレートすることで設計時の参考と

するものである。

Sunada と Dubowsky⁵⁾⁶⁾ は, FEM を用いてロボットの振動を解析しており, 特に Component Mode Synthesis の手法により自由度を減らし計算時間を短縮している。また, 長松らは Uicker の方法をもとにして, 閉ループ, 開ループ構造のロボットについて, 線形系と仮定した時の運動方程式を解いており, 産業ロボット実機による実験結果と比較し, その有効性を示している⁴⁾。三好も FEM を用いて関節部, 特に軸受部を厳密にモデル化し, 静動剛性や残留振動を求めている⁷⁾。しかし以上の研究では, 関節部要素の非線形特性や振動と運動の連成は十分議論されているとは言えない。

そこで, 本論文ではアームの弾性振動と関節の運動方程式を厳密に求めるため Lagrange の方法と FEM の手法を用いて定式化した。この際, 関節部の減速機や軸受の非線形性も考慮してモデル化を行っている。これを先に開発した, 剛体を対象としたロボット運動解析シミュレータ TOMCAT¹⁰⁾ に付加し, その効果を確かめた。

2. 運動方程式

本章ではロボットの運動方程式を, 関節の運動(この, 一般に大きな変位の運動を以後, 剛体運動と呼ぶことにする)と, アームの弾性振動に分けて導くことにする。

* 原稿受付 昭和61年9月12日, 昭和61年度精密工学会春季大会学術講演会(昭和61年3月29日)にて発表

** 正 会 員 東京農工大学工学部(小金井市中町2-24-16)

である。

以上、式 (13), (15), (17) より $l=1, \dots, 12$ についてまとめると、 Tr がすべてなくなり、運動方程式は

$$\begin{aligned} & \rho \int N_i^T N_i dw \ddot{\mathbf{q}}_i + 2\rho \int N_i^T \dot{\tilde{\omega}}_i N_i dw \dot{\mathbf{q}}_i \\ & + \left(\int B^T DB dw + \rho \int N_i^T \tilde{\omega}_i^2 N_i dw \right. \\ & \left. + \rho \int N_i^T \dot{\tilde{\omega}}_i N_i dw \right) \mathbf{q}_i + \rho \int N_i^T \tilde{\omega}_i^2 \mathbf{b}_i dw \\ & + \rho \int N_i^T \dot{\tilde{\omega}}_i \mathbf{b}_i dw + \rho \int N_i^T \dot{\mathbf{v}}_{i0} dw = \mathbf{f}_i \end{aligned} \quad (18)$$

となる。但し

$$\tilde{\omega}_i = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{3i} & \omega_{2i} \\ \omega_{3i} & 0 & -\omega_{1i} \\ -\omega_{2i} & \omega_{1i} & 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$\dot{\tilde{\omega}}_i = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\omega}_{3i} & \dot{\omega}_{2i} \\ \dot{\omega}_{3i} & 0 & -\dot{\omega}_{1i} \\ -\dot{\omega}_{2i} & \dot{\omega}_{1i} & 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

であり、 $\omega_i = (\omega_{1i}, \omega_{2i}, \omega_{3i})$ 、 $\dot{\omega}_i = (\dot{\omega}_{1i}, \dot{\omega}_{2i}, \dot{\omega}_{3i})$ はそれぞれ Σ_i 表示のリンク i の角速度、角加速度を示している。よく知られているように、式 (20) の第1項は、質量マトリクス、第3項の最初の項は剛性マトリクスを示すが、ロボットの場合、アーム自体が運動しているため弾性振動は $\tilde{\omega}_i$ 、 $\dot{\tilde{\omega}}_i$ 、 $\dot{\mathbf{v}}_{i0}$ の影響を受けることがわかる。つまり、アームの弾性振動は関節の運動とエネルギーのやり取りがあり、複雑な振動になる。この結果は、高取らの仮想仕事の原理を使って得た結果とも一致している⁸⁾。また、Sunada と Dubowsky の結果より形状関数 N を用いているため簡潔な形になっている。

2.2 全体の運動方程式

2.1 節でロボットの1リンクについて運動方程式を求めたが、ここでは、全体の運動方程式を求めるため各要素を重ね合わせる。そのために、 Σ_i 表示から Σ_0 表示に変更する。

式 (18) を

$$M_i \ddot{\mathbf{q}}_i + G_i \dot{\mathbf{q}}_i + K_i \mathbf{q}_i = \mathbf{f}_i \quad (21)$$

とすると

$$\mathbf{q}_i = L_i(\phi) \mathbf{s}_i \quad (22)$$

なる変数変換を使って、 Σ_i 表示の $\mathbf{q}_i$ より Σ_0 表示の $\mathbf{s}_i$ に変換することを考えると、式 (21) は

$$\begin{aligned} & L_i^T M_i L_i \ddot{\mathbf{s}}_i + (L_i^T G_i L_i + 2 \sum_{j=1}^i L_i^T M_i \partial L_i / \partial \phi_j \dot{\phi}_j) \dot{\mathbf{s}}_i \\ & + (L_i^T K_i L_i + \sum_{j=1}^i L_i^T G_i (\partial L_i / \partial \phi_j) \dot{\phi}_j) \mathbf{s}_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i L_i^T M_i (\partial^2 L_i / \partial \phi_j \partial \phi_k) \dot{\phi}_j \dot{\phi}_k \\ & + \sum_{j=1}^i L_i^T M_i (\partial L_i / \partial \phi_j) \ddot{\phi}_j \mathbf{s}_i = L_i^T \mathbf{f}_i \end{aligned} \quad (23)$$

となる。式 (23) を、各要素ごとに重ね合わせることにより全体の運動方程式

$$M\ddot{\mathbf{S}} + D\dot{\mathbf{S}} + K\mathbf{S} = \mathbf{F} \quad (24)$$

が求められる。

2.3 剛体の運動方程式

剛体の運動方程式は、分かりやすい Uicker/Kahn の方法で表すと式 (25) のようになる。

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \text{Tr}(\partial T_j / \partial \phi_k J_j \partial T_j^T / \partial \phi_i) \ddot{\phi}_k \\ & + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \sum_{m=1}^j \text{Tr}(\partial^2 T_j / \partial \phi_k \partial \phi_m J_j \partial T_j^T / \partial \phi_i) \dot{\phi}_k \dot{\phi}_m \\ & - \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{g}^T \partial T_j / \partial \phi_i \bar{\mathbf{r}}_j = \mathbf{F}_i - \mathbf{F}_{ei} \end{aligned} \quad (25)$$

ここで $\mathbf{F}_{ei}$ は弾性振動による項である。

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{ei} = & \sum_{j=i}^n \text{Tr}(\partial T_j / \partial \phi_i \rho \int \mathbf{R}_j \ddot{\mathbf{R}}_j dw T_j^T \\ & + \sum_{m=1}^j \partial T_j / \partial \phi_i \rho \int \mathbf{R}_j \dot{\mathbf{R}}_j^T dw \partial T_j^T / \partial \phi_m \dot{\phi}_m \\ & - \sum_{m=1}^j \partial T_j / \partial \phi_m \rho \int \mathbf{R}_j \dot{\mathbf{R}}_j^T dw \partial T_j^T / \partial \phi_i \dot{\phi}_m) \end{aligned} \quad (26)$$

(J_i : 擬似慣性行列、 $\ddot{\phi}_k$, $\dot{\phi}_k$, ϕ_k : 第 k 関節の加速度、速度、変位、 m_i : リンク i の質量、 $\mathbf{g}$: 重力加速度ベクトル、 $\bar{\mathbf{r}}_i$: リンク i の重心ベクトル、 n : 全自由度)

厳密には式 (25), (26) が剛体としての運動を示す。 $\ddot{R}_i$, $\dot{R}_i$, R_i は一般に、関節の変位に比べて正弦的に小さく振動するだけであり、強力なサーボがかかっている関節の運動には大きく影響を及ぼさないと考えられる。従って、計算時間短縮のため、式 (25) で $\mathbf{F}_{ei}=0$ として解くことにする。このルーチンは現在では Newton-Euler 法によるアルゴリズムと Runge-Kutta 法による数値積分に変更し高速化を図っている。

3. 関節とアームのモデル

ロボットの関節部は、多くの構造があるが、ここでは代表的な例として、図2に示すハーモニックドライブギア、軸、軸受よりなる関節を考える。Z 軸まわりの剛性は、主にハーモニックドライブギアの剛性が効き、X 軸、Y 軸まわりの剛性は主に軸受の剛性が効くものとする。また、X, Y, Z 軸の並進方向は、軸受の剛性が主に効くものと仮定する。

一般に軸受の荷重とたわみの関係は Hertz の弾性

Fig. 2 Typical structure of joint

接触理論により導かれ非線形である。例えば玉軸受(深溝形)では、

$$\text{半径方向 } \delta_r = 0.00044(Q_{\max}^2/D_a)^{1/3} \quad (\text{mm}) \quad (27)$$

$$\text{軸方向 } \delta_a = 0.00093/\sin \alpha (Q/D_a)^{1/3} \quad (\text{mm}) \quad (28)$$

但し $Q_{\max} = 5F_r/(Z \cos \alpha_0)$, $Q = F_a/(Z \sin \alpha)$ なる関係がある⁹⁾。ここで、 Q : 玉一つに加わる荷重(N), D_a : 玉の直径(mm), α : 負荷時の接触角, α_0 : 無負荷時の接触角, δ : たわみ(mm), F_r : ラジアル

荷重(N), F_a : スラスト荷重(N), Z : 転動体の数。

$$F = K\delta^{3/2} \quad (29)$$

なる関係がある。

このような特性のばねに対して、最大たわみ δ_0 を仮定して、蓄えられるひずみエネルギーが等しいという仮定のもとに等価な線形ばね定数 K_e を定める。

$$K_e = 4/5 K \delta_0^{1/2} \quad (30)$$

すなわち、 K_e はたわみ δ_0 の関数として定義され、振幅が小さいときは柔らかいばね、振幅が大きいたまきは硬いばねを示す。今

$$K_1 = 2K_{er}, K_2 = 2K_{ea}, K_3 = K_{oz} \quad (31)$$

(K_{er} : 半径方向のベアリングの等価ばね定数, K_{ea} : 軸方向のベアリングの等価ばね定数, K_{oz} : Z 軸方向のハーモニックドライブギアによる等価ばね定数) とすると、図2の関節要素の剛性マトリクスは以下のようになる。

$$\begin{matrix} & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 & p_8 & p_9 & p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ \begin{matrix} F_{xL} \\ F_{yL} \\ F_{zL} \\ M_{xL} \\ M_{yL} \\ M_{zL} \\ F_{xR} \\ F_{yR} \\ F_{zR} \\ M_{xR} \\ M_{yR} \\ M_{zR} \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccccccccc} K_1 & 0 & 0 & 0 & d/2K_1 & 0 & -K_1 & 0 & 0 & 0 & d/2K_1 & 0 \\ 0 & K_1 & 0 & -d/2K_1 & 0 & 0 & 0 & -K_1 & 0 & -d/2K_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d/2K_1 & 0 & d^2/3K_1 & 0 & 0 & 0 & -d/2K_1 & 0 & d^2/3K_1 & 0 & 0 \\ d/2K_1 & 0 & 0 & 0 & d^2/3K_1 & 0 & -d/2K_1 & 0 & 0 & 0 & d^2/6K_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_3 \\ -K_1 & 0 & 0 & 0 & -d/2K_1 & 0 & K_1 & 0 & 0 & 0 & -d/2K_1 & 0 \\ 0 & -K_1 & 0 & d/2K_1 & 0 & 0 & 0 & K_1 & 0 & d/2K_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d/2K_1 & 0 & d^2/3K_1 & 0 & 0 & 0 & d/2K_1 & 0 & d^2/3K_1 & 0 & 0 \\ d/2K_1 & 0 & 0 & 0 & d^2/6K_1 & 0 & -d/2K_1 & 0 & 0 & 0 & d^2/3K_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_3 \end{array} \right] \end{matrix} \quad (32)$$

(d : ベアリング間の距離, F_{pk} , M_{pk} : それぞれ右($k=R$), 左($k=L$)の p 軸方向, p 軸回りの力とモーメント)

とする。これはアーム要素(はり要素で近似)の剛性マトリクスと、整合性をよくするために同形にしてある。また、質量マトリクスは、はり要素の質量マトリクスを使用している。

つまり、関節もはりと同じたわみ曲線を仮定したことになる。

4. ロボットの運動解析シミュレータ (TOMCAT)¹⁰⁾

本章では、ロボットの運動解析シミュレータ TOMCAT の説明を行う。図3に全体の構成を示す。直列型のロ

Fig. 3 Simulation system of robotic manipulator motion (TOMCAT)

Fig. 4 Finite-element model of manipulator system

Table 1 Length, radius and mass of each link

Link	Length m	Radius m	Mass kg
# 0	0.15	0.10	30
# 1	0.10	0.10	20
# 2	0.10	0.10	10
# 3	0.15	0.08	2
# 4	0.10	0.08	2
# 5	0.35	0.10	2
# 6	0.15	0.08	1
# 7	0.10	0.08	1
# 8	0.18	0.10	1

ボットのすべてについて、速度、加速度解析、順動力学、逆動力学、逆変換問題が扱える。今回、弾性ロボットの場合は、ハウスホルダ法によるモード解析、Wilsonの θ 法による振動シミュレーションルーチンを加えた。まず、ロボットの諸元を読み込み、剛体の運動方程式(25)を求める。この時、制御則も指定する。Runge-Kutta法により数値積分を行い、時間 ΔT 後の $\hat{\omega}_i, \hat{\dot{\omega}}_i, \hat{v}_{i0}$ を求めて、弾性体の運動方程式(19), (25)を求める。この際、時間的に変化しない $\rho \int N_i^T N_i dw$, $\int B^T DB dw$ はあらかじめ求めておき、他の係数はすべて ΔT ごとに計算し直す。式(24)をWilsonの θ 法で積分し Δt 後の状態を計算する。以上を繰り返すわけであるが、一般に $\Delta T \gg \Delta t$ としてよいので、弾性振動を計算している ΔT の間は、 $\hat{\omega}_i, \hat{\dot{\omega}}_i, \hat{v}_{i0}$ は一定とされている。

(a) Command profile and response of rigid and flexible links

(b) Response of flexible link #2

(c) Response of flexible link #2

(d) Response of flexible link #2

Fig. 5

5. 解 析 例

図4に示す3自由度のビューマ型ロボットについて解析する。同図にこの弾性体モデルのリンク番号 $\#$ と座標系の設定、関節番号 $\$$ を示し、諸元を表1に示す。また、軸受は深溝形の玉軸受を仮定し、変位 $\delta=100\mu\text{m}$ として予圧はかけないものとする。目標軌道は関節 $\$1$ が0から $\pi/2$ (rad)まで、1sで移動するサイクロイド曲線である。

弾性振動のシミュレーションは、時間刻み1msとし、数十Hzの振動数以下の振動がシミュレートできるようにした。結果を図5(a)~(d)に示す。剛体の運動がdwell時に振動しているのはサーボ剛性によるものである。また、アームにかかる力によりアームが周期的にねじれていることがわかる(図5(a)参照)。また、図5(b),(c)に示すようにこの上にハーモニックドライブギヤによる約80Hzの弾性振動が乗っている。しかし、時間が経つにつれて図5(b),(c)に示すように、この振動が小さくなっていくのは式(18)の第2項による影響であると思われる。しかし、これは必ずしも減衰として働くわけではなく、コリオリの力や遠心力と同じ性質のものであり、剛体運動からのエネルギーの授受に関係している。

使用した計算機は、Cromemco社の102UX(CPUはMC 68010(10MHz)、OSはUNIX System V、数値演算素子は使用していない)である。プログラムはFortranで記述し、計算時間は、弾性振動1stepあたり約40s、剛体運動1stepあたり約2sであった。

6. 結 論

以上の研究の結果、次の結論を得た。

- (1) フレキシブルアームを持ったロボットについて、Lagrangeの方程式とFEMの手法を用いて厳密な運動方程式を導出した。
- (2) 関節における機械要素(軸、軸受、ハーモニッ

クドライブギヤ)のヘルツの弾性接触理論による非線形特性も考慮して剛性マトリクスを作成した。

- (3) ロボットの運動解析シミュレータTOMCATに組み込み、その効果を示した。

実際に応用するためには、各種の関節構造について関節部の固体、粘性摩擦、ガタ等の非線形特性も考慮した詳しいモデル化が必要であり、さらに実機による検証も必要である。これは今後の課題とする。

最後に、本研究は昭和60年度の文部省科学研究費補助金の補助を得て行われたものである。

参 考 文 献

- 1) 福田敏夫：フレキシブルロボットアームの制御(第1報、一、二自由度系の位置決め時の振動制御)、日本機械学会論文集(C編)、51, 468(1985)2140.
- 2) R. H. Cannon & E. Schmitz: Initial Experiments on the End-point Control of a Flexible One-link Robot, Robotics Res., 3, 3, (1984) 62.
- 3) A. Truckenbrodt: Truncation Problems in the Dynamics and Control of Flexible Mechanical Systems, 8th IFAC World Congress, 14, (1981) XIV-60.
- 4) 長松昭男, 斉藤 俊, 桜井康雄: ロボットのシミュレーションに関する研究, 日本機械学会論文集(C編)、51, 470(1985)2684.
- 5) W. Sunada & S. Dubowsky: The Application of Finite Element Methods to the Dynamic Analysis of Flexible Spatial and Co-planer Linkage Systems, Trans. ASME, J. Mech. Design, 103, (1981) 643.
- 6) W. Sunada & S. Dubowsky: On the Dynamic Analysis and Behavior of Industrial Robotic Manipulators with Elastic Members, Trans. ASME, J. Mech. Transm. Autom. Des., 105, (1983) 42.
- 7) 三好俊郎: 有限要素法によるロボットの動力学解析, 精密機械, 51, 11(1985)2020.
- 8) 高取則彦, 嘉数侑昇, 沖野教郎: CSGソリッドモデルで構成するロボットモデルのFEM特性評価システムの開発, 昭和60年度精機学会春季大会学術講演会講演論文集(1985)535.
- 9) 岡本純三, 角田和雄: 転がり軸受, 幸書房(1981)61.
- 10) 遠山茂樹: ロボットの誤差解析, 精密工学会誌, 52, 8(1986)1309.