サイクロイドボール減速機の基礎解析

(第1報)*

—動作原理—

寺田 英嗣** 牧 野 洋*** 今 瀬 憲 司†

Fundamental Analysis of Cycloid Ball Reducer (1st report)
—Motion Principle—

Hidetsugu TERADA, Hiroshi MAKINO and Kenji IMASE

A newly developed Cycloid Ball Reducer is introduced and analyzed. The fundamental element of the reducer consists of three components; two surface-grooved discs and a train of balls. One of the discs has an epicycloidal-wave groove on one side of its surface, while the other disc has a hypocycloidal-wave groove. The two grooves face each other, and between them balls are arranged in a uniform angular pitch. The balls transmit torque between the two discs. A proper amount of thrust force is applied axially to eliminate backlash. This Cycloid Ball Reducer is suitable for application to servo mechanisms and robots. It is compact and easy to build in a unit, and has a large torque capacity. In this report, the principle of the reducer is analyzed using polar complex vectors. It is proved that the reducer has linear characteristics in principle. The reduction ratio can be chosen a wide range.

Key words: reducer, gearless reducer, cycloid ball reducer, cycloidal wave, backlash, servo component, robot element, complex vector analysis.

1. はじめに

産業用ロボットをはじめとする種々のサーボ機構の性能は、その動力伝達機構の特性によって左右される。サーボ性能に影響を与える要因として、バックラッシュ、機構自身の弾性変形、動力伝達部における摩擦および摩耗などがあげられる。

サイクロイドボール減速機¹⁾はこれらの諸要因を改善するために考案されたものであり、ボールの転動を利用した動力伝達のために摩擦・摩耗が小さく、高効率の伝達を行うことができる。また、軸線方向に予圧をかけることによって、バックラッシュを取り除くことができるという特徴をもっている。

歯車を利用しない減速機²⁾として従来各種の機構が

開発されているが、これらはその大半がサイクロイドあるいはトロコイドの歯車をもつ外歯あるいは内歯のディスクとボールあるいはローラの転動を用いたものである。これに対して、本報に述べる機構は円盤の端面にサイクロイド形状の溝を切り、この溝に沿ってボールを転動させることを特徴としている。

本研究はサイクロイドボール減速機の基本構造を紹介し、その運動伝達のメカニズムについて極形式複素ベクトル³⁾を用いて解明し、さらに、溝の形状をサイクロイド曲線からトロコイド曲線に拡張した場合についての解析を行ったものである。

2. 構 造

本減速機は、図1に示すように偏心クランク入力軸、一方にエピサイクロイド曲線（またはエピトロコイド曲線）、他方にハイポサイクロイド曲線（またはハイトロコイド曲線）の中心軌跡の溝を切った2枚の対向した板、その間に挟まれるボール、および偏心運動を取り除いて減速された公転運動のみを取り出す機構から成り立っている。

* 原稿受付 昭和62年12月22日。昭和61年度精密工学会春季大会学術講演会（昭和61年3月28日）および昭和62年度精密工学会春季大会学術講演会（昭和62年3月29日）にて発表

** 学生会員 山梨大学大学院（現、正会員、エヌ・テ・エヌ東洋ベアリング（株）；大阪市西区京町堀1-3-17）

*** 正 会 員 山梨大学工学部（甲府市武田4-3-11）

† 加茂精工（株）（豊田市柿本町7-16）

Fig. 1 Structure of Cycloid Ball Reducer

3. 回転原理

3.1 サイクロイド曲線とトロコイド曲線

基礎円に外接して転円をすべらずに転がすとき、転円に固定された任意の一点はエピトロコイド曲線を描く（図2(c)）、内接して転がせばハイポトロコイド曲線（図2(d)）を描く。特に与点が転円の周上に存在する場合には、曲線はそれぞれエピサイクロイド曲線（図2(a)）、およびハイポサイクロイド曲線（図2(b)）となる。

3.2 サイクロイドボール減速機の原理

いま、4つの円 O_1, O_2, O_3, O_4 が点 A において接しており、 O_1, O_2 の半径はそれぞれ r_1, r_2 、 O_3 と O_4 の半径は同一でありこれを r_0 として、これらの値の間に次のような整数比の関係があるとする（図3参照）。

$$\frac{r_1}{r_0} = n_1, \quad \frac{r_2}{r_0} = n_2, \quad n_2 > n_1 \quad (1)$$

ここで円 O_3 を円 O_1 の外周に接触させながら転がすことなく転がせば円 O_3 の周上の一点はエピサイクロイドを描く。これを極形式複素ベクトル³⁾で表せば θ_3 をパラメータとして式(2)のようになる（図2(a)参照）。

$$\begin{aligned} \vec{P}_3 &= \vec{O_1P_3} = \vec{O_1O_3} + \vec{O_3P_3} \\ &= (n_1+1)r_0 e^{j\theta_3} - r_0 e^{j\theta_3} \cdot e^{jn_1\theta_3} \\ &= (n_1+1)r_0 e^{j\theta_3} - r_0 e^{j(1+n_1)\theta_3} \end{aligned} \quad (2)$$

また同様に円 O_4 を円 O_2 の内周に接触させながら転動すれば、円 O_4 の周上の一点はハイポサイクロイド曲線を描く。これをベクトルで示せば式(3)のようにならわすことができる（図2(b)参照）。

$$\begin{aligned} \vec{P}_4 &= \vec{O_2P_4} = \vec{O_2O_4} + \vec{O_4P_4} \\ &= (n_2-1)r_0 e^{j\theta_4} + r_0 e^{j\theta_4} \cdot e^{j(-n_2\theta_4)} \\ &= (n_2-1)r_0 e^{j\theta_4} + r_0 e^{j(1-n_2)\theta_4} \end{aligned} \quad (3)$$

(a) Epicycloid

(b) Hypocycloid

(c) Epitrochoid

(d) Hypotrochoid

Fig. 2 Cycloid and trochoid curve

この2式は両曲線がそれぞれ二つの回転（公転と自転）の和であることを示している。このエピサイクロイド状の溝およびハイポサイクロイド状の溝が、それぞれ図1に示すように円板 O_1 および O_2 の対向面に

Fig. 3 Relations of base circles

Fig. 4 Planetary motion

切ってあるものとする。

次に円 O_1 を固定して円 O_2 を円 O_1 の外周に接触させながら回転させると円 O_2 の内部（または周上）に固定された点 P_4 は、円 O_1 に対してエピトロコイド（周上ではエピサイクロイド）曲線を描く。中心 O_2 の中心 O_1 に対する回転を θ_2 とすれば、図 4 を参照して、

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_2 = \mathbf{O}_1\mathbf{P}_4 &= \mathbf{O}_1\mathbf{O}_2 + \mathbf{O}_2\mathbf{P}_4 \\ &= -(n_2 - n_1)r_0 e^{j\theta_2} + e^{j\delta} \cdot \mathbf{P}_4 \end{aligned} \quad (4)$$

ここで δ は $\mathbf{O}_2\mathbf{A}$ から $\mathbf{O}_2\mathbf{A}'$ への変位角で $\mathbf{O}_2\mathbf{P}_4$ から $\mathbf{O}_2\mathbf{P}_4'$ への変位角に等しい（なぜなら $\triangle AO_2P_4$ と $\triangle A'O_2P_4'$ は合同であるから）。 δ を求めるためにベクトル $\mathbf{O}_2\mathbf{A}'$ を求めると、これはベクトル $\mathbf{O}_2\mathbf{A}$ をいったん O_1 のまわりに反時計まわりに θ_2 だけ回転させ、

さらにこれを時計まわりに O_2' のまわりに $n_1\theta_2/n_2$ だけ回転させたものであるから、

$$\mathbf{O}_2'\mathbf{A}' = r_2 e^{j\delta} = r_2 e^{j(1-\frac{n_1}{n_2})\theta_2}$$

となり、これより、

$$\delta = \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)\theta_2 \quad (5)$$

を得る。

ここで、

$$n_2 - n_1 = 2 \quad (6)$$

に選ぶものとするとき式 (4) は

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_4 \cdot e^{j\frac{2}{n_2}\theta_2} - 2r_0 e^{j\theta_2} \quad (7)$$

となり、これに式 (3) を代入すれば、

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_2 &= (n_2 - 1)r_0 e^{j(\theta_4 + \frac{2}{n_2})\theta_2} \\ &\quad + r_0 e^{j\{(1-n_2)\theta_4 + \frac{2}{n_2}\theta_2\}} - 2r_0 e^{j\theta_2} \end{aligned} \quad (8)$$

を得る。これと式 (6) を式 (2) に代入した次の式、

$$\mathbf{P}_3 = (n_2 - 1)r_0 e^{j\theta_3} - r_0 e^{j(n_2 - 1)\theta_3} \quad (9)$$

を比較し、両者が一致するところ、すなわち両曲線の交点を求める。式の形から、次の関係の成り立つところでは $\mathbf{P}_2$ と $\mathbf{P}_3$ が一致することがわかる（交点はこのほかにも存在する）。

$$\begin{cases} \theta_3 = \theta_4 + \frac{2}{n_2}\theta_2 \\ (n_2 - 1)\theta_3 = (1 - n_2)\theta_4 + \frac{2}{n_2}\theta_2 = \theta_2 \end{cases}$$

これを解いて、

$$\left. \begin{aligned} \theta_3 &= \frac{1}{n_2 - 1}\theta_2, \quad \dot{\theta}_3 = \frac{1}{n_2 - 1}\dot{\theta}_2 \\ \theta_4 &= \frac{n_2 - 2}{n_2(1 - n_2)}\theta_2, \quad \dot{\theta}_4 = \frac{n_2 - 2}{n_2(1 - n_2)}\dot{\theta}_2 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

となり、このとき

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_3 = (n_2 - 1)r_0 e^{j\frac{1}{n_2 - 1}\theta_2} - r_0 e^{j\theta_2} \quad (11)$$

である。この交点は O_1 と O_2 の中点を中心とする半径 $(n_2 - 1)r_0$ の円上にあり、この円を図 3 では一点鎖線で示す。これをボールピッチ円と呼ぶことにする。いま θ_2 を一定の角速度 $\dot{\theta}_2$ で与えると、 θ_3 および θ_4 はこれに比例した角速度 $\dot{\theta}_3$ および $\dot{\theta}_4$ で変化する。 O_2 が O_1 のまわりを 1 回転すると、 θ_2 が $\theta_2 + 2\pi$ となること

より上式は,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_3 &= (n_2 - 1)r_0 e^{j\frac{1}{n_2-1}(\theta_2+2\pi)} - r_0 e^{j(\theta_2+2\pi)} \\ &= (n_2 - 1)r_0 e^{j\frac{1}{n_2-1}(\theta_2+2\pi)} - r_0 e^{j\theta_2} \quad (12) \end{aligned}$$

となり, この点でも $\mathbf{P}_2$ と $\mathbf{P}_3$ は一致する. 同様にしてボールピッチ円上の $2\pi/(n_2-1)$ の間隔に等配に配置された n_2-1 個の点は二つのサイクロイドの交点となる. サイクロイドボール減速機では, この (n_2-1) 個の点 (図3においては7個) にボールを置きトルクを伝達する. ボールの位置は O_1 から見て

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_2 &= (n_2 - 1)r_0 e^{j\{\frac{1}{n_2-1}(\theta_2+2m\pi)\}} - r_0 e^{j\theta_2} \\ (m &= 0, 1, 2, \dots, n_2 - 2) \quad (13) \end{aligned}$$

となる. θ_2 が変化してもボールの間隔は変化しないので, ボールをリテーナによって保持することが可能である.

以上の結果をまとめると次のように述べるができる. すなわち, 円板 O_1 に波高 $2r_0$, 波数 n_1 のエビサイクロイドを描き, 円板 O_2 には同一波高, 波数 n_2 のハイポサイクロイドを描いて $n_2 = n_1 + 2$ とし, O_2 の中心を O_1 の中心から $2r_0$ だけ偏心させて, O_2 の基円のまわりに接触しながらすべらずに転がるように円板と円板の間に相対回転運動を与えたとき, 二つのサイクロイド曲線の交点のうち n_2-1 個の交点は O_1 と O_2 の中点を中心とする半径 $(n_2-1)r_0$ のピッチ円上に等角度で配置されて回転する. したがって, 二つの円板にそれぞれのサイクロイド曲線の溝を切って対向させ, 上記交点の位置にボールを置いてトルクを伝達させれば, 二つの円板の相対運動は二つの基円の転がり接触と同一の運動となる. これがサイクロイドボール減速機の原理である.

O_1 を固定し, O_2 を O_1 のまわりに角速度 $\dot{\theta}_2$ で回転させたとき, ボールまたはそのボールのリテーナはボールピッチ円上に $\dot{\theta}_2/(n_2-1)$ の遅い速度で移動する. また, このとき O_2 円板上に固定された点 P_4 の運動は式 (7) より

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_4 \cdot e^{j\frac{2}{n_2}\theta_2} - 2r_0 e^{j\theta_2}$$

となり, 半径 $|\mathbf{P}_4|$, 速度 $2\dot{\theta}_2/n_2$ の遅い回転 (公転) と半径 $2r_0$, 速度 $\dot{\theta}_2$ の早い回転 (自転) との和となる.

4. 出力運動の取出し

偏心軸により入力角度 θ_2 を与えられた中間板 (図1の⑨) O_2 は偏心による自転運動と減速された公転運動の2つを持っている. このうち公転運動のみを出力として取り出すために, 円形の溝を対向させこの間にボールを置くような構造を持たせ, この方式を円形溝方式と呼ぶことにする (図1参照).

中間板のハイポサイクロイド曲線の溝を切っており裏面に半径 r_0 の円形の溝 O_8' を切る. この小円上の点は小円の中心 O_8' から小円の周上の任意の点を見る角 θ_8 をパラメータとすれば点 O_5 から見て次の位置に来る (図5参照). 但し $|\overline{O_5 O_8'}| = r_6$ とする.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_8' &= \overline{O_5 P_8'} = \overline{O_5 O_8'} + \overline{O_8' P_8'} \\ &= -2r_0 e^{j\theta_2} + r_6 e^{j\theta_8} + r_0 e^{j\theta_8} \quad (14) \end{aligned}$$

一方, O_1 と同軸に出力円板 O_5 を回転自由に取り付け, この円板に半径 r_0 の小円 O_7' の溝を切る. O_5 円板の中心 O_5 から小円の中心 O_7' を見る角を τ とする. 小円上の点 P_7' は点 O_5 から見れば同様に小円の半径を見る角 θ_7 をパラメータとし, $|\overline{O_5 O_7'}| = r_5$ とし,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_7' &= \overline{O_5 P_7'} = \overline{O_5 O_7'} + \overline{O_7' P_7'} \\ &= r_5 e^{j\tau} + r_0 e^{j\theta_7} \quad (15) \end{aligned}$$

この2つの小円の交点 $\mathbf{P}_8' = \mathbf{P}_7'$ において

$$\left. \begin{aligned} \theta_2 &= \theta_8 = \theta_7 + \pi \\ r_5 &= r_6 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

とすれば

$$\tau = \delta = \frac{2}{n_2} \theta_2 \quad (17)$$

Fig. 5 Output of reduced motion

Fig. 6 Relation between trochoid curves

となる。すなわち、2つの小円の交点の位置にボールを置き、トルクを伝達すれば減速された出力回転を取り出すことができる。入力角 θ_2 を一定角速度 $\dot{\theta}_2$ で回転することにより、出力板 O_5 は減速された一定角速度 $(2/n_2)\dot{\theta}_2$ で回転する。

5. トロコイド曲線に拡張した場合

5.1 回転原理

サイクロイド曲線の尖端部では運動方向が 180° 変わるために高速運動時に問題がある。尖端部をなくして滑らかな運動をさせるために曲線をトロコイド曲線に拡張する。これをベクトルであらわせば、図2を参照して、式(18)、(19)であらわせる。但し、 $0 < \alpha \leq 1$ であり、この α をトロコイド係数と呼ぶことにし $\alpha = 1$ のときにサイクロイド曲線になり、 α が小さくなればなるほど凹凸が小さくなって滑らかになる。 $\alpha > 1$ の場合にはトロコイド曲線にループができてしまい条件としては適していないために係数の範囲からは除外している。

$$\mathbf{P}_3 = (n_1 + 1)r_0 e^{j\theta_3} - \alpha r_0 e^{j(1+n_1)\theta_3} \quad (18)$$

$$\mathbf{P}_4 = (n_2 - 1)r_0 e^{j\theta_4} + \alpha r_0 e^{j(1-n_2)\theta_4} \quad (19)$$

サイクロイド曲線の場合と同様にかみあわせると図3に示すようにかみあうが、トロコイド曲線の場合には基円どうしは接触しない。これは円 O_1 、 O_2 の心間距離が $2\alpha r_0$ となってサイクロイド曲線の場合よりトロコイド係数の大きさに応じて心間距離が小さくなるためである。しかし円 O_1 、 O_2 のまわりを回転する円 O_3 、 O_4 がすべることなく転がり、また円 O_3 、 O_4 の内部に固定されていてトロコイド曲線を描く点を含む半径

Fig. 7 Analysis of reduction ratio

αr_0 の円をすべることなく転がせば、サイクロイド曲線の場合と同じ回転角が得られる。このことを用いて円 O_1 を固定し円 O_2 の中心を O_1 を中心にして入力角 θ_2 で回転すれば、円 O_2 上の一点の描く軌跡 P_2 は次のように表すことができる。なお円 O_2 の回転角 δ は式(5)で表せる。

$$\mathbf{P}_2 = -2\alpha r_0 e^{j\theta_2} + e^{j\delta} \cdot \mathbf{P}_4 \quad (20)$$

ここで $n_2 - n_1 = 2$ に選び式(10)の条件を選べば P_2 と P_3 は一致する。ボールリテーナをつくることが可能であり、しかもリテーナ半径および角度ピッチはサイクロイド曲線の場合と同様に下式で与えることができ、リテーナの偏心量が異なるのみである。

$$\mathbf{P}_2 = (n_2 - 1)r_0 e^{j\left\{\frac{1}{n_2 - 1}(\theta_2 + 2m\pi)\right\}} - \alpha r_0 e^{j\theta_2} \quad (21)$$

$$(m = 0, 1, 2, \dots, n_2 - 2)$$

5.2 速比の計算

いままで述べてきたように、この機構はそれぞれのピッチ円と同径の円の転がり接触による運動伝達機構と等価であることから、速比の計算は次のように行うことができる(図7参照)。

固定円を円 O_1 、転円を円 O_2 として円 O_2 の固定空間に対する角速度を $\dot{\delta}$ 、入力角速度を $\dot{\theta}_2$ とすると、円 O_2 はピッチ点 P を瞬間中心とする回転運動をするから、速度を V とすれば、

$$\dot{\delta} = \frac{V}{r_2} \quad (22)$$

また同時に V は偏心クランクの周速度であるから、

$$V = \dot{\theta}_2(r_2 - r_1) \quad (23)$$

よって上式より円 O_2 の角速度 δ は、

$$\dot{\delta} = \frac{r_2 - r_1}{r_2} \dot{\theta}_2 = \frac{2}{n_2} \dot{\theta}_2 \quad (24)$$

となり、さきに導いた解と一致する。以上は O_1 円板を

固定した場合について述べたが、 O_2 円板を固定し、 O_1 円板に偏心クランクによる入力を与える場合にも、同様にして速度ベクトル法で速比を求めることができる。

6. 結 論

サイクロイドボール減速機の運動メカニズムを解析し、そのトロコイド曲線への拡張について考察した。その結果次のような結論が得られた。

- (1) ボールを介した両サイクロイド波形間の運動伝達は各ピッチ円と同径である円の転がり接触による運動伝達機構と等価である。
- (2) この関係はトロコイド曲線に拡張した場合で

も成り立ち、しかもボールリテーナについては同一寸法のものを用いることができる。

- (3) 速比について、速度ベクトル法でピッチ円の半径の比率を用いて表すことができる。

なお、次報において溝の曲率半径と圧力角、およびボールの荷重分担について述べる予定である。

参 考 文 献

- 1) 特願昭 60-141963.
- 2) M. Seneczko: Gearless Speed Reducer, Machine Design, Oct. 11, (1984) 140.
- 3) 牧野 洋: 自動機械機構学, 日刊工業新聞社 (1976).

書 評

ファジィ制御

菅野道夫・著
日刊工業新聞社・刊

最近、新聞・テレビ等でよく目や耳にする言葉に「ファジィ (あいまい)」がある。この関連の国際的な専門学会が数年前に設立されたり、シンポジウムやワークショップが日本で開催され、またいろいろな学協会の主催するセミナー等でも、多数の参加者を得ている。

これを裏付けるように、基礎となる体系であるファジィ理論についての書籍・雑誌が、数こそ多くないが発行されだしたのはごく最近のことである。この中で、ファジィ理論を応用した制御 (ファジィ制御) を主に扱った最初のものが、本書といえる。ファジィ理論の社会における最初の成功例が、制御の分野であっただけに、興味深い。余談ではあるが、このファジィ理論によれば、株式の売買アドバイスなどもやっつけのけるらしい。

さて、順に繙いてみよう。まず、ファジィ制御の本論に移るための基礎的な項目すなわち、「ファジィ理論」、「ファジィ集合」、「ファジィ数とその演算」および「ファジィ関係」の章がある。新しい概念だけに、やはり従来の理論や用語と比較しながら、進んでいく。特に、集合や数の演算のところでは、従来のあいまいでないクリスプ的な考えと照らし合わせながら、説明が展開されているので非常に理解しやすい。

「ファジィ理論」が次にある。従来の論理学においては、命題の意味は明確なものとして扱われてきたが、ファジィ論理学では、命題のもつ意味を考えることが基本である。命題は通常言葉で表現される。が、改めて問われると、わかって使っている言葉の意味が、使う人それぞれによって違うというように、非常にあいまいなもので

あることが分かってくる。しかし、人はあいまいなままの情報をうまく処理している。ファジィというのは、人間の情報処理をうまくシミュレートする方法なのか、と想像できる。

制御とは、いくつかの命題を関係づけていく操作だと解釈できるが、この意味において「ファジィ論理」は、続く「ファジィ制御」および「プラントのファジィモデル」の大事な前置きになっている。

ファジィ (論理) 制御を考える上で重要なことは制御器 (制御規則) の設計である。ここまでの話を応用して、命題の (あいまいな意味を持つ) 述語部分を、メンバーシップ関数なるもので定量的に表現し、命題の間の関係を規則化すればよいことになる。ここで、IF... THEN... の形で関係付けられた制御規則により、実際のモデルの制御がうまくいったという実例をもって、非常にわかりやすく説明がなされている。例えば、セメントキルン、浄水場、(模型)自動車、地下鉄、エレベータ、ロボットなどが、このファジィ制御によって従来と比べうまくいったことが紹介されている。

以上のように、本書はファジィ理論の入門者から、実際にファジィ制御あるいは人の知恵をもっと活かした制御をしようという技術者まで幅広く読める最適の一冊といえる。著者が述べているように、ファジィ理論は科学方法論に新しいパラダイムを切り拓ききっかけを与えるかもしれない。

(関東学院大学・金田 徹)

(1988年5月刊, A5判, 183ページ, 2800円)