幾何学的干渉問題における 4×4 行列式法の 基礎理論*

山 口 富 士 夫**

The Basic Theories of the 4×4 Determinant Method in
Geometric Interference Problems

Fujio YAMAGUCHI

Theories of the 4×4 determinant approach to interference problems are described, in detail, in succession to the former paper. First, various cases of the 4×4 determinant are discussed including the geometric implications. Secondly, normalization of the determinant is proposed. Lastly, an intersection formula in homogeneous coordinates is verified which makes it possible to do consistent homogeneous coordinate processing from the very beginning of geometric modeling to the very last of displaying objects. This article will provide theoretical foundations for the 4×4 determinant approach in computer graphics and geometric modeling.

Key words: interference problems, geometric modeling, computational geometry, solid modeling, hidden line and surface detections, computer aided design

1. ま え が き

図形・形状処理において、「変換」処理は頻繁に現れる。その変換は、 4×4 行列により、統一的に表現でき、かつ 4×4 行列の乗算により統一的に処理し得ることが知られ、学問としての体系が整っていると考えられる。この体系化は、3次元の変換を、4次元同次座標空間における線形変換であるとみなすことによりなし得たものであると考えられる¹⁾²⁾。

著者は、図形・形状処理において現れる各種の干渉問題に関心を持ち、その体系化を目指している。ソリッドモデリングにおける形状の集合演算、隠れ線・面の消去、光線追跡法、マスプロパティの算出、加工における工具とワークの干渉、ロボットの干渉問題など干渉問題は様々な形で現れる。干渉問題に共通な要素は何であろうか。著者の結論は、「干渉問題は、同次座標を用いた 4×4 行列式によって、統一的に記述され、一連の 4×4 行列式を計算することにより統一的に処理し得る」である³⁾。この結論は、既に数種類の干渉問題に適用され実証されている⁴⁾。すなわち、干渉問題も、4次元同次座標空間における処理とすることにより統

一化が可能となるのである。またこの理論に基づき、 4×4 行列式計算をシステムティックに、高速に行うプロセッサが著者らにより試作され、ほぼ期待された結果が得られている³⁾⁴⁾。各種の幾何学的計算処理を 4×4 行列式の演算により統一的に行う方式を「 4×4 行列式法」と呼ぶことにする。

本論文においては、 4×4 行列式法の基礎理論を詳細に論ずる。 4×4 行列式の各種応用に対する適用については、他の論文を参照されたい³⁾⁵⁾。2章では、同次座標による 4×4 行列式の定義と基礎式を与える。3章では、行列式の行に無限遠点を表す同次座標が入る場合も含む5つの場合について、 4×4 行列式の幾何学的意味、基礎的關係式などを調べる。4章では、 4×4 行列式のスケールファクタ k_b, k_h の符号と 4×4 行列式の符号の關係等を調べる。5章において、 4×4 行列式の正規化を定義する。6章では、同次座標における交点公式の証明を与える。この公式により、形状モデリングの最初の段階から、表示の最終段階まで一貫して同次座標処理が可能となる。

2. 4×4 行列式

1点 V_A の座標を同次座標表現で (X_A, Y_A, Z_A, w_A) とする。また、一つの3角形を表側から見て、反時計回転の順序に頂点の同次座標を $V_0(X_0, Y_0, Z_0, w_0)$, $V_1(X_1, Y_1, Z_1, w_1)$, $V_2(X_2, Y_2, Z_2, w_2)$ とする(図1)。

* 原稿受付 昭和61年9月19日, 昭和61年度精密工学会春季大会学術講演会(昭和61年3月29日)にて発表

** 正 会 員 早稲田大学理工学部(東京都新宿区大久保 3-4-1)

Fig. 1 A point and a triangle in homogeneous coordinates

3点 V_0, V_1, V_2 を通る平面の式は、同次座標により式 (1) で表される。

すなわち

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & w \\ X_0 & Y_0 & Z_0 & w_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & w_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & w_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

さて、与えられた4点 V_A, V_0, V_1, V_2 で作られる 4×4 行列式を S_{A012} と記すことにする（本論文では、一般の同次座標を表す記号を大文字で V_A, V_0 のごとく、またスケールファクタが1の同次座標または通常座標を表す記号を小文字で v_A, v_0 のように表現する）。すなわち、

$$S_{A012} \equiv \begin{vmatrix} X_A & Y_A & Z_A & w_A \\ X_0 & Y_0 & Z_0 & w_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & w_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & w_2 \end{vmatrix} \quad (2)$$

$$= X_A N_x + Y_A N_y + Z_A N_z + w_A D \quad (3)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \begin{vmatrix} Y_0 & Z_0 & w_0 \\ Y_1 & Z_1 & w_1 \\ Y_2 & Z_2 & w_2 \end{vmatrix} \\ N_y &= \begin{vmatrix} Z_0 & X_0 & w_0 \\ Z_1 & X_1 & w_1 \\ Z_2 & X_2 & w_2 \end{vmatrix} \\ N_z &= \begin{vmatrix} X_0 & Y_0 & w_0 \\ X_1 & Y_1 & w_1 \\ X_2 & Y_2 & w_2 \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$D = - \begin{vmatrix} X_0 & Y_0 & Z_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}$$

3 角形 $V_0 V_1 V_2$ 平面上の任意の点の通常座標を (x_p, y_p, z_p) とすれば、式 (1) より

$$x_p N_x + y_p N_y + z_p N_z + D = 0$$

の関係がある。従って

$$\begin{aligned} S_{A012} &= X_A N_x + Y_A N_y + Z_A N_z + w_A D \\ &\quad - w_A (x_p N_x + y_p N_y + z_p N_z + D) \\ &= w_A \{ (X_A - x_p) N_x + (Y_A - y_p) N_y \\ &\quad + (Z_A - z_p) N_z \} \end{aligned} \quad (5)$$

となる。また V_A として、原点の座標 $(X_A, Y_A, Z_A, w_A) = (0, 0, 0, 1)$ を、式 (3) に代入すると、この場合には

$$S_{A012} = D \quad (6)$$

なる関係式を得る。式 (6) より、 D は、 V_A が原点である場合（ただし、 $w_A = 1$ ）の S_{A012} に等しいことがわかる。

3. 4×4 行列式の各種の場合の意味付け

4×4 行列式は、そこに含まれる無限遠点の数によりいろいろな場合があり得る。以下に、各場合における N_x, N_y, N_z, D および S_{A012} の意味について考えよう。

<1> V_A, V_0, V_1, V_2 がいずれも有限点である場合 ($w_A, w_0, w_1, w_2 \neq 0$)

式 (4) より、次の関係が得られる。すなわち

$$[N_x \ N_y \ N_z] = k_b [n_x \ n_y \ n_z] \quad (7)$$

$$D = k_b d \quad (8)$$

ここに、

$$\begin{aligned} n_x &= \begin{vmatrix} y_0 & z_0 & 1 \\ y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} \\ n_y &= \begin{vmatrix} z_0 & x_0 & 1 \\ z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \end{vmatrix} \\ n_z &= \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} \\ d &= - \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$k_b = w_0 w_1 w_2$$

ベクトル $[n_x \ n_y \ n_z]$ は、3 角形 $V_0 V_1 V_2$ の表向き法線ベクトルで、その大きさは V_0, V_1, V_2 によって作られる平行 4 辺形の面積に等しい⁵⁾。この面積を b_{012}

とおこう。式(7)より, $[N_x \ N_y \ N_z]$ は, 与えられた3角形の法線ベクトルを表し, その大きさは, b_{012} の $|k_b|$ 倍であることが知れる。式(5)は, ベクトル $[N_x \ N_y \ N_z]$ とベクトル $w_A[x_A - x_p \ y_A - y_p \ z_A - z_p]$ との内積を表す。従って, 点 V_A から3角形平面に至る符号付き垂直距離を h_{A012} (V_A が3角形平面の表側半空間にあるとき正, 裏側半空間にあるとき負)とすれば, 式(5)より

$$S_{A012} = (k_h h_{A012})(k_b b_{012}) \quad (9)$$

なる関係式が得られる。ここに,

$$k_h = w_A$$

また S_{A012} については, 式(9)より, 底面積が, b_{012} の $|k_b|$ 倍で, 高さが点 V_A から3角形平面に至る垂直距離 (h_{A012}) の $|k_h|$ 倍に等しい平行6面体の符号付き体積を表すことがわかる (図2(a))。

<2> V_A が無限遠点である場合 ($w_0, w_1, w_2 \neq 0$, $w_A = 0$)

この場合, V_0, V_1, V_2 , は<1>の分類の場合と同じであるから, 式(7), (8)が成立することは明らかである。

式(3)より

$$S_{A012} = X_A N_x + Y_A N_y + Z_A N_z \quad (10)$$

式(10)と式(5)と比較することにより, <1>の分類の場合において, $V_A = [x_p + X_A \ y_p + Y_A \ z_p + Z_A \ 1]$ とした場合に相当する。従って, $k_h = 1$ とすることにより式(9)が成立する (図2(b))。

<3> V_0, V_1, V_2 のうちのいずれか一つが無限遠点である場合

例えば, V_1 が無限遠点, すなわち $w_A, w_0, w_2 \neq 0$, $w_1 = 0$ の場合を考えよう。このとき, 式(4)における N_x, N_y, N_z, D は, 次のように変形できる。

すなわち

$$\begin{aligned} N_x &= \begin{vmatrix} Y_0 & Z_0 & w_0 \\ Y_1 & Z_1 & 0 \\ Y_2 & Z_2 & w_2 \end{vmatrix} \\ &= w_0 w_2 \begin{vmatrix} y_0 & z_0 & 1 \\ y_0 + Y_1 & z_0 + Z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} \\ N_y &= \begin{vmatrix} Z_0 & X_0 & w_0 \\ Z_1 & X_1 & 0 \\ Z_2 & X_2 & w_2 \end{vmatrix} \\ &= w_0 w_2 \begin{vmatrix} z_0 & x_0 & 1 \\ z_0 + Z_1 & x_0 + X_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_z &= \begin{vmatrix} X_0 & Y_0 & w_0 \\ X_1 & Y_1 & 0 \\ X_2 & Y_2 & w_2 \end{vmatrix} \\ &= w_0 w_2 \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_0 + X_1 & y_0 + Y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} \\ D &= - \begin{vmatrix} X_0 & Y_0 & Z_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \\ &= -w_0 w_2 \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_0 + X_1 & y_0 + Y_1 & z_0 + Z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

この場合

$$\begin{aligned} n_x &= \begin{vmatrix} y_0 & z_0 & 1 \\ y_0 + Y_1 & z_0 + Z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} \\ n_y &= \begin{vmatrix} z_0 & x_0 & 1 \\ z_0 + Z_1 & x_0 + X_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \end{vmatrix} \\ n_z &= \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_0 + X_1 & y_0 + Y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} \\ d &= - \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_0 + X_1 & y_0 + Y_1 & z_0 + Z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$k_b = w_0 w_2$$

とおけば, やはり式(7), (8)が成立している。

また, 二つのベクトルの内積式(5)において, 一方のベクトル $w_A[x_A - x_p \ y_A - y_p \ z_A - z_p]$ は, <1>の分類の場合と同じであるから, $k_h = w_A$ として式(9)が成立する。

すなわち, <3>の分類の場合は, <1>の分類の場合において, V_1 を $V_1' = [x_0 + X_1 \ y_0 + Y_1 \ z_0 + Z_1 \ 1]$ とした場合に相当する (図2(c))。

<4> V_0, V_1, V_2 のうち, いずれか二つが無限遠点である場合

たとえば, V_1, V_2 が無限遠点, すなわち $w_0, w_A \neq 0$, $w_1 = w_2 = 0$ の場合を考える。このとき, 式(4)における N_x, N_y, N_z, D は, 次のように変形できる。すなわち

$$\begin{aligned} N_x &= \begin{vmatrix} Y_0 & Z_0 & w_0 \\ Y_1 & Z_1 & 0 \\ Y_2 & Z_2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= w_0 \begin{vmatrix} y_0 & z_0 & 1 \\ y_0 + Y_1 & z_0 + Z_1 & 1 \\ y_0 + Y_2 & z_0 + Z_2 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Fig. 2 Geometric implications of the 4×4 determinant

$$N_y = \begin{vmatrix} Z_0 & X_0 & w_0 \\ Z_1 & X_1 & 0 \\ Z_2 & X_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= w_0 \begin{vmatrix} z_0 & x_0 & 1 \\ z_0 + Z_1 & x_0 + X_1 & 1 \\ z_0 + Z_2 & x_0 + X_2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$N_z = \begin{vmatrix} X_0 & Y_0 & w_0 \\ X_1 & Y_1 & 0 \\ X_2 & Y_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= w_0 \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_0 + X_1 & y_0 + Y_1 & 1 \\ x_0 + X_2 & y_0 + Y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = - \begin{vmatrix} X_0 & Y_0 & Z_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}$$

$$= -w_0 \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_0 + X_1 & y_0 + Y_1 & z_0 + Z_1 \\ x_0 + X_2 & y_0 + Y_2 & z_0 + Z_2 \end{vmatrix}$$

この場合,

$$n_x = \begin{vmatrix} y_0 & z_0 & 1 \\ y_0 + Y_1 & z_0 + Z_1 & 1 \\ y_0 + Y_2 & z_0 + Z_2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$n_y = \begin{vmatrix} z_0 & x_0 & 1 \\ z_0 + Z_1 & x_0 + X_1 & 1 \\ z_0 + Z_2 & x_0 + X_2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$n_z = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_0 + X_1 & y_0 + Y_1 & 1 \\ x_0 + X_2 & y_0 + Y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$d = - \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_0 + X_1 & y_0 + Y_1 & z_0 + Z_1 \\ x_0 + X_2 & y_0 + Y_2 & z_0 + Z_2 \end{vmatrix}$$

$$k_b = w_0$$

とおけば, やはり式 (7), (8) が成立している.

また, 二つのベクトルの内積式 (5) において, 一方のベクトル $w_A [x_A - x_p \ y_A - y_p \ z_A - z_p]$ は, $\langle 1 \rangle$ の分類の場合と同じであるから, $k_h = w_A$ として式 (9) が成立する.

すなわち, $\langle 4 \rangle$ の分類の場合は, $\langle 1 \rangle$ の分類の場合において V_1, V_2 の代わりにそれぞれ $V_1' = [x_0 + X_1 \ y_0 + Y_1 \ z_0 + Z_1 \ 1]$, $V_2' = [x_0 + X_2 \ y_0 + Y_2 \ z_0 + Z_2 \ 1]$ とした場合に相当する (図 2 (d)).

<5> V_0, V_1, V_2 のすべてが無限遠点である場合
($w_A \neq 0, w_0, w_1, w_2 = 0$)

三つの無限遠点によって, 無限遠平面 $w=0$ ができる. この場合 S_{A012} は, 断面積が 0 で無限に延びる特別な平行 6 面体を表し, 有限値 $w_A D$ なる値をとる. これは実際には, 普通現れないきわめて特殊な場合である.

以上より $\langle 1 \rangle \sim \langle 4 \rangle$ のいずれの分類の場合においても, 基礎式 (7), (8), (9) の成立することがわかった. また本章において, 4×4 行列式に無限遠点が含まれる場合も, その点を有限点に変更して S_{A012} を統一的に意味付けできることを示した.

4. 4×4 行列式の正規化

前述したように, 4×4 行列式は, 平行 6 面体の符号付きの体積を表す. すなわち

$$S_{A012} = H_{A012} B_{012} \quad (11)$$

ここに, H_{A012} は, 点 V_A から 3 角形 $V_0 V_1 V_2$ 平面に至る垂直距離 (h_{A012}) のスケール倍された値

$$H_{A012} = k_h h_{A012} \quad (12)$$

を表し, また B_{012} は, 3 角形 $V_0 V_1 V_2$ の面積の 2 倍, すなわち平行 4 辺形の面積 (b_{012}) のスケール倍された値

$$B_{012} = k_b b_{012} \quad (13)$$

を表す. 4×4 行列式法においては, S_{A012} が点 V_A から 3 角形平面に至る垂直距離に比例することと, その符号が 3 角形平面に対する点 V_A の存在する半空間を表すことの二つの性質が利用される (具体的適用法については, 文献 3), 5) を参照). ところで, H_{A012} にもこれらの二つの性質がある. 体積のディメンジョンを持つ量より, 長さのディメンジョンの方が, 0 として見なされる許容長さとの関係が直接的であり, はるかに扱いやすい. そこで以後は, “S” の代わりに “H” を用いることにする. “S” で成立する関係式は, ほとんど “H” でも成立する. ただし, “S” の場合には, 添字の位置を交換しても符号が逆転するだけで, 数値の大きさは変わらない. しかし “H” の場合には, 添字 0, 1, 2 の間ではこの関係があるが, 添字 A と, 0, 1, 2 の間で交換した場合, 幾何学的関係が異なるので数値が変わることに注意する必要がある. H_{A012} は, S_{A012} を計算したのち, B_{012} により除すことにより得られる. この処理を 4×4 行列式の正規化と呼ぶことにする.

なお, 将来, 多倍長データ演算により, 計算に伴う誤差を考慮する必要がなくなった場合には, 4×4 行列式の正規化をする必要はなく, S_{A012} のみを用いて統一処理が可能である.

5. k_h, k_b の符号と $[N_x \ N_y \ N_z]$, H_{A012}, D との関係

x, y, z 通常座標系は, 右手系であると仮定する. 第 3 章で分類した $\langle 1 \rangle \sim \langle 4 \rangle$ の各場合に次の関係が成立する.

① 法線ベクトル $[N_x \ N_y \ N_z]$

- $k_b > 0 \cdots \cdots [N_x \ N_y \ N_z]$ は, 3 角形の表向き法線ベクトル
- $k_b < 0 \cdots \cdots [N_x \ N_y \ N_z]$ は, 3 角形の裏向き法線ベクトル

② V_A と H_{A012}

式 (12) より

- $H_{A012} = 0 \cdots \cdots$ 点 V_A は, 3 角形平面上に存在する.
- $\text{sign}(k_h) = \text{sign}(H_{A012}) \cdots \cdots$ 点 V_A は, 3 角形平面に対し表側半空間に存在する.
- $\text{sign}(k_h) \neq \text{sign}(H_{A012}) \cdots \cdots$ 点 V_A は, 3 角形平面に対し裏側半空間に存在する.

③ 座標系原点と D

3 角形平面に対する原点の位置は, 式 (6) および (9) から, D と k_b の符号により知れる. すなわち

- $D = 0 \cdots \cdots$ 原点は, 3 角形平面上に存在する.

Fig. 3 Intersection formula

- $\text{sign}(k_b) = \text{sign}(D)$ ……原点は、3 角形平面に対し表側半空間に存在する。
- $\text{sign}(k_b) \neq \text{sign}(D)$ ……原点は、3 角形平面に対し裏側半空間に存在する。

6. 交点公式

4×4 行列式法においては、無限半直線は、有限線分と全く同様に扱うことができる。交点を求める場合に、線分端点の同次座標のスケールファクタは、0 を含め任意でよいのである。以下には同次座標の線分と3 角形平面との交点公式を証明しよう。この公式によって、形状モデリングの最初の段階から、それを表示する最後の段階までを一貫して同次座標処理することが可能となる。

[交点公式]

同次座標で表された線分 $V_A V_B$ と3 角形 $V_0 V_1 V_2$ が与えられ、端点 V_A, V_B が3 角形平面の両側にあるとき、交点座標 $P = (X, Y, Z, w)$ は、次式で表される。すなわち

$$P = V_A + \frac{H_{A012}}{H_{A012} - H_{B012}} (V_B - V_A) \quad (14)$$

交点の通常座標 (x, y, z) は、 $x = X/w$, $y = Y/w$, $z = Z/w$ なる演算を実行することにより求められる。

[証明]

次の記号を用いることにする。すなわち

$$p = [x \ y \ z \ 1]$$

$$V_A = [x_A \ y_A \ z_A \ 1]$$

$$V_B = [x_B \ y_B \ z_B \ 1]$$

$$h_{A012} \equiv \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & w_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & w_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & w_2 \end{vmatrix} / B_{012}$$

$$h_{B012} \equiv \begin{vmatrix} x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & w_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & w_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & w_2 \end{vmatrix} / B_{012}$$

$$P = [X \ Y \ Z \ w]$$

$$V_A = [x_A \ y_A \ z_A \ w_A]$$

$$V_B = [x_B \ y_B \ z_B \ w_B]$$

$$H_{A012} \equiv \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A & w_A \\ x_0 & y_0 & z_0 & w_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & w_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & w_2 \end{vmatrix} / B_{012}$$

$$= w_A h_{A012} \quad (w_A \neq 0 \text{ の場合})$$

$$H_{B012} \equiv \begin{vmatrix} x_B & y_B & z_B & w_B \\ x_0 & y_0 & z_0 & w_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & w_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & w_2 \end{vmatrix} / B_{012}$$

$$= w_B h_{B012} \quad (w_B \neq 0 \text{ の場合})$$

<1> V_A と V_B が共に有限点である場合 ($w_A \neq 0$ かつ $w_B \neq 0$) (図3(a))

h_{A012} と h_{B012} は、共にそれぞれ点 V_A と V_B から3 角形平面に至る垂直距離であるので、通常座標に関する次の関係式(15)が成立することは明らかである。すなわち、

$$p = V_A + \frac{h_{A012}}{h_{A012} - h_{B012}} (V_B - V_A) \quad (15)$$

式(15)の右辺を書き直すと、

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \frac{V_A}{w_A} + \frac{H_{A012}/w_A}{(H_{A012}/w_A) - (H_{B012}/w_B)} \\ &\quad \times \left(\frac{V_B}{w_B} - \frac{V_A}{w_A} \right) \\ &= \frac{V_A + \frac{H_{A012}}{H_{A012} - H_{B012}} (V_B - V_A)}{w_A + \frac{H_{A012}}{H_{A012} - H_{B012}} (w_B - w_A)} \\ &= \frac{P}{w} \end{aligned}$$

$w_A \neq 0$ かつ $w_B \neq 0$ の場合に、式(14)は証明された。

<2> V_A または V_B のいずれかが無限遠点である場合 ($w_A = 0$ または $w_B = 0$) (図3(b))

V_B が、ベクトル $[x_B \ y_B \ z_B]$ 方向の無限遠点である

としよう。すなわち

$$\mathbf{V}_B = [X_B \ Y_B \ Z_B \ 0]$$

前述したように、この場合 H_{B012} は、3 角形平面上に立てられたベクトル $[X_B \ Y_B \ Z_B]$ の先端から、3 角形平面に至る垂直距離を表す。従って次の関係式が成立する。

$$\mathbf{P} = \mathbf{V}_A + \left(\frac{H_{A012}/w_A}{-H_{B012}} \right) [X_B \ Y_B \ Z_B \ 0] \quad (16)$$

式 (16) の右辺を書き替えると

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \frac{\mathbf{V}_A}{w_A} + \left(\frac{H_{A012}/w_A}{-H_{B012}} \right) \mathbf{V}_B \\ &= \frac{\mathbf{V}_A + \frac{H_{A012}}{H_{A012} - H_{B012}} (\mathbf{V}_B - \mathbf{V}_A)}{w_A + \frac{H_{A012}}{H_{A012} - H_{B012}} (-w_A)} \\ &= \frac{\mathbf{V}_A + \frac{H_{A012}}{H_{A012} - H_{B012}} (\mathbf{V}_B - \mathbf{V}_A)}{w_A + \frac{H_{A012}}{H_{A012} - H_{B012}} (w_B - w_A)} \\ &(\because w_B = 0) \\ &= \frac{\mathbf{P}}{w} \end{aligned}$$

式 (14) は、 $w_A = 0$ または $w_B = 0$ の場合においても成立することが証明された。

以上の証明から明らかなように、3 次元の交点式は、有限線分の場合 (式 (15)) と無限半直線の場合 (式 (16)) では、別個の式となるが、4 次元で表現することにより統一した単一の式 (式 (14)) で表現できるのである。

7. ま と め

著者は、図形・形状処理において、いろいろな問題

として現れる各種の幾何学的干渉問題を統一的に処理する理論として、4×4 行列式法を提案し、いくつかの応用に対し成果を得ている⁴⁾。本論文は、最も一般的な形での 4×4 行列式、すなわち、そこに表現される同次座標のスケールファクタ w が 0 (すなわち無限遠点) の場合も含め、任意の場合の 4×4 行列式に関し、4×4 行列式法の理論的基礎となる事項について論じた。その主な項目を以下に列挙する。

1. 4×4 行列式に無限遠点の同次座標が含まれた場合の扱いに関する証明
2. 様々な場合の 4×4 行列式の幾何学的意味付け
3. S_{A012} と H_{A012} の区別
4. 諸量の符号の関係
5. 4 次元における交点公式の証明

従来、図形・形状処理においては、変換およびクリッピングにおいて、4 次元同次座標処理による統一化が行われていた。著者の提案する 4×4 行列式法の技術は、干渉問題に対しても一般的な 4 次元同次座標処理による統一化を可能とするものである。

参 考 文 献

- 1) W. M. Newman & R. F. Sproull: Principles of Interactive Computer Graphics, McGraw-Hill, New York, N. Y., (1973).
- 2) 山口富士夫: 図形処理工学, 日刊工業新聞社 (1981).
- 3) F. Yamaguchi: A Unified Approach to Interference Problems Using a Triangle Processor, SIGGRAPH '85 Conf. Proc., 19, 3, (1985).
- 4) F. Yamaguchi, T. Tatemichi & R. Ebisawa: Applications of the 4×4 Determinant Approach and the TRIANGLE PROCESSOR to Various Interference Problems, Computer Graphics TOKYO '86.
- 5) 岩切晴二: 線形代数学精説, 培風館 (1971) 122~123.

編集後記

生産活動の合理化を目指す手段として、装置の制御に始まり、生産管理、設計、はては経営管理までの全体にコンピュータを用いるのが今や常識のようになってきた。ほかにも方法があろうとも思うが、コンピュータを社会構造の基盤の一つにしようとしているのが大勢である以上、あえて逆らうこともない。その合理化の総合的かつ究極的な姿を表す言葉として CIM (Computer Integrated Manufacturing) が現在のところ主流を占めてい

るようである。日本でも同様な目的を表す言葉として FA (Factory Automation) が作られ使われてきたが、これはむしろ FFA (Factory Floor Automation) という解釈になりつつあり、その概念の覆う範囲が当初の意図より縮小してきた。FA から CIM へ、LAN からコミュニケーションへと視野を広げ、コンピュータにより合理化された生産活動において非常に重要な位置を占める情報通信システムについて、基礎的な事柄が全体的に理解できるように編集を試みたがいかがであろう。

(天沼光太郎)